LEHRBUCH DER MATHEMATIK

ZUM SELBSTUNTERRICHT UND FÜR STUDIERENDE DER NATURWISSENSCHAFTEN UND DER TECHNIK

EINE EINFÜHRUNG
IN DIE DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG
UND IN DIE ANALYTISCHE GEOMETRIE

VON

DR. Dr.-Ing. GEORG SCHEFFERS

ACHTE AUFLAGE

MIT 438 FIGUREN

Publisher: MARY S. ROSENBERG, *Book-Seller and Importer*
235 West 108th Street • New York 25, N. Y.
1945

*This is a reprint of the eighth edition published in 1940
by Walter de Gruyter & Company, Berlin.*

Vorwort.

Von den meisten Lehrbüchern der höheren Mathematik unterscheidet sich dieses vor allem dadurch, daß es dem Selbstunterrichte dienen soll. Es wendet sich an Leser, die die Mathematik nicht um ihrer selbst willen kennenlernen wollen, sondern nur wegen der Anwendungen, sei's beim Studium der Naturwissenschaften oder der Technik, sei's für andre Wissenszweige, in denen man die höhere Mathematik nicht mehr entbehren kann.

Solche Leser werden wohl manches von ihren Schulkenntnissen wieder vergessen haben; auch haben sie vielleicht damals, als sie noch die Schulbank drückten, dies oder jenes nicht so ganz verstanden. Daraus kann ihnen kein Vorwurf gemacht werden; es liegt in der menschlichen Natur. Aber ich möchte ihnen helfen, wieder mit dem mathematischen Denken vertraut zu werden. Auszugehen war also von einem bescheidenen Maß von Vorkenntnissen. Nicht das, was man noch von der Schule her wissen sollte, sondern das, was man wirklich noch davon weiß, ist mir maßgebend gewesen. Vorausgesetzt wird deshalb nur das einfache Buchstabenrechnen überhaupt, das Auflösen von Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten und das Wichtigste aus der niederen Geometrie. Alles andere aus der Schulmathematik wird, soweit es herangezogen werden muß, an geeigneten Stellen aufs neue abgeleitet, aber meistens nicht in der auf der Schule gebräuchlichen Weise, sondern so, daß es auch denen, die noch was davon wissen, nicht auf die Nerven fällt, sondern ihnen Bekanntes in neuem Licht erscheinen läßt. Dies gilt z. B. von der Trigonometrie und namentlich von den Logarithmen, deren eigenartiges Wesen schon wegen Zeitmangels auf der Schule nicht so erörtert werden kann, wie das in diesem Buche geschieht. Sogar das Auflösen quadratischer Gleichungen wird aufs neue gelehrt, denn — Hand aufs Herz! — wer weiß darüber noch gut Bescheid?

Trotz des Ausganges von nur geringen Vorkenntnissen will aber das Buch den Leser zielbewußt bis zu einer derartigen Höhe führen, daß er die in seinem besonderen Studiengebiete vorkommenden Anwendungen der höheren Mathematik zu verstehen und insbesondere die Differential-

und Integralrechnung sowie die analytische Geometrie zu handhaben lernt.

Bis zu diesem Ziel ist natürlich ein weiter Weg zurückzulegen, und zwar in bedächtigen Schritten, daher die Dickleibigkeit des Buches. Erst in den späteren Kapiteln gehts schneller vorwärts. Wem nun hier oder da die etwas behagliche Gangart zu langsam erscheint, der kann sich den Genuß leisten, das ihm schon Vertraute mit raschem Blicke zu überfliegen und in diesem Wälzer auch einmal ein paar Seiten ohne Gewissensbisse zu überschlagen. Aber ich warne: Mit trägen Lesern rechnet das Buch ganz und gar nicht. Wer etwas erwerben will, muß dafür auch redlich arbeiten, und wer nicht besondere Anlage zur Mathematik hat, muß natürlich mehr arbeiten als der mathematisch Begabte. Ich rate dringend, immer Papier und Schreibstift bereit zu halten, namentlich auch kariertes Papier zum Zeichnen von Kurvenskizzen, und alles, was gesagt wird, sorgfältig zu prüfen und nachzurechnen. Die zahlreichen Beispiele, zu einem sehr großen Teil den Naturwissenschaften und der Technik entnommen, sind einzig und allein deshalb kleingedruckt, um den Text übersichtlich hervortreten zu lassen. Der Leser darf also durchaus nicht glauben, er könne das Kleingedruckte überschlagen; im Gegenteil, gerade daraus lernt er das meiste!

Bei der Auswahl des Stoffes hab ich mich nicht an irgendwelche herkömmliche Festlegungen gebunden, vielmehr gebracht, was nach meiner Meinung jemand, der die Mathematik als Hilfsmittel brauchen will, am gründlichsten kennenlernen sollte. Selbstverständlich sind da die Meinungen verschieden, und ich will meinen Rezensenten nicht die gewohnte Freude nehmen, in meinem Buche dies oder das zu vermissen und dies oder das für überflüssig zu halten. Die mir wohlbekannten Klagen der „reinen" Mathematiker über die Breite des Vortrages durften mich bei den Bearbeitungen der verschiedenen neuen Auflagen nicht beeinflussen. Wer von Beruf Mathematiker ist, verliert leicht das Gefühl dafür, was dem Neuling oder Gelegenheitsarbeiter besonders schwer wird.

Mir selbst steht kein Urteil darüber zu, ob ich das Erstrebte erreicht habe, aber ich darf darauf hinweisen, daß dies Buch schon fünfunddreißig Jahre lang von Alt und Jung gebraucht wird. Die große Anzahl von Zuschriften aus den verschiedensten Kreisen, z. B. auch von einer ganzen Anzahl von Volksschullehrern, zeigt, daß mir mancher dafür dankbar gewesen ist, in diesem Buch einen kameradschaftlichen Freund gefunden zu haben, an dessen Hand er in die Hallen der Mathematik ohne Stolpern an der Schwelle oder auf der Treppe eingeführt worden ist. Ich benutze gern die Gelegenheit, allen denen zu danken, die mich auf Fehler oder Lücken aufmerksam gemacht haben!

Die gegenwärtige Auflage unterscheidet sich von den letzten nur durch die Ausmerzung von kleineren Versehen und von Druckfehlern, aber gewiß sind immer noch Druckfehler übersehen. Ich selbst hatte keine Ursache, größere Änderungen vorzunehmen; andererseits war das auch nicht der Wunsch des Verlagshauses. Denn nur so hat es sich ermöglichen lassen, dies Buch auch in der neuen Auflage zu einem erträglich niedrigen Ladenpreis auszugeben.

Berlin-Dahlem, im Januar 1940 **Georg Scheffers**
Willdenowstraße 40

Erstes Kapitel: **Größen und Funktionen.**

Zweites Kapitel: **Begriff des Differentialquotienten.**

Drittes Kapitel: **Algebraische Funktionen.**

Viertes Kapitel: **Einiges aus der analytischen Geometrie.**

Fünftes Kapitel: **Grundbegriffe der Integralrechnung.**

Sechstes Kapitel: **Die logarithmischen Funktionen.**

---

[1]) Ein Verzeichnis der Stichwörter findet sich am Schlusse des Buches.

Siebentes Kapitel: Die Exponentialfunktionen.

Achtes Kapitel: Die Kreisfunktionen.

Neuntes Kapitel: Höhere Differentialquotienten.

Zehntes Kapitel: Berechnung der Funktionen.

Elftes Kapitel: Auswertung von Integralen.

Zwölftes Kapitel: Funktionen von mehreren Veränderlichen.

Anhang.

Erstes Kapitel.

Größen und Funktionen.

§ 1. Vorläufiger Überblick.

Auf zwei Wegen kann man versuchen, mathematische Aufgaben zu lösen, durch die Zeichnung oder durch die Rechnung. Manchmal kommt man am besten zeichnerisch zum Ziel, aber bei weitem nicht immer. Das Rückgrat der Mathematik ist vielmehr die Rechnung, die Formel. Oft glauben Lernbegierige, die Mathematik lasse sich auf anschaulich-zeichnerischem Weg entwickeln, und beklagen, daß die Mathematiker das ihnen zuliebe nicht tun wollen. Sie sind im Irrtum: Wer die Formel grundsätzlich ablehnt, kann sich nur in gewissen beschränkten Gebieten erfolgreich betätigen. Übrigens versteht man auch viele zeichnerische oder graphische Verfahren erst dann richtig, wenn man vorher durch das Fegefeuer der Formeln gegangen ist, und nicht wenige graphische Verfahren sind eine Frucht der Rechnung. Ferner gestattet nur die rechnerische Behandlung, die Aufgaben mit jedem für die Anwendungen gewünschten Grade der Genauigkeit zu lösen. Häufig ist man genötigt, in den Voraussetzungen einer Untersuchung einstweilen noch einige Willkür zu lassen, nämlich noch nicht festzusetzen, welche Werte diese oder jene vorkommenden Größen haben sollen. Man verwendet deshalb wie in der Algebra statt bestimmter Zahlen Buchstaben, und nachdem man zu den Schlußformeln gelangt ist, setzt man dafür diejenigen Zahlen ein, die man aus irgendwelchen äußeren Gründen haben will. So sichert man sich den großen Vorteil, die Lösung in allen möglichen Fällen anwenden zu können. Dies macht das rechnerische Verfahren dem zeichnerischen entschieden überlegen. Denn eine Zeichnung nachträglich unter Annahme anderer gegebener Größen abändern, heißt, sie ganz neu herstellen.

Wir werden gelegentlich auch graphische Verfahren bringen. Wer sich aber über die graphische Behandlung der Mathematik überhaupt gründlich unterrichten will, muß besondere Werke zu Rate ziehen, die über dar-

stellende Geometrie, graphische Statik und graphisches Rechnen.

Damit man sich in der großen Lehrbücherliteratur zurechtfinde, erklären wir hier ganz knapp und bloß vorläufig und unvollkommen einige Fachausdrücke. Das Verfahren, geometrische Untersuchungen rechnerisch durchzuführen, nennt man die analytische Geometrie. Wie man mit sogenannten unendlichkleinen Größen zu rechnen hat, lehrt die Infinitesimalrechnung. Gerade ihrer Entwicklung ist zu nicht geringem Teil der großartige Aufschwung der Naturwissenschaften seit dem siebzehnten Jahrhundert zu danken, seitdem die Naturforscher von der bloß qualitativen Erfassung ihrer Aufgaben (der Frage nach dem „wie“) zur quantitativen (der Frage nach dem „wieviel“) übergingen. Bei den verwickelten Beziehungen nämlich, die zumeist in den Naturerscheinungen vorkommen, muß sich der Forscher häufig damit begnügen, zu erkennen, welcher Einfluß auf die Ergebnisse geübt wird, wenn er gewisse Bedingungen oder Voraussetzungen seiner Versuche nur außerordentlich wenig abändert. Dagegen ist es oft gar nicht möglich, ohne weiteres die Tragweite solcher Abänderungen zu erkennen, die beträchtlich sind. Hier ist deshalb das Hilfsmittel anzuwenden, das die Infinitesimalrechnung darbietet. Sie gestattet, den Zusammenhang zwischen unendlichkleinen und beträchtlichen Änderungen zu erkennen. Auch das Umgekehrte ist häufig der Fall: Oft kann der Forscher nur solche Einflüsse beobachten, die durch beträchtliche Abänderung der Voraussetzungen seiner Versuche ausgelöst werden. Andererseits aber ist es ihm klar, daß den meisten Naturerscheinungen ein gewisser großer Zug der Stetigkeit innewohnt, d. h. daß sich jene beträchtlichen Abänderungen als Summen von lauter sehr kleinen darstellen werden, und daß in den Wirkungen dieser sehr kleinen Änderungen die eigentlichen Grundgesetze der Erscheinungen zum Ausdrucke kommen. Hier ist wieder die Infinitesimalrechnung am Platze; denn sie zeigt auch, wie man aus beträchtlichen Veränderungen auf sehr kleine Veränderungen zurückschließen kann.

Die Lehrbücher der Infinitesimalrechnung zerlegen die Betrachtungen meistens in zwei Teile, in die Differentialrechnung und in die Integralrechnung. Das Wort Differential bedeutet eine unendlichkleine Größe, das Wort Integral eine aus Differentialen gebildete Summe. Wir werden die Scheidung in zwei Teile außer acht lassen; was wir dadurch an Einheitlichkeit verlieren, hoffen wir an Verständlichkeit zu gewinnen.

Da sich die vorstehenden Bemerkungen auf erst noch zu lehrende Dinge beziehen, sind sie nur oberflächlicher Natur. Sie sollen eben nur einen vorläufigen Überblick geben.

§ 2. **Das Messen der Größen.**

Die Gegenstände unserer Betrachtungen sind Größen, d. h. Dinge oder Begriffe, die meßbar sind. Verschiedene Arten von Größen sind nicht miteinander durch Abmessen vergleichbar, z. B. Zeiten und Temperaturen. Jede Größenart steht vielmehr für sich, aber alle Größen derselben Art lassen sich als Vielfache einer Größe derselben Art, d. h. als Zahlen ausdrücken. Alle Strecken z. B. lassen sich mit dem Meter messen, alle Zeiten mit der Stunde, alle Temperaturen mit dem Grad Celsius. Diejenige Größe, mit der man alle Größen derselben Art mißt, nennt man die Einheit der Größenart.

Das Abmessen kann nur bis zu einem gewissen Grade der Genauigkeit getrieben werden. Wenn ich sage, eine Länge betrage 2,439 m, so heißt dies nur, daß sie zwischen 2,4385 und 2,4395 m liegt. Die Zahlen, die man bei den Anwendungen der Mathematik benutzt, sind stets mit Ungenauigkeiten behaftet. Daraus folgt, daß man bei der praktischen Anwendung richtiger mathematischer Verfahren nur einen gewissen Grad der Genauigkeit erreichen kann, indem er von Umständen abhängt, die außerhalb des Bereiches der Mathematik liegen. Häufig werden wir daher Lösungen, die mathematisch vollkommen richtig sind, durch angenäherte Lösungen ersetzen dürfen.

Die Wahl der Einheit einer Größenart ist eigentlich willkürlich, doch muß sie so vollzogen werden, daß man die Einheit im Bedarfsfall immer hinreichend genau herstellen kann. So sind z. B. besondere Vorkehrungen getroffen worden, um die Einheit der Länge, das in Paris aufbewahrte Urmeter, vor schädlichen Einflüssen zu schützen. Jedermann könnte sich eigentlich die Einheiten nach Belieben wählen. Dies würde aber zu Unzuträglichkeiten führen, sobald man sich anderen mitzuteilen wünscht. Man muß daher Übereinkommen treffen. Solche Vereinbarungen liegen zum Teil geschichtlich sehr weit zurück (z. B. „Stunde"), zum Teil sind sie noch recht neu. Sie sind für die Allgemeinheit so wichtig, daß sie Gegenstand der Gesetzgebung geworden sind.

Allerdings sieht man sich bei besonderen Untersuchungen manchmal genötigt, von diesen Vereinbarungen abzuweichen. So zeigt die Optik, daß die Wellenlänge des roten Lichtes bei der Linie C des Spektrums gleich 0,000000656 m ist. Statt dessen sagt man, sie betrage 0,656 μ, indem man nicht das Meter, sondern sein Milliontel[1] μ als Einheit benutzt, nur um bequemere Zahlen zu haben. Hier ist eben die gebräuch-

[1] Unrichtig ist der leider häufige Sprachgebrauch Millionstel ebenso wie Hundertstel und Tausendstel. Ein Hundertel ist der hunderte Teil, nicht der hundertste, gerade so wie ein Drittel der dritte Teil ist.

liche Längeneinheit viel zu groß; man weicht absichtlich davon ab, wählt aber als neue Einheit eine Länge, die zum Meter in einem „runden" Zahlenverhältnisse steht, so hier 0,000001 m, um, wenn nötig, ohne Mühe wieder zur sonst gebräuchlichen Einheit übergehen zu können. Wenn wir in der Folge Zeichnungen herstellen, die in kariertes Papier eingetragen werden, wählen wir die Längeneinheit je nach Bedarf bald als den Abstand zweier aufeinander folgender Linien des Netzes, bald als das Doppelte, Zehnfache usw. oder als den zehnten, hunderten Teil usw. dieses Stückes. Wir scheuen uns dabei nicht, ein Meter etwa durch ein Zentimeter darzustellen. Unsere Zeichnung ist dann ein verkleinertes Abbild der eigentlichen Figur, die zu groß ausfallen würde.

Wenn man die Einheit, mit der man alle Größen von einer Art mißt, durch eine neue Einheit ersetzt, die n-mal so groß wie jene ursprüngliche Einheit ist, werden alle Maßzahlen **proportional** verändert[1], d. h. dann verhalten sich die alten Maßzahlen zu den neuen wie n zu 1. Mißt man z. B. die Zeiten statt mittels der Stunde mittels der Minute, so wird jede Zeitangabe 60-mal so groß wie vorher.

Die **Einheit der Zeit** ist die **Stunde** (bezeichnet mit 1^h nach dem lateinischen hora) oder, wenn dies Maß für feinere Beobachtungen unverhältnismäßig groß ist, die **Minute** oder die **Sekunde**.

Wir erwähnen noch einige Größenarten von mathematischer Natur, zunächst die **Flächeninhalte** ebener Figuren. Als Einheit benutzt man die Fläche eines Quadrates, dessen Seitenlänge man zweckmäßig gleich der Längeneinheit, also gleich dem Meter wählt, so daß die Flächeneinheit das **Quadratmeter** ist. Entsprechendes gilt von den **Raumgrößen** oder **Volumen**. Hier wird als Einheit das **Kubikmeter** benutzt. Dieses Maß ist für viele Zwecke zu groß, so daß man oft eine viel kleinere Einheit anwendet, insbesondere den Raum eines Würfels, dessen Kantenlänge ein Dezimeter beträgt, also das **Liter**. Von mathematischen Größenarten wären ferner noch die Winkel zu besprechen. Vorher aber wollen wir einen wichtigen Umstand hervorheben:

Alle Größen einer bestimmten Größenart sind als

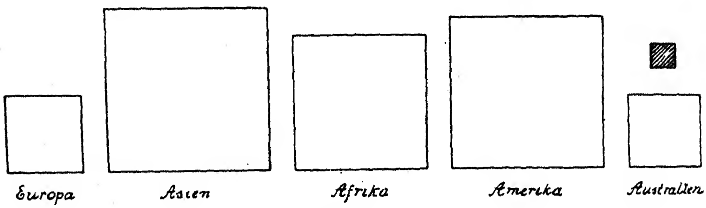


Fig. 1.

[1] Über eine scheinbare Ausnahme sprechen wir auf S. 12.

Strecken darstellbar, sobald man die Einheit der betreffenden Art durch eine Strecke dargestellt hat. Wird z. B. eine Stunde durch ein Zentimeter dargestellt, so bedeuten 3,4 cm der Zeichnung 3,4 Stunden. Das Thermometer zeigt die Temperaturgrade auf seiner Skala geradezu als Strecken. Der Vorteil der Darstellung von Größen durch Strecken liegt darin, daß sich Strecken schon durch den bloßen Anblick leicht ziemlich genau vergleichen lassen. In Fig. 1 haben wir die Flächeninhalte der Erdteile als Inhalte von Quadraten veranschaulicht. Das geschraffte kleine Quadrat bedeutet eine Million qkm. In Fig. 2 sind die Inhalte als Strecken veranschaulicht, wobei die besonders angegebene kleine Strecke zehn Millionen qkm vorstellen soll. Man sieht, daß sich die Flächeninhalte mittels der zweiten Figur viel leichter als mittels der ersten vergleichen lassen.

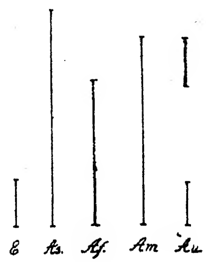


Fig. 2.

Treten mehrere Größenarten auf, so kann man die Einheit einer jeden durch eine beliebig lange Strecke darstellen, also auch verschieden lang. Dies hat seinen Grund darin, daß Größen verschiedener Art überhaupt nicht miteinander vergleichbar sind, jede Art vielmehr nur durch eine Größe ihrer eigenen Art meßbar ist.

Nun wenden wir uns zur Besprechung der Winkel. Der Handwerker benutzt als Einheit den rechten Winkel und spricht von einem halben, drittel usw. rechten Winkel, der Seemann gebraucht eine andere Einheit: Die Windrose hat 32 Striche, so daß ein Strich ein Achtel des rechten Winkels bedeutet. Hier heißt also die Einheit ein Strich. Der Astronom benutzt zu gewissen Zwecken als Winkeleinheit die Stunde, indem er eine naheliegende Vergleichung mit der Zeit heranzieht: Da die Sonne in 24 Stunden scheinbar einen Kreis am Himmel durchläuft, teilt der Astronom den ganzen Umlauf um einen Punkt in 24 gleiche Teile und nennt einen Teil, d. h. also den sechsten Teil des rechten Winkels, eine Stunde. Hier ist mithin die Stunde eine Winkeleinheit und nur scheinbar eine Zeiteinheit. In der niederen Mathematik und ihren Anwendungen benutzt man als Winkeleinheit den Grad (1^0), der durch Zerlegung des rechten Winkels in 90 gleiche Teile entsteht. Den Grad zerlegt man in 60 Minuten ($60'$), jede Minute in 60 Sekunden ($60''$). Minute und Sekunde sind hier wieder nur scheinbar Zeitgrößen, in Wirklichkeit Winkelgrößen.

Gegen die Einheit Grad läßt sich einwenden, daß sie nur durch die Überlieferung begründet ist. Sie ist in der reinen Mathematik häufig unbequem. Allerdings können wir erst später deutlich auseinandersetzen, weshalb. Als vorläufiger Notbehelf möge die folgende Erläuterung dienen:

Wir können die Lagenbeziehungen zwischen verschiedenen Punkten dadurch feststellen, daß wir ihre Entfernungen voneinander, also Längen abmessen. Aber wir können dabei auch, wie es der Feldmesser tut, Winkel benutzen. So ist Gestalt und Größe eines Dreiecks einerseits bestimmt, sobald man die drei Seitenlängen kennt, anderseits aber auch, sobald man eine Seitenlänge und die Größen der beiden anliegenden Winkel kennt. Zwischen Längen und Winkeln müssen demnach Beziehungen bestehen. Auf diese Beziehungen, die der Gegenstand der Trigonometrie sind, gehen wir gegenwärtig nicht ein. Es genügt, die Folgerung zu ziehen, daß es wünschenswert ist, das Messen der Winkel in engere Beziehung zum Messen der Längen zu bringen. Dies geschieht, indem wir einen Winkel AOB (siehe Fig. 3) dadurch bestimmen, daß wir einerseits die Länge des **Radius** OA eines um seinen Scheitel O geschlagenen Kreises und anderseits die Länge des **Bogens** AB abmessen, den der Winkel aus diesem Kreis ausschneidet. Wählen wir den Radius größer, etwa gleich OA', so wird auch der Bogen länger, gleich $A'B'$. Aber die Figuren AOB und $OA'B'$ sind einander ähnlich. Daher ist das Verhältnis $AB:OA$ der Bogenlänge zur Radiuslänge, für einen bestimmt gewählten Winkel immer dasselbe, wie groß auch der Kreisradius sein mag.

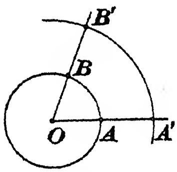


Fig. 3.

Wir messen deshalb einen Winkel AOB durch das Verhältnis der Bogenlänge AB, die der Winkel aus einem beliebigen Kreis um seinen Scheitel O ausschneidet, zur Länge des gewählten Radius OA.

Da es sich nur um das Verhältnis zweier Längenmaße handelt, **ist die Wahl der Längeneinheit ohne Einfluß auf diese Maßzahl** des Winkels. Ob wir mit Meter oder Zoll oder Meile usw. messen, dies Verhältnis wird für einen bestimmten Winkel immer dieselbe Maßzahl ergeben. Diese Maßzahl heißt das **Bogenmaß** des Winkels.

Unter dem Winkel Eins, d. h. unter der **Winkeleinheit** haben wir hiernach denjenigen Winkel AOB zu verstehen, dessen Bogen AB gerade so lang wie der Radius OA ist (siehe Fig. 4). Um ihn zu zeichnen, schlägt man um O irgendeinen Kreis und trägt auf seinem Umfange von einem Punkt A aus den Radius OA als **Bogen** AB ein. Dies geschieht **angenähert** dadurch, daß man OA in eine größere Anzahl von kleinen Teilen zerlegt und diese kleinen Teile als **Sehnen** nacheinander von A aus in den Kreis einträgt. Über die genauere Bestimmung dieses Winkels sprechen

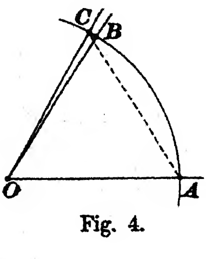


Fig. 4.

wir nachher. Wenn wir den Radius OA nicht als Bogen, sondern als Sehne AC von A aus in den Kreis eintragen, gelangen wir zu einem Punkte C, der augenscheinlich weiter von A entfernt ist als der richtige Punkt B. Da das Dreieck AOC gleichseitig ist, hat der Winkel AOC gerade 60^0. Mithin ist die Winkeleinheit im Bogenmaß etwas kleiner als der Winkel von 60^0.

Was überhaupt bei der Einführung einer neuen Einheit gilt, trifft auch hier zu: Das Bogenmaß b eines Winkels ist zu seinem Gradmaße g proportional. Weil die neue Einheit beinahe 60-mal so groß wie die alte, der Grad, ist, wird die Maßzahl b irgendeines Winkels in dem neuen Bogenmaß etwas mehr als seine Maßzahl g in Graden, dividiert mit 60, ausmachen. Genau: Das Gradmaß des gestreckten Winkels ist 180, und sein Bogenmaß ist gleich dem Verhältnisse des halben Kreisumfanges πr zum Radius r, also gleich π. Wegen der Proportionalität von Gradmaß g und Bogenmaß b muß daher überhaupt für jeden Winkel

$$\frac{g}{b} = \frac{180}{\pi} \tag{1}$$

sein, und hieraus gehen die beiden Formeln hervor:

$$g = \frac{180}{\pi} b\,, \tag{2}$$

$$b = \frac{\pi}{180} g\,. \tag{3}$$

Die erste dient zur Berechnung des Gradmaßes g aus dem gegebenen Bogenmaße b und die zweite zur Berechnung des Bogenmaßes b aus dem gegebenen Gradmaße g.

So einfach diese beiden Formeln sind, sollen sie uns doch noch einige Zeit beschäftigen, indem wir über die Art ihrer praktischen Benutzung sprechen. Die in ihnen auftretende Zahl $\pi = 3{,}141\,592\,65\ldots$ nämlich können wir nur abgerundet in Rechnung stellen, so daß bei der Anwendung der an sich genauen Formeln ein Fehler gemacht wird. Dieser Fehler, der sogenannte absolute Fehler, ist die Differenz zwischen dem durch die angenäherte Formel gewonnenen Wert und dem wirklichen Werte der zu berechnenden Größe. Man muß sich darüber Klarheit verschaffen, um welchen Bruchteil das Ergebnis im ungünstigsten Falle unrichtig sein kann, d. h. wie groß das Verhältnis des absoluten Fehlers zum wahren Werte werden kann. Dies Verhältnis heißt der relative Fehler; das ist der absolute Fehler, jedoch verglichen mit dem wirklichen Werte der zu berechnenden Größe, also dividiert mit dieser Größe. In den beiden vorliegenden Fällen (2) und (3) gestaltet sich nun die Betrachtung so:

Wird statt des wahren Wertes der Zahl π ein Näherungswert π' benutzt, z. B. 3,14 oder 3,142 oder $3\frac{1}{7}$ usw., und ist das Bogenmaß b eines Winkels gegeben, so liefert die Formel, die nun an die Stelle von (2) tritt, nur einen angenähert richtigen Wert für das Gradmaß, nämlich

$$g' = \frac{180}{\pi'} b.$$

Die Differenz zwischen g' und dem in (2) angegebenen richtigen Wert g ist der absolute Fehler:

$$g' - g = \frac{180}{\pi'} b - \frac{180}{\pi} b = 180 \frac{\pi - \pi'}{\pi' \pi} b.$$

Der relative Fehler geht hieraus durch Division mit dem richtigen Wert g hervor. Er ist also:

$$\frac{g' - g}{g} = 180 \frac{\pi - \pi'}{\pi' \pi} \cdot \frac{b}{g},$$

wofür man wegen (1) auch schreiben kann:

$$\frac{g' - g}{g} = \frac{\pi - \pi'}{\pi'}. \tag{4}$$

Wenden wir uns jetzt zur Formel (3), indem wir annehmen, daß das Gradmaß g eines Winkels gegeben sei. Wenn statt π ein Näherungswert π' angewandt wird, ergibt sich für das Bogenmaß des Winkels ein nur angenähert richtiger Wert, nämlich:

$$b' = \frac{\pi'}{180} g.$$

Die Differenz zwischen b' und dem in (3) angegebenen richtigen Wert b ist der absolute Fehler:

$$b' - b = \frac{\pi'}{180} g - \frac{\pi}{180} g = \frac{1}{180} (\pi' - \pi) g.$$

Der relative Fehler geht hieraus durch Division mit dem wahren Wert b hervor und ist daher:

$$\frac{b' - b}{b} = \frac{1}{180} (\pi' - \pi) \cdot \frac{g}{b},$$

wofür man wegen (1) auch schreiben kann:

$$\frac{b' - b}{b} = \frac{\pi' - \pi}{\pi}. \tag{5}$$

Die Zähler der beiden relativen Fehler (4) und (5) haben nur verschiedene Vorzeichen und sind sonst gleich. Die Nenner π' und π weichen wenig voneinander ab. Deshalb stimmen auch die relativen Fehler, abgesehen vom Vorzeichen, nahezu überein. Wenn man z. B. statt π den sehr rohen Näherungswert $\pi' = 3$ benutzt, ist

$$\frac{\pi - \pi'}{\pi'} = \frac{0{,}141\,592\,65\ldots}{3} \text{ und } \frac{\pi' - \pi}{\pi} = -\frac{0{,}141\,592\,65\ldots}{3{,}141\,592\,65\ldots},$$

und diese beiden Werte weichen, abgesehen von ihren verschiedenen Vorzeichen, nur um weniger als 0,05 voneinander ab. Noch viel größer wird die Übereinstimmung, falls man einen besseren Näherungswert π' benutzt. Der bei den Anwendungen der Formel (2) entstehende relative Fehler ist also, abgesehen vom Vorzeichen, fast genau derselbe wie der bei der Anwendung der Formel (3) entstehende, nämlich wie der Wert:

$$f = \frac{\pi' - \pi}{\pi}. \tag{6}$$

Dieser Bruch aber enthält im Zähler den Fehler von π und im Nenner π selbst, ist also nichts anderes als der relative Fehler der statt π benutzten Zahl π'.

Also wird bei den Anwendungen der beiden Formeln (2) und (3) ein relativer Fehler begangen, der, abgesehen vom Vorzeichen, gleich dem relativen Fehler des statt π benutzten Näherungswertes ist. Wenn man z. B. die Zahl π bis auf höchstens 1% falsch wählt, werden auch die Ergebnisse der Formeln (2) und (3) höchstens um 1% falsch ausfallen.

Übrigens sind die in (2) und (3) vorkommenden Brüche $180 : \pi$ und $\pi : 180$ auf vier Dezimalstellen abgerundet diese:

$$\frac{180}{\pi} = 57{,}2958, \quad \frac{\pi}{180} = 0{,}0175. \tag{7}$$

Wir erlauben uns hier die Anmerkung, daß es Sache des Lesers ist, diese Behauptung auf ihre Richtigkeit hin zu untersuchen!

1. Beispiel: Auf Grund der Formel (2) soll das Gradmaß g eines Winkels, der nicht größer als ein rechter ist, bis auf die Sekundenzahl genau berechnet werden. Welcher Näherungswert darf dabei für π benutzt werden? Der gesuchte Winkel beträgt höchstens 90° oder $324000''$; gestattet ist ein Fehler von höchstens $\frac{1}{2}''$, d. h. der relative Fehler darf höchstens gleich

$$\frac{0{,}5}{324\,000} = 0{,}000\,001\,5\ldots$$

sein. Dies sind rund $1\frac{1}{2}$ Milliontel. Daher genügt es, statt π einen Näherungswert zu verwenden, der um nicht mehr als $1\frac{1}{2}$ Milliontel der Zahl π oder also um nicht mehr als 0,000 004 7... von π abweicht. Ein derartiger Wert ist 3,141 59. Mithin gibt die Formel

$$g = \frac{180}{3{,}141\,59}\, b$$

das Gradmaß g eines Winkels, der nicht größer als ein rechter ist, genau bis auf die Sekundenzahl.

2. Beispiel: Wieviel Grad, Minuten und Sekunden hat die Winkeleinheit, d. h. der Winkel vom Bogenmaß Eins? Wir sahen schon oben, daß die Gradzahl ein

wenig kleiner als 60 ist (siehe Fig. 4, S. 6). Auf Grund des ersten Beispiels ergibt sich die Gradzahl

$$\frac{180}{3{,}14159} = 57\frac{92937}{314159}.$$

Der Überschuß über 57° beträgt, in Minuten ausgedrückt:

$$\frac{92937 \cdot 60}{314159} = 17\frac{235517}{314159},$$

der Überschuß über 17′, in Sekunden ausgedrückt:

$$\frac{235517 \cdot 60}{314159} = 4\bar{5}$$

Hierbei deutet der Strich über der 5 an, daß die Zahl nach oben abgerundet ist. Die Winkeleinheit hat also 57° 17′ $4\bar{5}$″. Wie hängt dieser Wert mit der ersten Zahl in (7) zusammen?

3. Beispiel: Das Bogenmaß von 1° soll berechnet werden, indem man π durch den Näherungswert $3\frac{1}{7}$ ersetzt. Zugleich soll man den Fehler abschätzen. Die Formel (3) gibt, wenn man darin $\pi = 3\frac{1}{7}$ und $g = 1$ setzt, das Bogenmaß 0,0174603 ... Da $3\frac{1}{7}$ von π um weniger als $\frac{1}{24}$% abweicht, ist auch dieser Wert bis auf $\frac{1}{24}$% genau, woraus man schließt, daß das Bogenmaß von 1° auf vier Dezimalstellen abgerundet den Wert 0,0175 hat, der schon in (7) vorkam.

Um das Umrechnen von Gradmaß in Bogenmaß und umgekehrt zu erleichtern, hat man eine Tafel hergestellt, die zu jeder ganzen Gradzahl, Minutenzahl und Sekundenzahl das Bogenmaß angibt. Man findet sie in den Sammlungen von Logarithmentafeln unter der Überschrift: „Länge der Kreisbogen für den Halbmesser Eins". Zur Erklärung dieser Überschrift sei bemerkt: Da das Bogenmaß gleich dem Verhältnis aus dem Bogen zum Radius ist, folgt:

Das Bogenmaß eines Winkels ist gleich der Länge des Bogens, den der Winkel aus einem Kreise vom Radius Eins um seinen Scheitel ausschneidet.

Diese Aussage dient dazu, daß man sich mit Leichtigkeit die Beziehung zwischen Bogenmaß und Gradmaß merkt: Da der Kreis vom Radius Eins den Umfang 2π hat, gehört zu 4 rechten Winkeln das Bogenmaß 2π, also zu 180° das Bogenmaß π. Wenn wir künftig von den Winkeln π, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{6}\pi$ usw. sprechen, braucht der Leser nur π durch 180 zu ersetzen, um die Gradmaße 180°, 90°, 60°, 45°, 30° usw. dieser Winkel vor Augen zu haben. Es ist nützlich, sich daran zu gewöhnen, statt von einem rechten Winkel von dem Winkel $\frac{1}{2}\pi$ zu sprechen. Man wird nämlich später erkennen, daß die Benutzung des Bogenmaßes keine Spielerei ist, wie der Anfänger denken könnte; vielmehr wird man dazu geradezu gezwungen. Der Leser möge das Vertrauen haben, daß wir keine für ihn nutzlosen mathematischen Übungen anstellen.

Unsere Tafel I im Anhange gibt einen kurzen Auszug aus der vorhin erwähnten Tafel. Darin ist für 1 bis 9 Grad, für 1 bis 9 Minuten und für 1 bis 9 Sekunden das Bogenmaß auf fünf Dezimalstellen abgerundet angegeben. Querstriche über den letzten Ziffern bedeuten, daß die Zahlen nach oben abgerundet sind.

4. Beispiel: Wie groß ist das Bogenmaß von 27° 36′ 45″? Die Tafel I gibt das Schema:

$$\begin{array}{l|l}
20^\circ = 2^\circ \cdot 10 & 0{,}349\overline{1} \\
7^\circ & 0{,}122\overline{2} \\
30' = 3' \cdot 10 & 0{,}0087 \\
6' & 0{,}0017 \\
40'' = 4'' \cdot 10 & 0{,}000\overline{2} \\
5'' & 0{,}0000 \\
\hline
 & 0{,}4819
\end{array}$$

Daß wir bis auf höchstens vier Dezimalstellen abrunden müssen, ist klar. Wir mußten die Zahl $0{,}0017\overline{5}$ auf 0,0017 abrunden, nicht auf 0,0018, weil ja die 5 eigentlich zu groß ist. Von den letzten Dezimalen der Zahlenreihe sind drei zu groß, drei zu klein. Es ist also wahrscheinlich, daß sich die Fehler ziemlich ausgleichen, d. h., daß das Ergebnis 0,4819 auch in der vierten Dezimalstelle richtig ist. Sicher ist nur, daß das Ergebnis zwischen $0{,}4819 - 3 \cdot 0{,}00005$ und $0{,}4819 + 3 \cdot 0{,}00005$, also zwischen 0,48175 und 0,48205 liegt, so daß wir nur auf drei Dezimalstellen 0,482 abrunden dürften. Praktisch aber wird der Wahrscheinlichkeitsschluß genügen. In der Tat gibt genauere Berechnung und Abrundung auf fünf Dezimalstellen 0,48193.

5. Beispiel: Aus einem Kreise von 3,400 m Radius[1] soll ein Zentriwinkel von 27° 36′ 45″ ausgeschnitten werden. Wie lang ist der zugehörige Bogen? Er ist gleich dem soeben gefundenen Bogenmaß 0,4819, multipliziert mit dem Radius 3,400. Wir benutzen abgekürzte Multiplikation, da es nur auf vier Dezimalstellen ankommt:

$$\begin{array}{l}
0{,}4819 \cdot 3{,}400 \\
\hline
1{,}4457 \\
\quad 1928 \\
\hline
1{,}6385 \text{ m.}
\end{array}$$

6. Beispiel: Eine Kreisscheibe von 0,230 m Radius soll 200 Zähne bekommen. Wie lang ist der Bogen eines jeden Zahns? Die Summe der Zähne und Zahnlücken ist 400. Der zu einem Zahn gehörige Zentriwinkel ist im Gradmaß gleich $360^\circ : 400 = 0{,}9^\circ = 54'$. Nach Tafel I ist das zugehörige Bogenmaß 0,0157. Also ist zu rechnen:

$$\begin{array}{l}
0{,}0157 \cdot 0{,}230 \\
\hline
0{,}0031 \\
\qquad 5 \\
\hline
0{,}0036 \text{ m, abgerundet } 0{,}00\overline{4} \text{ m.}
\end{array}$$

Zum Schlusse machen wir darauf aufmerksam, daß es Größen gibt, die negative Maßzahlen haben. Allerdings, die Länge eines Metallstabes z. B. können wir uns nicht negativ vorstellen. Han-

[1] Wird eine Zahl in der Form 3,400 statt 3,4 angegeben, so soll dies heißen, daß sie auf drei Dezimalstellen abgerundet genau ist.

delt es sich aber nicht um die Größe eines greifbaren Gegenstandes, so kann die Maßzahl sehr wohl negativ sein, z. B. die Höhe eines Punktes über der Meeresoberfläche. Minus 4 m Meereshöhe bedeutet eben 4 m Tiefe unterhalb der Meeresoberfläche. Hat ein Punkt die Höhe a m und ein anderer die Höhe b m über dem Meer, so liegt der erste Punkt stets $(a-b)$ m höher als der zweite, wobei es ganz gleichgültig ist, ob a oder b oder beide negativ sind. Wenn nämlich das Ergebnis $a-b$ negativ wird, bedeutet dies, daß der erste Punkt tiefer als der zweite liegt. Wenn z. B. der erste Punkt 4 m unter der Meereshöhe und der zweite 7 m über der Meereshöhe liegt, ist $a = -4$, $b = +7$, also $a-b = -4-7 = -11$, d. h. der erste Punkt liegt 11 m tiefer als der zweite. Wenn man die Zeit vom Beginn eines physikalischen Vorganges an mißt und dann zu davor liegenden Zeiten zurückgreifen muß, rechnet man sie bekanntlich negativ. In der Weltgeschichte braucht man statt des Pluszeichens und Minuszeichens bei Zeitangaben in Jahren die Bezeichnungen vor und nach Christi Geburt. Man spricht auch von negativen Temperaturen. Man bezeichnet mit 0° Wärme eine ziemlich willkürlich gewählte Temperatur, so nach Celsius und Réaumur die des schmelzenden Schnees, nach Fahrenheit dagegen die einer gewissen Mischung aus Eis und Salmiak. Temperaturen unterhalb des Nullpunktes werden negativ in Rechnung gesetzt. Auch hier ist es stets richtig, daß der Unterschied zweier Temperaturen gleich der Differenz ihrer Gradzahlen ist, ganz gleichgültig, ob die Gradzahlen positiv oder negativ sind. Die Willkür bei der Wahl des Nullpunktes zeigt aber, daß es unsinnig ist, zu sagen, daß 80° C. eine doppelt so hohe Temperatur als 40° C. sei, denn in Fahrenheit sind dies 176° und 104°. Man darf höchstens sagen: Der Temperaturunterschied von 80° C. und von schmelzendem Eis ist doppelt so groß wie der von 40° C. und von schmelzendem Eis, d. h. man muß auf den willkürlich gewählten Nullpunkt Bezug nehmen.

Wenn wir auf S. 4 sagten, daß die Maßzahlen einer Größenart, sobald man eine neue Einheit einführt, zu den alten Maßzahlen proportional sind, so gilt dies, wie das Beispiel der Temperaturen zeigt, nur unter der Einschränkung, daß bei beiden Arten der Messung von demselben Nullpunkt ausgegangen wird. So sind die Celsiusangaben zu den Réaumurangaben proportional — sie verhalten sich zueinander wie 5 zu 4 —, dagegen nicht zu den Fahrenheitangaben.

§ 3. Konstanten, Veränderliche, Funktionen.

Erfahrung hat den Menschen gelehrt, zwischen den mannigfaltigen in der Natur auftretenden Größen verborgene gesetzmäßige Beziehungen

zu vermuten. Diese Überzeugung findet ihren Ausdruck darin, daß man sagt, jede bestimmte Ursache rufe bestimmte Wirkungen hervor. Wir haben die feste Vorstellung, daß die anorganische (leblose) Natur an sich keine Willkür duldet, daß vielmehr mit Notwendigkeit aus jedem bestimmten Geschehnisse nach Gesetzen bestimmte neue Geschehnisse hervorgehen. Auch auf einen großen Teil der Erscheinungen im Gebiete der organischen (lebenden) Natur erstreckt sich diese Vorstellung, so weit nicht die willkürlichen Lebensäußerungen mit ins Spiel kommen.

Jene verborgenen Gesetze zu erkennen und auszunutzen, ist die Aufgabe der Naturforschung und der Technik.

Bei den Naturerscheinungen treten meistens vielerlei Größen auf, so daß es schwer fallen würde, die unbekannten Zusammenhänge zu ergründen, wenn man nicht imstande wäre, die Wirkungen einzelner Naturgesetze gewissermaßen auszusondern. Dies geschieht durch den Versuch oder das Experiment, wobei man dafür sorgt, die meisten Größen durch geeignete Vorkehrungen bei bestimmten Werten zu erhalten, so daß sich dann nur noch wenige zu ändern vermögen. Will man z. B. erkennen, wie Temperaturänderungen auf das Volumen eines Gases einwirken, so sorgt man dafür, daß die Spannung des Gases immer dieselbe bleibt, da ja auch die Spannung wesentlich auf das Volumen des Gases einwirkt. Will man das Gesetz der Schwere untersuchen, indem man den freien Fall beobachtet, so muß man daran denken, daß dies Gesetz an verschiedenen Stellen der Erde verschieden sein wird. Man muß daher die Untersuchung zunächst an einem bestimmten Ort, d. h. für eine bestimmte geographische Länge und Breite anstellen. Man sorgt also dafür, daß eine Reihe von vorkommenden Größen während des Versuches unverändert bleiben. Sie heißen Konstanten. Natürlich kann man nachher, indem man weitere Versuche anstellt, diese Größen sich doch wieder ändern lassen. Eine Größe heißt eben konstant nur insofern, als sie sich während der gerade im Gang befindlichen Untersuchung oder Überlegung nicht ändert.

Sorgen wir dafür, daß sich nur einige Größen ändern können, so sind sie die einzigen Veränderlichen der Aufgabe. Bei einer Versuchsreihe, die dazu dienen soll, ein verborgenes Naturgesetz herauszubringen, spielen nun diese Veränderlichen zwei wesentlich verschiedene Rollen. Man kann nämlich einigen Größen während der Versuche nach und nach verschiedene bestimmt gewählte Werte erteilen und dann durch die Versuche feststellen, welche Werte der übrigen veränderlichen Größen daraus folgen. Wenn man z. B. die Wechselwirkung zwischen Volumen, Temperatur und Spannung einer Gasmenge feststellen will, kann man zunächst etwa die Temperatur durch ein Wasser-

bad konstant erhalten, so daß nur zwei Veränderliche, das Volumen und die Spannung, verbleiben. Gibt man nun dem Volumen nach und nach verschiedene bestimmte Werte, so ziehen sie verschiedene bestimmte Werte der Spannung nach sich. Da man das Volumen ganz nach eigenem Ermessen verschiedenartig wählen kann, heißt es hier die unabhängige Veränderliche. Die zugehörige Spannung dagegen, die man beobachtet, heißt die abhängige Veränderliche. Man kann aber auch den Versuch insofern verwickelter gestalten, als man nicht nur dem Volumen, sondern auch der Temperatur nach und nach verschiedene bestimmte Werte gibt. Dann zeigt sich, daß zu jedem bestimmten Volumen und zu jeder bestimmten Temperatur eine bestimmte Spannung des Gases gehört. Hier also sind das Volumen und die Temperatur zwei unabhängige Veränderliche, während die Spannung die einzige abhängige Veränderliche ist.

Wie in diesen Beispielen zerfallen bei allen Versuchen die Veränderlichen in zwei verschiedene Klassen. Die Größen der einen Klasse kann man durch geeignete Vorkehrungen nach und nach auf verschiedene irgendwie gewählte bestimmte Werte bringen, während die Größen der anderen Klasse durch die Wahl jener vollkommen bedingt werden, da sich ihre Werte durch den Versuch ergeben, ohne daß man selbst noch irgendwelchen bestimmenden Einfluß darauf hat. Die Größen der ersten Klasse heißen die unabhängigen Veränderlichen, die der zweiten die abhängigen Veränderlichen.

Zunächst wollen wir — und zwar für ziemlich lange Zeit — gesetzmäßige Beziehungen zwischen nur zwei veränderlichen Größen betrachten. Erst viel später nehmen wir ihrer mehrere an.

Unsere Ausdrucksweise: gesetzmäßige Beziehung zwischen zwei veränderlichen Größen ist allerdings vorerst noch nicht scharf mathematisch erklärt. Ehe wir dazu übergehen, empfiehlt sich die Betrachtung einiger Beispiele.

1. Beispiel: Wird 1 cdm Wasser von 4° C. erwärmt oder abgekühlt, so wird sein Volumen größer. Doch ist der Überschuß über 1 cdm so gering, daß wir ihn in Kubikzentimetern ausdrücken. Er beträgt nämlich bei

	ccm		ccm		ccm
0°	0,13	8°	0,11	16°	0,99
2°	0,03	10°	0,25	18°	1,35
4°	0,00	12°	0,45	20°	1,74
6°	0,03	14°	0,70		

Diese Tafel wird übersichtlicher, wenn wir sie durch eine Figur veranschaulichen. Auf kariertem Papier ziehen wir (siehe Fig. 5) eine der wagerechten Linien stärker aus und bringen auf ihr eine Skala an, indem wir von einem Punkt, dem Nullpunkt O, ausgehend in immer gleichen, übrigens beliebig wählbaren Abständen die Bezeichnungen 1°, 2°, 3°... eintragen oder wenigstens, wenn das vollständige Einschreiben

die Skala undeutlich macht, angemessen andeuten. Die Strecke von O bis zum Punkt einer dieser Zahlen soll die Temperatur darstellen, z. B. OA die Temperatur von 8°. Von den Marken 0°, 2°, 4° ... 20° aus tragen wir auf den lotrechten Linien Strecken auf, die uns die oben angegebenen Kubikzentimeter versinnlichen. Dabei kann die Strecke, die 1 ccm bedeutet, beliebig lang gewählt werden. Am bequemsten ist es, die lotrechte Gerade durch O von diesem Punkt aus in gleichen Abständen mit den Bezeichnungen 0,1 ccm, 0,2 ccm usw. zu versehen, also die Skala der Kubikzentimeter anzugeben oder wenigstens anzudeuten. Nun geht das Eintragen rasch vonstatten. Die Strecke AB z. B. bedeutet 0,11 ccm. Unsere Tafel liefert uns so elf Punkte; man ist von vornherein nicht überrascht durch die Regelmäßigkeit, in der sie aufeinander folgen. Ja man erwartet, daß, wenn noch mehr Angaben vorliegen, also jener Volumenüberschuß auch für andere zwischen 0° und 20° gelegene Temperaturen durch Versuche bestimmt ist, sich die zugehörigen Bildpunkte so in die Reihe der elf Punkte einordnen, daß die Regelmäßigkeit noch stärker hervortritt. Man vermutet also, daß alle zwischen 0° und 20° gelegenen Temperaturen solche Volumenüberschüsse ergeben, für die die Bildpunkte in der Figur eine gewisse stetig fortschreitende krumme Linie oder Kurve liefern. Diese Kurve ist das geometrische Abbild der gesetzmäßigen Beziehung zwischen der Temperatur und der Volumenvergrößerung, die ein cdm Wasser von 4° C. erfährt, sobald seine Temperatur geändert wird.

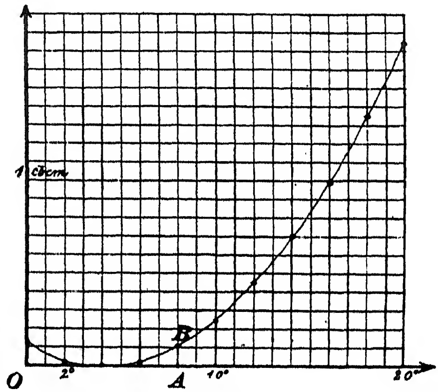


Fig. 5.

Entsprechendes wie in diesem Beispiele wird man immer erwarten, sobald man die Überzeugung gewonnen hat, daß eine Größe gesetzmäßig von einer anderen abhängt.

Ganz andere Verhältnisse liegen im folgenden Beispiele vor:

2. Beispiel: Auf Grund zahlreicher Messungen hat ein Forscher die mittlere Körperlänge von männlichen Personen in Mitteldeutschland für die Lebensalter von 0 bis zu 20 Jahren wie folgt festgestellt:

Jahre	cm	Jahre	cm	Jahre	cm
0	50	7	110½	14	147
1	71	8	116	15	152
2	80	9	122	16	156
3	87	10	128	17	162
4	93	11	133½	18	166
5	99	12	137½	19	167
6	105	13	142	20	168

Ein anderer Forscher hat dagegen in Belgien folgende mittlere Zahlenwerte gefunden:

Jahre	cm	Jahre	cm	Jahre	cm
0	50,0	7	110,4	14	146,9
1	69,8	8	116,2	15	151,3
2	79,1	9	121,8	16	155,4
3	86,4	10	127,3	17	159,4
4	92,7	11	132,5	18	163,0
5	98,7	12	137,5	19	165,5
6	104,6	13	142,3	20	167,0

Man sieht, daß der erste Forscher auf halbe, der zweite auf zehntel Zentimeter abgerundet hat. Beide Tafeln führen wir uns graphisch vor Augen, indem wir auf

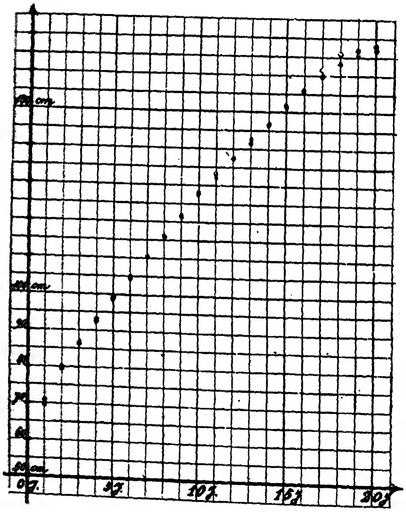


Fig. 6.

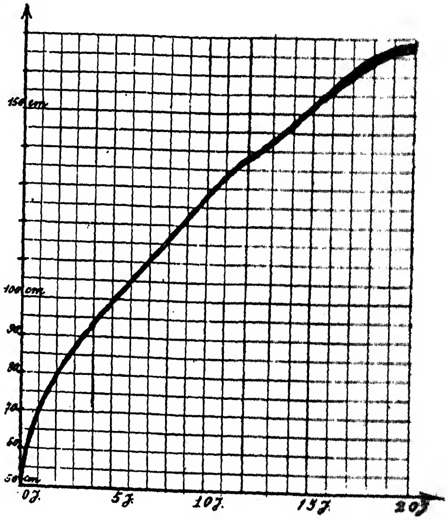


Fig. 7.

kariertem Papier eine Skala für die Jahre wagerecht und eine für die Zentimeter senkrecht herstellen. Da die Körpergrößen mit 50 cm beginnen, werden wir, um Platz zu sparen, die cm-Skala mit 50 zu zählen anfangen. Die Einheiten der Skalen kann man beliebig annehmen. Unsere Fig. 6 enthält die Wertepaare beider Tafeln, dargestellt durch kleine leere bzw. gefüllte Kreise, deren Höhen die Zentimeter über 50 angeben. Man sieht, daß beide Tafeln nur geringfügig voneinander abweichen. Über diese Abweichungen wird man nicht überrascht sein. Man wird zwar vermuten, daß andere Forscher auf Grund von Messungen wieder andere Ergebnisse finden werden. Aber man ist darauf gefaßt, daß neue Ergebnisse doch nicht allzusehr von den mitgeteilten abweichen werden. Will man sich ein Bild von der mittleren Körpergröße männlicher Personen in Mitteleuropa in den Jahren von 0 bis 20 machen, so wird man, da man Schwankungen bei der Art dieses Beispiels voraussieht, nicht

wie im vorigen Beispiel eine feine Kurve ziehen, sondern vielmehr eine Linie von solcher Stärke, daß ihre Breite einen Spielraum läßt, der den Schwankungen vermutlich gerecht werden wird. So gelangt man zu Fig. 7. Hier also wird die gesetzmäßige Beziehung nicht durch eine Kurve, sondern durch einen Kurvenstreifen bildlich zum Ausdrucke gebracht.

Kurvenstreifen statt scharfer, feingezogener Kurven wird man überall da erwarten, wo die gesetzmäßige Beziehung zwischen den beiden betrachteten Größen von organischen Ursachen abhängt, ferner da, wo man nur Mittelwerte aus Beobachtungen benutzt, was beides hier der Fall ist.

Wieder etwas anderes bietet das folgende

3. Beispiel: Ein Schnellzug von Luzern über die Gotthardbahn nach Chiasso hält unterwegs an fünf Stationen. In der folgenden Tafel sind statt der Namen der

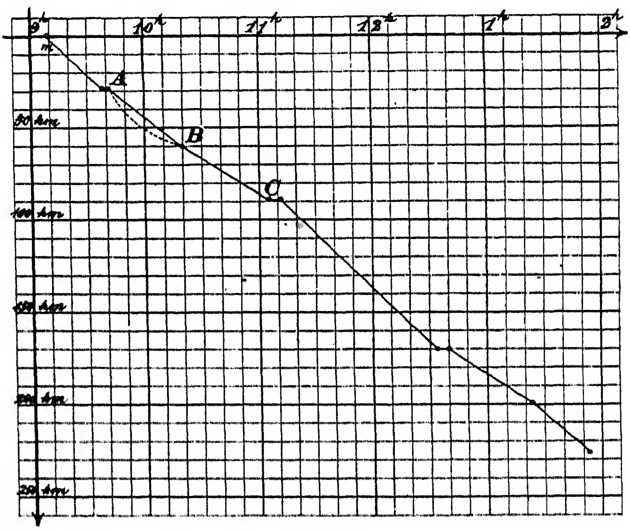


Fig. 8.

Stationen ihre Entfernungen von Luzern in Kilometern angegeben sowie die Zeiten, zu denen der Zug an den betreffenden Stellen ist:

km	0	28	60	89	170	199	225
Zeit	$9^h\,8$	$9^h\,37$—42	$10^h\,20$	$11^h\,5$—13	$12^h\,34$—40	$1^h\,24$	$1^h\,54$

Auch hier können wir die graphische Darstellung benutzen, indem wir eine wagerechte Zeitskala und eine lotrechte Kilometerskala zeichnen und nun diejenigen Punkte eintragen, die den Zeiten und Kilometern entsprechen. So geht Fig. 8 hervor. Wir haben die Kilometerskala lotrecht nach unten angebracht, weil der Zug von Nord nach Süd — im großen ganzen — fährt und wir gewohnt sind, diese Richtung nach unten zu zeichnen. Die kleinen wagerechten Striche entsprechen den kurzen Aufenthalten auf den Stationen, denn z. B. zu allen Zeiten zwischen $11^h\,5$ und $11^h\,13$

hat der Zug, da er rastet, die Entfernung 89 km von der Ausgangsstation. Das Kursbuch gibt uns keinen Aufschluß darüber, wie schnell der Zug zwischen den Stationen fährt. Wir können also z. B. nur sagen, daß von $9^h 42$ bis $10^h 20$ die Kilometerzahl beständig zunimmt und zwar von 28 bis 60. Dies könnten wir graphisch durch irgendeine von der Stelle A bis zur Stelle B beständig nach rechts unten laufende Kurve wie z. B. die punktierte zum Ausdruck bringen. In Ermangelung genauer Angaben ziehen wir die einfachste Linie zwischen je zwei bestimmten Punkten, nämlich die Gerade[1]. So kommen wir hier dazu, eine gesetzmäßige Beziehung durch eine gebrochene Linie darzustellen. Das Gesetz ist nicht in der Natur gegeben, sondern durch Vorschriften der Eisenbahnverwaltung. Übrigens sei nebenbei bemerkt, daß sich aus der Art der gebrochenen Linie deutlich erkennen läßt, zwischen welchen Stationen der Zug besonders langsam fährt, nämlich zwischen den zu B und C gehörigen Stationen (während des Aufstieges zur Höhe des Gebirges).

Diese drei Beispiele, zu denen der Leser selbst noch viele hinzufügen kann, zeigen drei Arten der graphischen Darstellung des gesetzmäßigen Zusammenhanges zwischen zwei veränderlichen Größen, nämlich durch eine Kurve, einen Kurvenstreifen und eine gebrochene Linie. Aber auch im zweiten und dritten Fall, wo das Gesetz der Sachlage nach nicht scharf sein kann, ließe sich der Verlauf der Erscheinung mit großer Annäherung durch eine einzige Kurve wiedergeben, da wir sowohl in Fig. 6 als auch in Fig. 8 leicht eine Kurve einzeichnen können, die durch die angegebenen Punkte geht oder ihnen sehr nahe kommt.

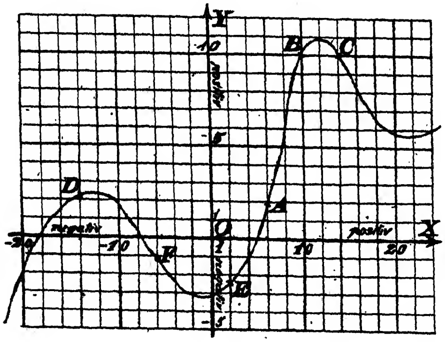


Fig. 9.

Umgekehrt: Zeichnen wir in kariertes Papier zwei Werteskalen OX und OY ein, die eine wagerecht, die andere lotrecht, wobei wir für jede die Einheit irgendwie wählen — siehe Fig. 9 —, und ziehen wir aufs Geratewohl irgendeine von links nach rechts fortschreitende krumme Linie, so gibt uns diese Kurve eine gesetzmäßige Beziehung zwischen zwei veränderlichen Größen. Diese Größen wollen wir x und y nennen. Zu jedem Punkt der Kurve gehört nämlich ein bestimmter Zahlenwert der einen Skala und ein bestimmter Zahlenwert der anderen, und diese Werte sind zueinander gehörige Werte von x und y. In unserer Figur gehört z. B. zu $x = 6$ der Wert $y = 1{,}8$ (siehe Punkt A), zu

[1] Dies ist, wie wir im zweiten Kapitel sehen werden, die richtige Darstellung, wenn der Zug zwischen beiden Stationen überall die gleiche Geschwindigkeit hat.

$x = 10$ der Wert $y = 10$ (siehe Punkt B), zu $x = 14$ der Wert $y = 10$ (siehe Punkt C) usw. Allerdings sind die Werte nur so genau abzulesen, als es die Zeichnung erlaubt. Auch zu negativen Werten von x können Werte von y gehören. Die negativen Werte von x lesen wir auf der linken Seite der von dem Punkt O ausgehenden x-Skala ab. So gehört zu $x = -14$ der Wert $y = 2,3$ (siehe Punkt D). Ferner ist für $x = 2$ der zugehörige Kurvenpunkt unterhalb der x-Skala gelegen, d. h. zu diesem Wert von x gehört ein negativer Wert von y, nämlich $y = -2,4$ (siehe Punkt E). Es kann auch vorkommen, daß zu negativen Werten von x negative Werte von y gehören; z. B. zum Punkt F gehört $x = -6$ und $y = -1,2$.

Zusammengefaßt: Auf beiden Skalen setzen wir eine positive und eine negative Richtung fest. Dann wird durch irgendeine von links nach rechts gezogene Kurve eine gesetzmäßige Beziehung zwischen zwei veränderlichen Größen x und y festgelegt. Zusammengehörige Wertepaare ergeben sich, wenn man durch einen beliebigen Punkt P der Kurve die Parallelen zu den Skalen zieht und die Zahlenwerte abliest, die sie auf den Skalen abschneiden. Dabei gilt das Vorzeichen + oder —, je nachdem der Schnittpunkt mit der Skala auf der positiven oder negativen Hälfte der Skala liegt. Die Kurve bestimmt also ein Gesetz zwischen x und y und zwar mit der Genauigkeit, mit der wir die Zahlenwerte der Skalen ablesen können.

So haben wir zunächst auf graphischem Weg eine Möglichkeit, gesetzmäßige Beziehungen zwischen zwei veränderlichen Größen festzustellen. Ihr haftet der Mangel an, daß diese Feststellung nur angenähert ist, da jede Figur nur angenähert einer Figur entspricht, in der die geraden Linien und Kurven wirklich ohne Dicke sind. Dagegen hat dies Verfahren den Vorzug, ein Gesetz anschaulich zu machen.

Nun können wir schließlich auch auf rechnerischem Wege gesetzmäßige Beziehungen zwischen zwei veränderlichen Größen x und y herstellen, die den erwähnten Mangel nicht haben, aber auch nicht die große Anschaulichkeit. Dies geschieht dadurch, daß wir eine Gleichung ansetzen, auf deren linker Seite nur y steht, auf deren rechter Seite dagegen eine Formel steht, in der y nicht vorkommt, wohl aber x.

4. **Beispiel:** Wir nehmen die Gleichung an:

$$y = \tfrac{1}{10}(x^2 - 4x + 2).$$

Sie bestimmt ein Gesetz. Wie wir nämlich die Größe x wählen mögen, immer gibt uns diese Gleichung dazu einen Wert von y. Setzen wir z. B. $x = 5$, so liefert die Gleichung $y = \frac{1}{10}(25 - 20 + 2) = 0,7$. In folgender Übersicht haben wir für x nacheinander eine Reihe von Werten beliebig gewählt und mittels der angenommenen Gleichung die zugehörigen Werte von y berechnet:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	3,4	2,3	1,4	0,7	0,2	$-0,1$	$-0,2$	$-0,1$	0,2	0,7

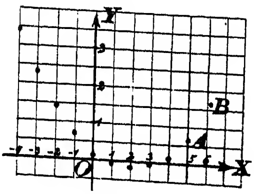


Fig. 10.

In Fig. 10 haben wir auf Grund zweier Skalen die zugehörigen Punkte eingezeichnet; so gehört der Punkt A zu $x = 5$ und $y = 0,7$. Offenbar können wir beliebig viele Wertepaare aus der angenommenen Gleichung ermitteln. Wir haben soeben nur ganzzahlige Werte von x herausgegriffen. Das ist nicht nötig, zu $x = 6,3$ z. B. gehört $y = 1,649$; dies Wertepaar gibt den Punkt B. Man kann hierbei die Beobachtung machen: Je mehr Wertpaare man berechnet, um so enger ketten sich die zugehörigen Bildpunkte regelmäßig aneinander.

Haben wir wie hier eine bestimmte Gleichung angenommen, so gehört zu jedem Wert von x ein Wert von y, der g a n z g e n a u, also nicht nur angenähert, berechnet werden kann. In den früheren Beispielen, die der Beobachtung entnommen waren, ist dies nirgends der Fall gewesen. Die Betrachtung der Fig. 10 läßt uns wieder deutlich einen Kurvenzug als das geometrische Bild des angenommenen Gesetzes erkennen.

Der Leser sollte derartige Beispiele selbst erfinden und betrachten. Wir geben noch einige:

5. **Beispiel:** Wir wollen die Gleichung annehmen:

$$y = x + \frac{1}{x}.$$

Sie stellt ein Gesetz dar, nach dem zu irgendeinem Wert von x ein Wert von y gehört. Im folgenden ist eine Reihe von zusammengehörigen Werten angegeben:

x	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4
y	$-4\frac{1}{4}$	$-3\frac{1}{3}$	$-2\frac{1}{2}$	-2	2	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$	$4\frac{1}{4}$

Wählt man x nahe bei Null, z. B. $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots$, so wird y ziemlich groß, da dann $1 : x$ recht groß wird. Wir haben hier die Wertepaare:

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$
y	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$	$4\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{5}$	$-2\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{3}$	$-4\frac{1}{4}$	$-5\frac{1}{5}$

Wird x außerordentlich nahe bei Null angenommen, so wird y außerordentlich groß, für $x = 0,001$ kommt $y = 1000,001$, für $x = 0,000001$ kommt $y = 1000000,000001$ usw. Dies zeigt: rücken wir mit dem Wert von x immer näher an Null heran, so wird y immer größer. Ist x negativ, aber sehr nahe bei Null, so wird y auch einen sehr großen Zahlenwert haben, der aber mit dem Minuszeichen versehen ist, z. B. für $x = -0,001$ kommt $y = -1000,001$. Wenn man dagegen x recht groß wählt, wird $1 : x$ recht klein. Je größer x wird, um so weniger unterscheidet sich also y von x. Dies gilt auch, wenn x sehr große, aber mit dem Minuszeichen behaftete Werte hat. So kommt z. B.:

x	10	100	1000	-10	-100	-1000
y	10,1	100,01	1000,001	$-10,1$	$-100,01$	$-1000,001$

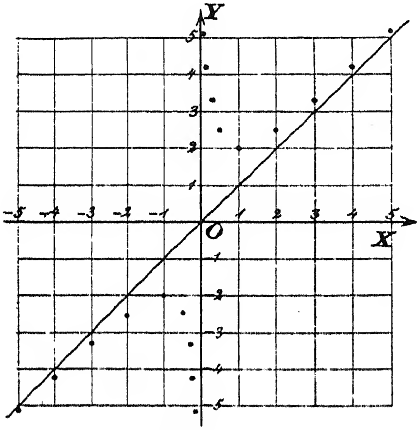


Fig. 11.

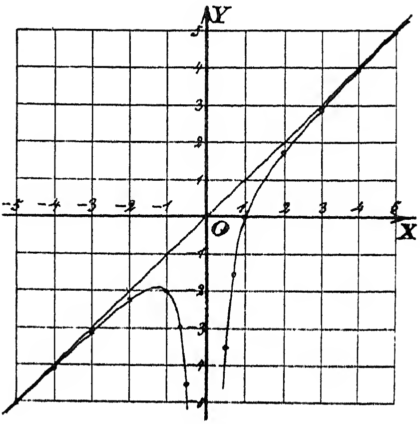


Fig. 12.

Stellen wir uns eine Zeichnung her, indem wir in der Fig. 11 eine wagerechte x-Skala OX und eine lotrechte y-Skala OY benutzen, so werden manche Wertepaare, weil zu groß, gar nicht in die Figur hineinpassen. Immerhin aber erkennt man, daß den Wertepaaren Punkte entsprechen, die eine regelmäßige Folge aufweisen, wobei zwei Erscheinungen besonders auffallen. Erstens: die Punkte, deren x sehr nahe bei Null liegt und positiv ist, liegen sehr hoch, dagegen die Punkte, deren x sehr nahe bei Null liegt und negativ ist, sehr tief. Zweitens: die Punkte, deren x sehr groß ist, ob mit $+$ oder $-$ versehen, liegen so, daß der Zahlenwert ihres y ungefähr so groß wie der ihres x ist. Wenn wir wie in Fig. 11 die Einheiten beider Skalen einander gleich wählen, was wir ja tun dürfen, so bedeutet diese zweite Beobachtung augenscheinlich: die Punkte, die zu großen Werten von x gehören, liegen beinahe auf derjenigen Geraden, die den rechten Winkel der positiven x-Skala und der positiven y-Skala in gleiche Teile zerlegt und fortgesetzt ebenso den rechten Winkel der negativen x-Skala und der negativen y-Skala teilt. Man kann sich leicht einen Kurvenzug vorstellen, der durch die gezeichneten Punkte geht. Er schmiegt sich rechts und links mehr und mehr an diese Gerade an. In der Nähe der y-Skala jedoch entfernt er sich weiter von dieser Geraden und macht Biegungen, um sich mehr und mehr der y-Skala anzuschmiegen. Der ganze Kurvenzug besteht aus zwei getrennten Teilen, von denen der eine die y-Skala in unendlicher Ferne unten und der andere die y-Skala in unendlicher Ferne oben zu erreichen strebt.

6. Beispiel: Man stelle zur Gleichung

$$y = x - \frac{1}{x^2}$$

die Zeichnung her. Siehe Fig. 12, wo der Winkelteilenden eine ähnliche Rolle wie im vorigen Beispiele zukommt. Wir haben die Punkte durch einen Kurvenzug verbunden.

In diesen Beispielen bezeichneten wir die unabhängige Veränderliche mit x und die abhängige mit y. In den Beispielen 1, 2, 3 waren dagegen andere Benennungen gebraucht worden, entsprechend ihrer wirklichen Bedeutung. Die unabhängige Veränderliche bezeichnete damals Temperaturen oder Jahre oder Stunden, die abhängige Kubikzentimeter oder Zentimeter oder Kilometer. Sehen wir von der wirklichen Bedeutung der Größen ab, d. h. betrachten wir die Veränderlichen rein mathematisch, so werden wir sie künftig mit x und y bezeichnen.

Natürlich könnten wir viel verwickeltere Beispiele bilden. Wir geben hier eines an, ohne aber damit zu meinen daß der Leser es durchrechne:

$$y = \log \frac{x^3 - 2x + \operatorname{tg} x}{1 - \sqrt{x}} + \sqrt{1 + \log(1 + x)}.$$

Hier kommen die Zeichen tg und log vor, an die sich der Leser noch vom Schulunterricht erinnert, auf die wir aber später so ausführlich zurückkommen werden, daß wir eigentlich ihr Bekanntsein gar nicht vorauszusetzen brauchten. Wir erwähnen dies Beispiel nur, um einen Begriff davon zu geben, wie verwickelt ein vorgelegtes mathematisches Gesetz zwischen zwei Veränderlichen x und y sein kann.

Verallgemeinern wir die Betrachtung, so können wir sagen:

Auf rechnerischem Weg läßt sich ein Gesetz, nach dem zu veränderlichen Werten von x veränderliche Werte von y gehören, dadurch herstellen, daß man eine Gleichung ansetzt, in der links nur y, dagegen rechts eine mathematische Formel steht, die y nicht enthält, wohl aber x.

Dies meinen wir. wenn wir in der Folge schreiben:

$$y = f(x),$$

gelesen: „y gleich f von x“.

Man mag die abkürzende Bezeichnung $f(x)$, wenn man will, mit den Worten lesen: „Formel, die x enthält“ oder „Ausdruck, der x enthält“. So sind in den Beispielen 4, 5, 6 unter $f(x)$ nacheinander die Ausdrücke

$$\frac{1}{10}(x^2 - 4x + 2), \quad x + \frac{1}{x}, \quad x - \frac{1}{x^2}$$

verstanden. Wir verwenden die Bezeichnung $f(x)$ dann, wenn wir nicht ein ganz bestimmtes Beispiel betrachten wollen, sondern es noch dahin gestellt sein lassen, welche besondere Bedeutung der Ausdruck $f(x)$ haben soll. Die Bezeichnung $f(x)$ verhält sich also gegenüber allen einzelnen denkbaren mathematischen Ausdrücken in x wie ein Gattungsname. So wie wir unter „Maschine“ eine Dampfmaschine, eine elektrische Maschine, eine Turbine usw. verstehen können, aber doch nur von „Maschine“ reden, sobald wir etwas über Maschinen überhaupt aus-

sagen, soll auch unter $f(x)$ irgendeine x enthaltende mathematische Formel verstanden werden.

Wenn wir nun mitteilen, wie der Mathematiker das Zeichen $f(x)$ zu lesen pflegt, möge man doch ja bedenken, daß bloß durch eine neue Bezeichnung keine wesentlichen neuen Schwierigkeiten eintreten; man möge sich also nicht abschrecken lassen. Das Zeichen $f(x)$ liest der Mathematiker so: „Funktion von x". Die Gleichung

$$y = f(x)$$

liest er demnach so: Die Veränderliche y soll eine Funktion der Veränderlichen x sein. Das bedeutet: Zwischen x und y soll ein gesetzmäßer Zusammenhang bestehen derart, daß es zu beliebig gewählten Werten von x zugehörige Werte von y gibt.

Diese Ausdrucksweise überträgt man auch auf die Wirklichkeit. So sagt man: Das Volumen des Wassers ist eine Funktion seiner Temperatur. In unserem Beispiel 2 ist die Größe des Menschen eine Funktion seiner Lebensjahre und in unserem Beispiel 3 die vom Eisenbahnzuge zurückgelegte Kilometerzahl eine Funktion der Zeit.

Ob wir also sagen: „y hängt gesetzmäßig von x ab" oder: „y ist eine von x abhängige Veränderliche" oder: „y ist eine Funktion von x", ist alles dasselbe.

Noch ein Umstand muß erwähnt werden: Durch den Schulunterricht wird der Leser gewöhnt sein, sich unter x nicht eine veränderliche Größe vorzustellen, sondern eine bestimmte, aber noch unbekannte Größe. Man hat da z. B. die Aufgabe, die Lösungen x der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

zu bestimmen. Hier weiß man, daß es nur gewisse Werte von x gibt, für die diese Gleichung richtig ist. Die Aufgabe ist dann, diese Unbekannte x zu berechnen (hier $x = 1$ und $x = 2$). Etwas ganz anderes ist die Größe, die wir betrachten: x soll eine beliebig veränderliche Größe sein. Es steht also in unserer Willkür, x irgendwelche Werte beizulegen. Wir erinnern an die Redeweise von einer „x-beliebigen Größe". Uns kommt es nicht auf die Einzelwerte von x an, es handelt sich vielmehr um die Frage, wie die Werte der Veränderlichen y von diesen beliebigen Werten von x abhängen.

Nun können wir unsere nächste Aufgabe schon bestimmter fassen: Um die gesetzmäßigen Beziehungen zwischen zwei veränderlichen Größen mathematisch zu ergründen, werden wir uns zunächst damit beschäftigen, eine möglichst große Anzahl von Funktionen $y = f(x)$ zu

untersuchen. Dabei gehen wir von einfacheren Annahmen zu verwickelteren über, indem wir tunlichst die Beispiele den Anwendungen entnehmen.

§ 4. **Koordinaten.**

Ehe wir das soeben Angedeutete beginnen, sind wir leider genötigt, noch einige viel gebrauchte Bezeichnungen einzuführen. Wir sagen leider, weil einerseits darin, daß man für Dinge oder Begriffe, die man schon versteht, neue Namen einführt, keinerlei geistiger Gewinn liegt, und weil andererseits die Erfahrung lehrt, daß neue Bezeichnungen leicht abschreckend wirken. Aber besondere Bezeichnungen sind angebracht: Erstens dienen sie dazu, die Aussagen erheblich abzukürzen, zweitens sind sie nötig, wenn wir uns mit anderen verständigen wollen.

Wenn wir eine gesetzmäßige Beziehung

$$y = f(x)$$

zwischen einer unabhängigen und einer abhängigen Veränderlichen betrachten wollen, benutzen wir, wie erläutert wurde, zur Veranschaulichung eine Figur, deren Herstellung auf zwei zueinander senkrechten Skalen beruht. Wir ziehen also von einem Punkt O aus, vom Nullpunkt oder Anfangspunkt, zwei zueinander senkrechte Strahlen, die wir von jetzt an die positive x-Achse und positive y-Achse nennen werden (siehe Fig. 13) und die wir beide mit Pfeilen versehen. Auf jeder Achse wählen wir in der durch den Pfeil angegebenen Strahlrichtung einen Einheitspunkt 1 beliebig, d. h. auf jeder Achse tragen wir von O aus eine Strecke von irgendwelcher Länge als Einheitsstrecke auf. Sie kann auf beiden Achsen verschieden lang gewählt werden. Haben wir sie einmal gewählt, so messen wir künftig die Veränderliche x mit der Einheit der x-Achse und die Veränderliche y mit der Einheit der y-Achse. Positive Werte x tragen wir auf dem Strahl der positiven x-Achse von O aus ab, z. B. den Wert $x = 3$, indem wir um drei Einheiten der x-Achse von O aus in der Pfeilrichtung auf der x-Achse hingehen. Negative Werte x tragen wir von O aus auf der rückwärtigen Verlängerung der positiven x-Achse über O hinaus ab, d. h. auf der sogenannten negativen x-Achse. Entsprechendes gilt von den Werten y. Negative Werte y werden also von O aus auf der rückwärtigen Verlängerung der positiven y-Achse über O hinaus abgetragen, d. h. auf der negativen y-Achse, und

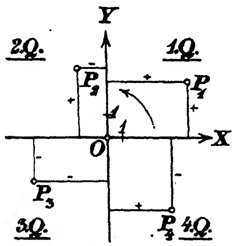


Fig. 13.

zwar gemessen mit der gewählten y-Einheit. Die Ebene wird durch die Achsen in vier Felder, **Quadranten**, eingeteilt. Das zwischen den beiden positiven Achsen gelegene Feld heißt der erste Quadrant. Die anderen Quadranten werden in demselben Sinn gezählt, in dem man um O drehen muß, wenn man die positive x-Achse in die positive y-Achse überführen will, also in Fig. 13 entgegen dem Sinn des Uhrzeigers. Je nachdem nun ein Punkt in einem der vier Quadranten liegt, gehören zu ihm Werte x und y von gewissen bestimmten Vorzeichen. Sie ergeben sich nämlieh als Strecken auf den Achsen, wenn man von dem Punkte die Lote auf die Achsen fällt. Offenbar sind die Vorzeichen von x und y für die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 in Fig. 13 folgende:

Quadrant	Punkt	Vorzeichen von x	Vorzeichen von y
1.	P_1	+	+
2.	P_2	—	+
3.	P_3	—	—
4.	P_4	+	—

Da jedem bestimmten Punkte bestimmte Werte von x und y zugehören oder koordiniert sind, heißen diese Werte die **Koordinaten des Punktes.** Umgekehrt: Wählt man für x und y zwei bestimmte positive oder negative Zahlen, so gehört dazu ein bestimmter Punkt der Ebene. Man braucht nur das x mit gehöriger Beachtung des Vorzeichens dieser Zahl auf der x-Skala und entsprechend das y auf der y-Skala festzustellen und alsdann durch beide Stellen die Lote zu den Achsen zu ziehen. Der Schnittpunkt der Lote ist derjenige Punkt, dessen Koordinaten die angenommenen Zahlen x und y sind. So finden wir z. B. für $x = -2$, $y = 3$ den Punkt P_2 der Fig. 13.

Man braucht nicht beide Lote zu ziehen, denn man kann ja auch in dem Punkte der x-Skala das Lot errichten und auf ihm die Strecke, die durch den gegebenen Wert y — mit Rücksicht auf die y-Einheit — bestimmt wird, auftragen, wodurch man ebenfalls zu dem gesuchten Punkte kommt. Siehe Fig. 14 für den Punkt P, dessen $x = 2$ und $y = 3$ ist. Dabei hat man das Vorzeichen von y zu beachten.

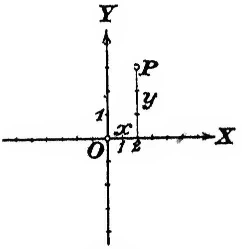


Fig. 14.

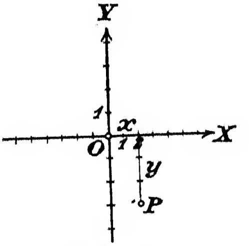


Fig. 15.

Ist es positiv, so ist die Strecke auf dem Lot im Sinn der positiven y-Achse aufzutragen, siehe Fig. 14, ist es aber negativ, wie in Fig. 15 für den Punkt P, dessen $x = 2$ und $y = -3$ ist, so hat man die Strecke auf dem Lot im Sinn der negativen y-Achse aufzutragen.

Die Figuren 14 und 15 geben zugleich den Grund für zwei andere Bezeichnungen: Die x-Koordinate heißt die Abszisse (Abschnitt auf der x-Achse), die y-Koordinate die Ordinate (Lot zur x-Achse).

Je nachdem wir also rechnen oder zeichnen, brauchen wir die in folgender Tafel angegebenen Benennungen:

	Rechnung:		Zeichnung:
x, y bedeuten:	Veränderliche	oder	Koordinaten.
x bedeutet:	unabhängige Veränderliche	„	Abszisse.
y „	abhängige Veränderliche	„	Ordinate.

Zur Abkürzung bezeichnen wir den Punkt, dessen $x = 2$, $y = 3$ ist (siehe Fig. 14), kurz als Punkt $(2; 3)$, ebenso den Punkt P in Fig. 15 kurz als Punkt $(2; -3)$:

Beispiele: a) Wo liegt in Fig. 14 der Punkt $(-3; -4)$? b) Was kann man über die Lage eines Punktes aussagen, wenn sein x positiv, sein y negativ ist? c) Wo liegen alle Punkte $(0; a)$, d. h. die Punkte, deren $x = 0$ ist, während ihr y keinen bestimmten Wert hat? d) Wo liegen die Punkte $(a; 0)$? e) Wo liegen alle Punkte, deren $x = 4$ ist? f) Wo liegen alle Punkte, deren $y = -2$ ist? g) Welche Koordinaten hat der Punkt O, welche der Einheitspunkt der x-Achse, welche der Einheitspunkt der y-Achse? h) Was kann man über die Koordinaten derjenigen Punkte aussagen, die auf der x-Achse liegen?

In den Figuren 13, 14, 15 haben wir die positive Achse wagerecht nach rechts und die positive y-Achse senkrecht nach oben gezeichnet. Das ist nicht nötig. Im allgemeinen werden wir jedoch diese Anordnung beibehalten. Wenn wir aber z. B. die Fallgesetze betrachten, bei denen die Richtung nach unten so wichtig ist, werden wir die y-Achse nach unten hin positiv wählen. Wir könnten die Achsen auch schräg zeichnen, wenn sie nur aufeinander senkrecht stehen. Handelt es sich z. B. in einem Punkte Mitteldeutschlands (51° nördlicher Breite) um die Betrachtung des Gesetzes eines Pendels, das von Norden nach Süden schwingt, so werden wir den Längenkreis dieses Ortes als Kreis mit dem Nordpol N und Südpol S zeichnen und das Achsenkreuz wie in Fig. 16 wählen. Solange jedoch kein triftiger Grund für eine schiefe Lage des Achsenkreuzes vorhanden ist, bleiben wir bei der gewohnten Lage.

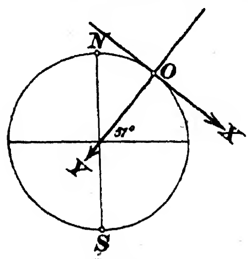


Fig. 16.

Zweites Kapitel.

Begriff des Differentialquotienten.

§ 1. Lineare Funktionen.

Wir stellen uns eine bestimmte Aufgabe:

Eine veränderliche Größe y hänge von einer veränderlichen Größe x ab; das Gesetz dieser Abhängigkeit soll nun aus den folgenden Annahmen ermittelt werden: Zu Beginn der Betrachtung habe x einen gegebenen Wert a und y einen gegebenen Wert b, so daß a und b als die Anfangswerte von x und y bezeichnet werden können. Wenn sich x von a an um irgendeinen Betrag ändert, soll sich y von b an um ein gegebenes Vielfaches dieses Betrages, etwa um das c-fache, ändern. Nimmt also x von a an um 1, 2, 3 usw. zu, so soll y von b an um c, $2c$, $3c$ usw. zunehmen, d. h.: Die Änderung der Größe y von b an soll zur zugehörigen Änderung der Größe x von a an proportional sein, indem c der Proportionalitäts-Faktor ist. Unter a, b, c sind gegebene Konstanten zu verstehen. Die Frage ist nun, wie sich y auf Grund der soeben ausgesprochenen Vorschrift als Funktion von x darstellt.

Zunächst ein einfaches Beispiel zur Erläuterung:

1. Beispiel: Zu jeder Temperatur, gemessen mit dem Celsiusthermometer, gehört eine gewisse Gradzahl des Fahrenheitthermometers. 0° C. entsprechen bekanntlich 32° F. Außerdem ist bekannt, daß, wenn die Celsiusgrade um je 5 zunehmen, die Fahrenheitgrade um je 9 wachsen. Hier ist die Fahrenheitgradzahl y eine Funktion der Celsiusgradzahl x. Die Anfangswerte für x und y sind die Zahlen 0 und 32. Außerdem ist die Änderung von y das $\frac{9}{5}$ fache der von x. Im vorliegenden Fall ist also $a = 0$, $b = 32$, $c = \frac{9}{5}$. Wir schließen nun so: Wächst die Temperatur nach Celsius von 0° bis x^0, so ändert sich ihre Maßzahl um x. Zugleich wächst die Temperatur nach Fahrenheit von 32° bis y^0. Ihre Zahl ändert sich daher um $y - 32$. Diese Änderung ist das $\frac{9}{5}$ fache der vorigen, also:

$$y - 32 = \tfrac{9}{5}x$$

oder

$$y = \tfrac{9}{5}x + 32\,.$$

Diese Formel liefert das Gesetz, nach dem y von x abhängt. Beispielsweise für $x = 10$ gibt sie $y = 50$, d. h. 10° C. sind dasselbe wie 50° F.

Der Schluß, den wir in diesem Beispiele gemacht haben, führt auch allgemein zum Ziel: Wenn die unabhängige Veränderliche von a bis x wächst, nimmt sie um $x - a$ zu. Zugleich wächst die abhängige Veränderliche von b bis y, d. h. sie nimmt um $y - b$ zu. Also soll $y - b$ das c-fache von $x - a$ sein, d. h.:

$$y - b = c\,(x - a)$$

oder:

$$y = c\,(x - a) + b$$

oder auch:

(1) $$y = c\,x + b - c\,a.$$

Da a, b, c Konstanten sind, ist auch $b - c\,a$ eine Konstante. Wir wollen sie k nennen. Dann sieht das Gesetz so aus:

(2) $$y = c\,x + k.$$

Wir haben hiermit den wichtigen Satz gefunden:

Satz 1: Wenn eine Größe y von einer Größe x derart abhängt, daß die Änderung der Größe y von ihrem Anfangswert an beständig gleich dem c-fachen der Änderung der Größe x von ihrem Anfangswert an ist, besteht ein Gesetz:

$$y = c\,x + k,$$

worin k ebenso wie c eine Konstante bedeutet.

Da in dieser Formel x nur in der ersten Potenz oder, wie man auch sagt, nur linear vorkommt, nennt man eine derartige Funktion

$$y = \text{konst.}\; x + \text{konst.}$$

eine Funktion ersten Grades oder kürzer eine lineare Funktion[1] von x. Demnach läßt sich der Satz 1 auch so aussprechen:

Satz 2: Wenn eine Größe y von einer Größe x derart abhängt, daß die Änderung der Größe y von ihrem Anfangswert an beständig das c-fache der Änderung der Größe x von ihrem Anfangswert an beträgt, ist y eine lineare Funktion von x, in der x den konstanten Koeffizienten c hat, nämlich:

$$y = c\,x + \text{konst.}$$

Anstatt zu sagen, daß die Änderung der abhängigen Größe das c-fache der Änderung der unabhängigen Größe sein soll, können wir auch sagen: Jeder Zunahme der unabhängigen Größe um eine

[1] Genauer eine „ganze" Funktion ersten Grades oder eine „ganze" lineare Funktion, was aber erst später begründet werden kann.

Einheit entspricht eine Zunahme der abhängigen Größe um c Einheiten.

2. Beispiel: Ein Eisenstab, der bei 15° C. 1 m lang ist, wird bei x^0 C. eine andere Länge, etwa y m haben. Der Anfangswert von x ist 15, der von y ist 1. Die Physik lehrt, daß die Ausdehnung des Stabes durch die Wärme proportional zur Temperaturzunahme ist. Dabei entspricht jedem Grad eine Ausdehnung um 0,000 012 m. Also ist hier $c = 0{,}000\,012$. Folglich wird

$$y - 1 = 0{,}000\,012\,(x - 15)$$

oder:

$$y = 0{,}000\,012\,x - 0{,}000\,18 + 1$$

oder:

$$y = 0{,}999\,82 + 0{,}000\,012\,x\,.$$

Wir haben hier rechts den konstanten Summanden vorangesetzt, weil er der größere ist, falls für die Temperatur x vernünftige Werte gewählt werden. Die Formel gibt die Länge des Stabes bei beliebigen Temperaturen an, auch bei Temperaturen unterhalb des Anfangswertes 15°. Denn wenn die Temperatur unter 15° abnimmt, sagen wir: ihre Zunahme ist negativ. Sinkt die Temperatur bis auf x^0 ($< 15^0$), so ist $x - 15$ nach wie vor ihre Zunahme, nämlich eine negative Zahl. Zugleich zieht sich der Stab zusammen, d. h. seine Ausdehnung $y - 1$ ist ebenfalls negativ, aber immer noch das 0,000 012 fache der Zunahme der Temperatur. Für $x = 0$ z. B. gibt die Gleichung $y = 0{,}999\,82$, d. h. bei 0° C. hat der Stab 0,999 82 m Länge.

Was soeben über negative Zunahmen gesagt wurde, gilt allgemein: Wenn die unabhängige Veränderliche vom Anfangswert a bis x abnimmt, also $x < a$ ist, sagen wir doch, daß x um $x - a$ zunimmt. Diese Größe ist dann eben negativ. Auch die Zahl c kann sehr wohl negativ sein. Das bedeutet dann, daß y mit wachsendem x abnehmen soll. Schreiben wir z. B. vor, daß, wenn die unabhängige Veränderliche vom Wert a an bis x wächst, die abhängige Veränderliche etwa um das Doppelte der Änderung von x nicht zu-, sondern abnehmen soll, so ist $c = -2$. Wir sagen dann: Die abhängige Veränderliche soll um das -2 fache der Zunahme von x zunehmen. Eine Abnahme ist also immer als eine negative Zunahme zu betrachten. Tut man dies, so bleiben die Schlüsse die alten. Dies erläutert zum Überflusse das folgende

3. Beispiel: Welche Zeit hat ein Ort, der x^0 westlich von Ferro liegt, wenn die Uhr in Greenwich Mittag zeigt? Die Zeit sei y Stunden nach Mitternacht. Da Greenwich $17\frac{2}{3}{}^0$ östlich von Ferro ist, liegt der Ort $(x + 17\frac{2}{3})^0$ westlich von Greenwich. Weil sich die Erde in 24 Stunden einmal von West nach Ost um ihre Achse dreht, hat ein Ort, der 1° weiter westlich als ein anderer liegt, seine Mittagszeit $\frac{24}{360}$ oder $\frac{1}{15}$ Stunde später als der andere, d. h. seine Zeit ist $\frac{1}{15}$ Stunde vor dem Mittag. Dies bedeutet: y ist eine lineare Funktion von x. Der Zunahme von x um 1° entspricht eine Abnahme von y um $\frac{1}{15}$ Stunde; demnach ist hier $c = -\frac{1}{15}$. Die Anfangswerte von x und y sind $-17\frac{2}{3}$ und 12 (warum $-17\frac{2}{3}$?). Also kommt:

$$y - 12 = -\tfrac{1}{15}\,(x + 17\tfrac{2}{3})$$

oder:

$$y = 10\,\frac{37}{45} - \frac{x}{15}.$$

New York z. B. liegt $57\frac{1}{3}^0$ westlich von Ferro. Für $x = 57\frac{1}{3}$ aber kommt $y = 7$, d. h. ist in Greenwich Mittag, so ist es in New York 7 Uhr morgens. Natürlich rechnet man bequemer, wenn man alle Orte von vornherein in ihrer geographischen Länge auf Greenwich bezieht; das haben wir hier absichtlich nicht getan.

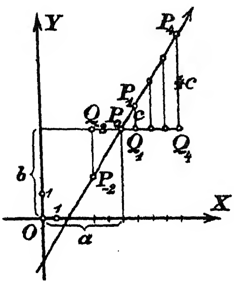


Fig. 17.

Die Aufgabe, deren Lösung die Sätze 1 und 2 darstellen, läßt sich anschaulich erläutern, siehe Fig. 17. Zu jedem Wert von x soll ein Wert von y gehören. Zu beiden zusammen gehört jedesmal ein Punkt der Ebene, nämlich der Punkt $(x; y)$ mit den Koordinaten x und y. Die Frage ist nun, wie alle diese Punkte in unserem besonderen Falle liegen. Wir hatten angenommen, die Anfangswerte von x und y seien a und b. Zu ihnen gehört ein Punkt $(a; b)$ oder P_0. Nun soll die x-Koordinate um ein beliebiges Stück wachsen, und dabei soll die y-Koordinate um das c-fache dieses Stückes zunehmen. Wenn also die x-Koordinate um die Einheit wächst, soll die y-Koordinate um c Einheiten zunehmen. Die erste Strecke ist mit der x-Einheit, die zweite mit der y-Einheit zu messen. Wir kommen so zum Punkt $(a + 1;\ b + c)$, der mit P_1 bezeichnet ist, wenn $Q_1 P_1$ die Konstante c, gemessen mit der y-Einheit, vorstellt. Wächst die Abszisse des Punktes P_0 um 2, 3, 4 ... Einheiten, so soll die Ordinate um $2c$, $3c$, $4c$ ... Einheiten zunehmen. Dies liefert die Punkte P_2, P_3, P_4 ... Man sieht ein, daß alle Punkte auf einer Geraden liegen. Dies gilt auch, wenn die Abszisse nicht um eine ganze Zahl von Einheiten zunimmt, sondern z. B. um $2\,^3/_4$ Einheiten, wobei die Ordinate um $2\,^3/_4 c$ Einheiten wächst, usw. Stets nämlich sind die rechtwinkligen Dreiecke $P_0 P_1 Q_1$, $P_0 P_2 Q_2$ usw. einander ähnlich und ähnlich gelegen. Auch wenn die Abszisse abnimmt, kommen wir zu Punkten derselben Geraden. Nimmt sie z. B. um 2 Einheiten ab, so heißt dies, daß sie um -2 Einheiten zunimmt. Die Ordinate soll dann nach Vorschrift um $-2c$ Einheiten zunehmen, also um $2c$ Einheiten abnehmen. So gelangen wir zu dem Punkt $(a - 2;\ b - 2c)$ oder P_{-2}. Also folgt:

Satz 3: Hängt eine Größe y von einer Größe x derart ab, daß die Änderung der Größe y von ihrem Anfangswerte b an beständig das c-fache der Änderung der Größe x von ihrem Anfangswert a an beträgt, so ist der Ort aller zugehörigen

Bildpunkte $(x\,;y)$ die gerade Linie durch die beiden Punkte $(a;\,b)$ und $(a+1\,;b+c)$.

Kürzer ausgesprochen nach Satz 2:

Satz 4: Das Bild einer linearen Funktion

$$y = cx + k$$

ist eine gerade Linie. Umgekehrt: Jede gerade Linie mit Ausnahme der Parallelen zur y-Achse ist das Bild einer linearen Funktion.

Der Leser muß sich selbst darüber klar werden, warum das Bild einer linearen Funktion niemals eine Parallele zur y-Achse sein kann.

In Fig. 17 hatten wir c positiv angenommen. Ist c negativ, so liegt der Fall der Figur 18 vor. Je nachdem also der Proportionalitätsfaktor c positiv oder negativ ist, geht die Bildgerade

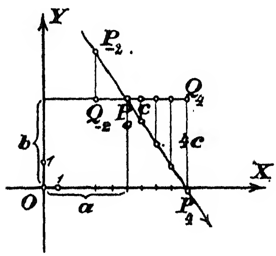


Fig. 18.

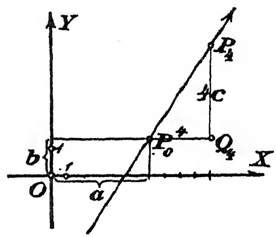


Fig. 19.

von links unten nach rechts oben oder von links oben nach rechts unten. Der Faktor c ist in den Figuren 17 und 18 als eine Strecke dargestellt, die mit der y-Einheit zu messen ist und dann als eine Zahl c erscheint. Er bestimmt die Richtung der Geraden. Wäre nämlich das Anfangswertepaar a, b ein anderes als in Fig. 17 gewesen, etwa wie in Fig. 19, so wäre der Punkt P_0 an anderer Stelle gelegen, so daß sich eine andere Gerade ergeben hätte. Hat aber hier c denselben Wert wie in Fig. 17, so ist die neue Gerade offenbar zur alten parallel. Selbstredend ist dabei dieselbe x-Einheit und y-Einheit wie in Fig. 17 zu wählen.

Da somit die Zahl c die Richtung der Bildgeraden bestimmt und die Gerade — von links nach rechts durchlaufen gedacht — steigt (Fig. 17) oder fällt (Fig. 18), je nachdem c positiv oder negativ ist, nennen wir c die Steigung der Geraden. Wir sagen von der Geraden in Fig. 18, daß sie eine negative Steigung habe, d. h. falle. Wenn man diese Gerade im entgegengesetzten Sinn durchliefe, würde sie steigen und nicht fallen. Der Begriff der Steigung bezieht sich also wohlbemerkt

auf einen ganz bestimmten Sinn des Durchlaufens der Geraden, nämlich auf den Sinn des Fortschreitens von links nach rechts. Besser gesagt, da ja die Lage des Achsenkreuzes nach S. 26 auch schief sein kann: Wir durchlaufen die Gerade so, daß die Abszissen ihrer Punkte beständig zunehmen. Oder: So, daß der Fußpunkt der Ordinate des laufenden Punktes die x-Achse im positiven Sinn durcheilt. Dieselbe Festsetzung werden wir auch später machen, wenn wir statt gerader krumme Linien betrachten. Der Leser tut daher gut, sich diese Verabredung zu merken.

Da die linearen Funktionen

$$y = cx + k$$

durch gerade Linien veranschaulicht werden und gerade Linien leicht zu zeichnen sind, kann man Aufgaben, bei denen lineare Funktionen vorkommen, bequem durch die Zeichnung lösen.

Zu diesem Zweck ist noch zu erörtern, wie man die Gerade, die eine vorgelegte lineare Funktion veranschaulicht, am bequemsten ermittelt. Liegt z. B. die lineare Funktion

$$y = 2x - 5$$

vor, so brauchen wir von der Geraden nur zwei Punkte zu kennen, um sie mittels des Lineals ziehen zu können. Solche Punkte finden wir, wenn wir irgend zwei Paare zusammengehöriger Werte von x und y berechnen und die zugehörigen Punkte aufsuchen. Für $x = 0$ gibt die Formel $y = -5$, also ist $(0; -5)$ ein Punkt A der Geraden. Er liegt auf der y-Achse, siehe Fig. 20. Setzen wir ferner $x = 4$, so kommt $y = 3$. Also liegt auch der Punkt $(4; 3)$ oder B auf der Geraden. Beide Punkte A und B werden nun mittels des Lineals durch die gerade Linie verbunden. Will man aber eine genaue Zeichnung haben, so tut man gut, die Hilfspunkte möglichst weit voneinander enfernt zu wählen, also für x zwei recht verschiedene Werte zu nehmen. Setzt man $x = -5$, so ist $y = -15$, setzt man $x = 5$, so ist $y = 5$. D'e Punkte $(-5; -15)$ und $(5; 5)$ oder C und D der Figur liegen weiter voneinander entfernt als die vorhin benutzten, geben also auch eine genauere Zeichnung.

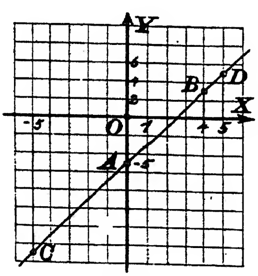


Fig. 20.

Anfänger sündigen oft gegen die Regel, eine Gerade durch zwei möglichst weit vo. einander entfernte Punkte zu bestimmen. Wer bei dieser schlechten Gewohnheit bleibt, ist ein unpraktischer Mensch.

Wenn die Anfangswerte a und b von x und y sowie der Proportionalitätsfaktor c gegeben sind, zeichnet man die Gerade, die das Bild der linearen Funktion y von x ist, am bequemsten, indem man zunächst den Punkt $(a\,; b)$ aufsucht, dann die Abszisse a um irgendeine ganze Zahl von x-Einheiten vergrößert und entsprechend die Ordinate b um das c-fache dieser Zahl — aber in y-Einheiten — vergrößert. Ist c negativ, so wird die Ordinate verringert. Auf diese Art kommt man zu einem zweiten Punkte der zu zeichnenden Geraden. Wie viele Einheiten man nimmt, um die a vermehrt wird, ist gleichgültig; zweckmäßig wird man eine möglichst große und runde Zahl wie 10, 20, 100 wählen.

Insbesondere bemerken wir hierbei noch: Wenn die Konstante k in $y = cx + k$ gleich Null ist, geht die Bildgerade offenbar durch den Anfangspunkt O.

4. Beispiel: Bei x^0 C. zeige das Fahrenheitthermometer y^0 an. Dann ist nach dem ersten Beispiel:

$$y = \tfrac{9}{5}x + 32\,.$$

Diese lineare Funktion ist in Fig. 21, wo wir die x- und y-Einheit gleichgroß gewählt haben, durch die Gerade F dargestellt. Sie wurde durch Verbindung des Punktes $(0; 32)$ der y-Achse mit dem Punkt A gefunden, der sich ergibt, wenn man $x = -40$, setzt. Da dann $y = -40$ folgt, ist A der Punkt $(-40; -40)$. Die Gerade F gestattet zu jeder Celsius-Temperaturangabe die Fahrenheitangabe abzulesen, z. B. zu 13° C. suchen wir den Punkt auf F mit $x = 13$, indem wir von der zugehörigen Stelle U der x-Achse senkrecht zur x-Achse bis zur Geraden F gehen, wodurch wir zum Punkt W kommen, dessen Abszisse 13 und dessen Ordinate $y = 56$ ist. Also entsprechen 13° C. ungefähr 56° F. Unsere Figur ist nämlich so klein, daß man hier die Genauigkeit nicht über 1° bringen kann. Genau kommt 55,4° F. Die in Fig. 21 gezeichnete Gerade R dient zum Ablesen der Réaumurgrade.

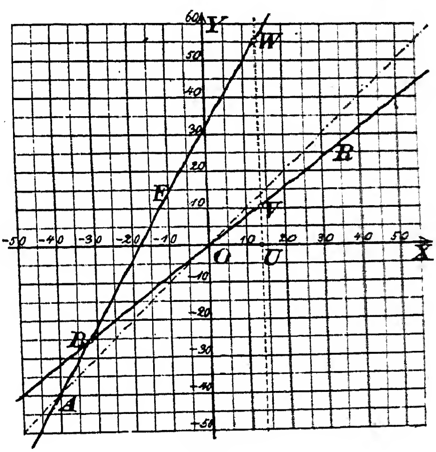


Fig. 21.

Sind nämlich x^0 C. dasselbe wie y^0 R., so ist bekanntlich

$$y = \tfrac{4}{5}x\,.$$

Diese lineare Funktion von x wird durch eine Gerade R dargestellt, die durch den Anfangspunkt geht. Der auf der Geraden R gelegene Punkt V des vorhin benutzten Lotes von U hat die Ordinate 11, d. h. 13° C. entsprechen ungefähr 11° R. (genau 10,4°). Die Fig. 21 gestattet überhaupt, zu einer beliebigen Temperaturzahl eines der drei Thermometer die entsprechende Angabe für die beiden anderen Thermometer abzu-

lesen. Bei 50° F. z. B. suchen wir die Stelle der Geraden F, deren Ordinate 50 ist, und loten von ihr herunter. Das Lot trifft die Gerade R im Punkte mit der Ordinate 8 gibt also 8° R., und es trifft die x-Achse im Punkte mit der Abszisse 10, gibt also 10° C. Um die Frage zu beantworten, bei wieviel Grad Celsius das Fahrenheit- und das Réaumurthermometer übereinstimmen, haben wir den Schnittpunkt B von R und F zu benutzen. Er hat die Abszisse — 32. Also lautet die Antwort: Bei — 32° C. Wie groß ist dann die Fahrenheit- oder Réaumurtemperatur? Die in Fig. 21 strich-punktierte Gerade enthällt alle Punkte, deren Abszissen gleich den Ordinaten sind. Sie trifft F in A. Dies zeigt: — 40° C. sind dasselbe wie — 40° F.

5. **Beispiel**: Kleiden wir einmal einen Scherz in mathematisches Gewand! Man hört zuweilen die folgende Regel dafür, wie alt das junge Mädchen sein soll, das ein Mann heiraten will: Man soll zum Alter des Mannes 10 Jahre addieren und die Hälfte der Summe bilden. Die hervorgehende Zahl gibt das Alter der Erkorenen an, wie es sein sollte. Ist z. B. der Mann 30 Jahre alt, so soll er eine 20 jährige zur Frau nehmen. Sei x das Alter des Mannes (in Jahren), y das der Zukünftigen. Dann soll sein $y = \frac{1}{2}(x + 10) = \frac{1}{2}x + 5$. Man stelle diese lineare Funktion durch eine Gerade dar.

Wenn sich ein Punkt auf einer Geraden oder krummen Bahn so bewegt, daß er in gleichen Zeiten immer gleich lange Wege, also in doppelter Zeit den doppelten Weg usw. zurücklegt, ist die Zunahme des Weges beständig zur Zunahme der Zeit proportional, d. h. der zurückgelegte Weg ist eine lineare Funktion der Zeit. Wenn wir also die Zeiten als Abszissen, die Wege als Ordinaten benutzen, wird diese Funktion durch eine gerade Linie veranschaulicht, obgleich die Bahn des Punktes krumm sein kann. Man muß sich eben davor hüten, die Bildgerade mit dem Weg zu verwechseln. Die Bildgerade gibt nur die Beziehung zwischen Zeit und Weglänge anschaulich wieder. Bewegungsaufgaben, bei denen es von vornherein klar ist oder stillschweigend vorausgesetzt wird, daß der Weg zur Zeit proportional ist, lassen sich daher graphisch lösen. Hierzu einige Beispiele:

6. **Beispiel**: Ein Bote ging um 6 Uhr morgens vom Orte A nach dem 8 km entfernten Orte B (siehe Fig. 22), den er in zwei Stunden erreichte. Als er 6 km zurückgelegt hatte, war er einem von B nach A gehenden Boten begegnet. Als der erste Bote von B mittels der Bahn nach A zurückgelangte, wo er um $8\frac{3}{4}$ Uhr eintraf, sah er gerade den zweiten in A ankommen. Wann ist der zweite Bote von B aufgebrochen? Auf der x-Achse tragen wir (siehe Fig. 23) die von 6 Uhr an gemessenen Stunden, auf der y-Achse die von A an gemessenen Kilometer des Weges als Strecken ab. Die Beziehung zwischen der Entfernung von A und der Zeit wird für jeden der beiden Boten durch eine Gerade dargestellt. Da der erste Bote zur Zeit $x = 0$, d. h. um 6 Uhr, noch in A war, also den Weg 0 zurückgelegt hatte, und da er zur Zeit $x = 2$, d. h. um 8 Uhr in B war, also seinen Weg von 8 km erledigt hatte, ziehen wir die Gerade vom

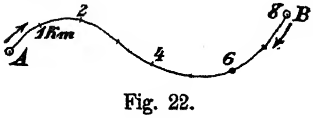


Fig. 22.

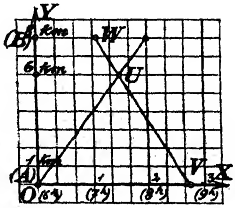


Fig. 23.

Anfangspunkte (0; 0) nach dem Punkte (2; 8). Vom Wege des zweiten Boten wissen wir zweierlei: Zuerst, daß er dem ersten Boten 6 km von A entfernt begegnet ist. Wir suchen also auf der schon gezeichneten Geraden den Punkt, dessen Ordinate gleich 6 ist. Dies ist der Punkt U. (Seine Abszisse gibt an, wann sich die Boten begegneten.) Zweitens traf der zweite Bote um $8\frac{3}{4}$ Uhr in A ein, d. h. hier ist $y = 0$ für $x = 2\frac{3}{4}$. Dadurch erhalten wir den Punkt $(2\frac{3}{4}; 0)$ oder V. Die Gerade UV gibt die Beziehung zwischen Zeit und Weg beim zweiten Boten an. Die gestellte Frage ist nun mathematisch aufgefaßt diese: Wann war für den zweiten Boten die Entfernung von A gleich 8 km? Wir suchen also auf der Geraden UV den Punkt W, dessen Ordinate gleich 8 ist. Seine Abszisse ist, wie die Figur lehrt, gleich etwa $1\frac{1}{12}$. Da wir die Abszissen von 6 Uhr an messen, heißt dies: Der zweite Bote ist um $7\frac{1}{12}$ Uhr oder $7^h 5^m$ von B aufgebrochen

7. Beispiel: Ein Bote geht von einem Orte A über einen Ort B nach einem dritten Orte C, ein zweiter bricht zur selben Zeit von B nach C auf. Der erste Bote kommt nach $1\frac{1}{4}$ Stunden durch B, während in derselben Zeit der zweite Bote nur einen $\frac{3}{4}$ so langen Weg zurückgelegt hat. Wann holt der erste Bote den zweiten ein? Bei beiden Boten ist wieder die jeweilige Entfernung von A eine lineare Funktion der seit dem Aufbruche verflossenen Zeit. Der Proportionalitätsfaktor ist jedoch verschieden. In Fig. 24 bedeute die beliebig angenommene Strecke von (A) bis (B) auf der y-Achse die Entfernung von A bis B. Die beiden Geraden geben für beide Boten die Beziehung zwischen Zeit und Entfernung von A an Dabei ist $VW = \frac{3}{4}UV$. Holt der zweite Bote den ersten ein, so heißt dies: Beide Boten haben zu einer gewissen Zeit dieselbe Entfernung von A. In der Figur bedeutet dies: Wir müssen den gemeinsamen Punkt S beider Geraden bestimmen. Seine Abszisse gibt an, daß der erste Bote den zweiten 5 Stunden nach dem Aufbruch einholt.

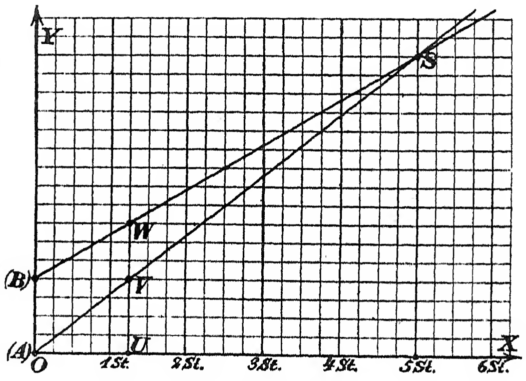


Fig. 24.

Wie in diesem Beispiele geben überhaupt bei einer Aufgabe, in der es sich um zwei verschiedene Bewegungen handelt und bei der beide Bewegungen durch Geraden abgebildet werden, die Abszisse und die Ordinate des Schnittpunktes beider Geraden an, wann und wo der Treffpunkt vorkommt.

8. Beispiel: Wann decken sich die beiden Uhrzeiger? Für jeden Zeiger ist der von der 12^h-Stellung an zurückgelegte Winkel — etwa gemessen in Graden — proportional zur Zeit von 12^h an, etwa gemessen in Stunden. Stellen also die Abszissen x die Stunden, die Ordinaten y die Winkelgrade dar (siehe Fig. 25), so werden die Bewegungen durch gerade Linien veranschaulicht. Beim kleinen Zeiger gehört zur Zeit $x = 0$ die Stelle $y = 0$, zur Zeit $x = 12$ die Stelle $y = 360$; wir ziehen also die Gerade vom Nullpunkt nach dem Punkt (12; 360). Da der große Zeiger während der 12 Stunden

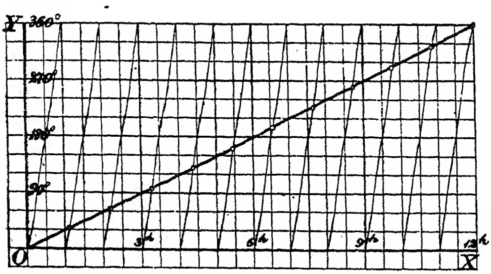


Fig. 25.

zwölfmal eine ganze Umdrehung macht, haben wir für ihn 12 Geraden zu ziehen, die vom Nullpunkte nach der Stelle (1; 360), dann die vom Punkte (1; 0) nach der Stelle (2; 360) usw. Die Schnittpunkte der zuerst gezeichneten schrägen Geraden mit diesen 12 steilen Geraden geben durch die Abszissen an, wann sich die beiden Zeiger decken, durch ihre Ordinaten, wo sie sich decken. Z. B. ungefähr um $2^h 10^m$ (genau $2\frac{2}{11}{}^h$) decken sie sich und bilden mit der 12^h-Stellung einen Winkel von ungefähr 65° (genau $65\frac{5}{11}{}^\circ$).

9. **Beispiel:** Zwischen zwei Orten A und B verkehren Straßenbahnwagen hin und zurück im Fünf-Minuten-Betriebe. Sie brauchen für den ganzen Weg von A nach B je $\frac{1}{2}$ Stunde und kehren immer ohne nennenswerten Aufenthalt um. Einem Fußgänger, der ein Stück des Weges von A nach B geht, begegnen 15 Wagen, während ihn 7 überholen. Wie lange und ein wie großes Stück des Weges geht er ungefähr? In der Fig. 26 stellen die Geraden des Netzes die Beziehung zwischen Zeit und Weg für die Wagen dar. Für den Fußgänger haben wir eine Strecke so zu zeichnen, daß sie von links unten nach rechts oben geht und 15 Geraden der einen Art sowie 7 Geraden der anderen Art trifft. Dabei bleibt natürlich ein gewisser Spielraum. Der Fußgänger geht ungefähr eine Stunde, wobei er etwa $\frac{2}{3}$ des ganzen Weges zurücklegt.

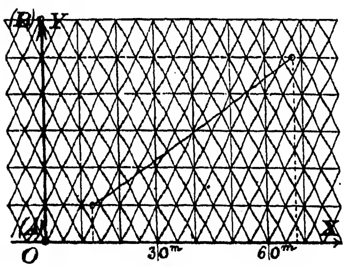


Fig. 26.

Das folgende fast zu harmlose Beispiel bringen wir nur deshalb, weil es auf einen neuen Gedanken führt:

10. **Beispiel:** Der Geselle fängt erst 10^h morgens zu arbeiten an, der Lehrling ist dagegen schon von 7^h an tätig gewesen. Der Geselle schafft in der Stunde 3 kg Ware, der Lehrling nur 2. Wieviel Ware haben beide zusammen zu irgendeiner Tageszeit hergestellt? Wird die Zeit von Mitternacht an in Stunden wie auf der Uhr gerechnet, so hat zur Zeit x der Geselle $3\,(x-10)$ kg, der Lehrling $2\,(x-7)$ kg Ware fertig. Beide Mengen sind lineare Funktionen von x. Zur Unterscheidung bezeichnen wir sie mit y_1 und y_2:

$$y_1 = 3\,x - 30, \qquad y_2 = 2\,x - 14.$$

Da nach der Gesamtmenge zur Zeit x gefragt wird, ist nun die Summe $y = y_1 + y_2$ zu bilden, und diese Summe ist ebenfalls eine lineare Funktion, nämlich

$$y = 5\,x - 44.$$

Allgemein: Wenn zwei lineare Funktionen von x vorliegen, die zum Unterschiede mit y_1 und y_2 bezeichnet seien und deren Konstanten wir ebenfalls zum Unterschiede c_1, k_1 und c_2, k_2 nennen:

$$y_1 = c_1 x + k_1, \quad y_2 = c_2 x + k_2,$$

ist ihre Summe $y = y_1 + y_2$ ebenfalls eine lineare Funktion:

$$y = (c_1 + c_2) x + (k_1 + k_2).$$

Dies erscheint zu einfach und langweilig, aber die Sache wird sofort anziehender bei ihrer geometrischen Deutung: Die beiden beliebig angenommenen linearen Funktionen y_1 und y_2 werden durch zwei beliebig gezogene Geraden g_1 und g_2 dargestellt, siehe Fig. 27. Irgendeine Abszisse x ist z. B. OQ. Die zugehörigen Ordinaten y_1 und y_2 sind QP_1 und QP_2; ihre Summe y ist die Strecke $QP = QP_1 + QP_2$. Wir gelangen also von den beiden zu Q gehörigen Punkten P_1 und P_2 von g_1 und g_2 zu einem neuen Punkt P mit derselben Abszisse. Nun wissen wir, daß die Summe $y = y_1 + y_2$ auch eine lineare Funktion ist, und dies besagt daher: Wenn man die zu jeder Abszisse OQ gehörigen beiden Ordinaten QP_1 und QP_2 von g_1 und g_2 addiert und als neue Ordinate QP benutzt, ist der Ort aller so hervorgehenden Punkte P ebenfalls eine Gerade g. Diese Gerade kann man die Summengerade nennen. Sie Punkt für Punkt zu bestimmen, ist ganz unterhaltend, nur muß man aufpassen, welche Vorzeichen y_1 und y_2 haben. Nimmt man z. B. OQ' als Abszisse an, so sind die zugehörigen Ordinaten $Q'P_1'$ und $Q'P_2'$, und dabei ist $Q'P_2'$ negativ, also die Summe $Q'P_1' + Q'P_2'$ in Wahrheit eine Differenz, nämlich gleich der positiven neuen Ordinate $Q'P'$. Man sieht auch leicht, daß die Summengerade durch die besonderen Punkte U und V gehen muß.

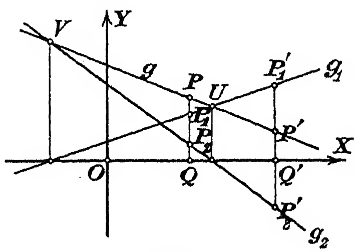


Fig. 27.

Offenbar ist auch die Summe von drei oder noch mehr linearen Funktionen stets wieder eine lineare Funktion. Man kann also auch die Summengerade von beliebig vielen Geraden ermitteln. Ja, noch mehr: Sind z. B. drei lineare Funktionen vorgelegt:

$$y_1 = c_1 x + k_1, \qquad y_2 = c_2 x + k_2, \qquad y_3 = c_3 x + k_3,$$

so wollen wir sie, bevor wir sie addieren, zunächst noch mit irgend drei Konstanten a_1, a_2, a_3 multiplizieren. Bilden wir erst dann die Summe, also $y = a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3$, so kommt:

$$y = (a_1 c_1 + a_2 c_1 + a_3 c_3)\, x + (a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3),$$

und da die Klammern Konstanten enthalten, ist dies wiederum eine lineare Funktion. Entsprechendes gilt, wenn man beliebig viele lineare Funktionen vorlegt. Also haben wir den

Satz 5: Ist im Achsenkreuz eine Anzahl von Geraden $g_1, g_2, g_3 \ldots$ gezeichnet und konstruiert man für jede Abszisse x die Summe der zugehörigen mit Konstanten $a_1, a_2, a_3 \ldots$ multiplizierten Ordinaten der einzelnen Geraden als neue Ordinate, so ist der Ort der neuen Bildpunkte wieder eine Gerade.

Ein einziges Beispiel hierzu mag genügen:

11. Beispiel: Ein Behälter hat zwei Zufluß- und eine Abflußöffnung; sie seien mit A, B, C bezeichnet. Durch A fließen in der Minute 20 Liter, durch B 25 Liter und durch C 80 Liter. Zunächst ist nur A geöffnet, nach 5 Minuten wird auch B geöffnet, nach weiteren 10 Minuten auch C. Man stelle den Inhalt des zuerst leeren Behälters graphisch als Funktion der Zeit dar. Wann ist der Behälter wieder leer? Die Wirkung von A allein wird in Fig. 28 durch die Gerade (A) dargestellt, von B allein durch die Gerade (B). Während der ersten 5 Minuten kommt nur die Gerade (A) in Betracht, während der nächsten 10 Minuten wirken beide Zuflußöffnungen; die durch sie einströmenden Wassermengen summieren sich. Mithin ist von $x = 5$ bis $x = 15$ nach dem Vorhergehenden die Summengerade der beiden Geraden (A) und (B) herzustellen. Dies gibt die Gerade $(A + B)$. Die Wirkung des Abflußrohres C allein, das erst zur Zeit $x = 15$ geöffnet wird, veranschaulicht die nicht steigende, sondern fallende Gerade (C). Von der Zeit $x = 15$ an wirken alle drei Öffnungen, die dritte negativ, d. h. von $x = 15$ an ist die Gerade $(A + B - C)$ einzuzeichnen, deren Ordinaten die Summen der Ordinaten der Geraden (A) und (B), vermindert um die Ordinaten der Geraden (C), sind. Die stark gezeichnete gebrochene Linie gibt zu jeder Zeit x (in Minuten) durch ihre Ordinate die im Behälter befindliche Wassermenge (in Litern) an. Man sieht, daß der Behälter in ungefähr 31 Minuten wieder geleert ist.

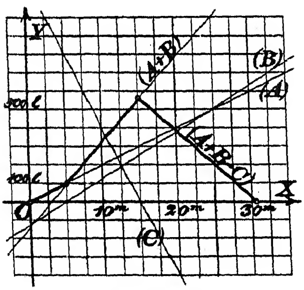


Fig. 28.

In diesem Beispiele haben wir den Behälterinhalt ($= y$ Liter) als Funktion der Zeit ($= x$ Minuten) mittels einer gebrochenen Linie dargestellt. Im ersten Kapitel hatten wir im 3. Beispiele auf S. 17 einen ähnlichen Fall. Dort durften wir in der Tat geradlinige Strecken ziehen, da anzunehmen war, daß der Eisenbahnzug zwischen zwei Stationen in gleichen Zeiten gleiche Wege zurücklegt, so daß der Weg eine lineare Funktion der Zeit ist.

Die Worte „Zuwachs von x" bezeichnen wir von jetzt an kurz mit Δx. Das Delta Δ oder griechische D soll dabei an das Wort Differenz erinnern; der Zuwachs von x ist nämlich die Differenz des neuen und des alten Wertes von x. Bedeutet z. B. t die Zeit in Sekunden, so soll also Δt einen Zuwachs dieser Zeit, gemessen in Sekunden, vorstellen. Bedeutet p ein Gewicht in Kilogrammen, so soll Δp eine Zunahme dieses Gewichts, gemessen in Kilogrammen, sein. Stellt v ein Volumen in Litern dar, so bedeutet Δv einen Zuwachs dieses Volumens, gemessen in Litern. Es ist also $t + \Delta t$ die neue Zeit, $p + \Delta p$ das neue Gewicht und $v + \Delta v$ das neue Volumen. Die Zusammensetzung des Zeichens Δ mit einer Veränderlichen, soll also einen beliebigen Zuwachs der Veränderlichen ausdrücken. Dieser Zuwachs kann auch negativ sein, so daß er dann eine Abnahme bedeutet. Man hat sich davor zu hüten, das Δ in Δx als einen Faktor von x aufzufassen. Δx ist durchaus kein Produkt von zwei Größen, sondern eine Größe, der Zuwachs von x. Das Zeichen Δ allein geschrieben hat gar keine Bedeutung. Eine einfache Bemerkung nebenbei: Ist c eine Konstante, so ist $\Delta c = 0$.

Wir betrachten nun wieder eine lineare Funktion

$$y = cx + k. \tag{2}$$

Wir denken uns, daß der Veränderlichen x irgendein Zuwachs Δx erteilt werde, so daß $x + \Delta x$ an die Stelle von x tritt. Dann wird sich auch y infolge der Vorschrift (2) um einen gewissen Zuwachs Δy ändern, so daß $y + \Delta y$ der zugehörige Wert der abhängigen Veränderlichen ist. Nach (2) ist auch der neue Wert von y gleich dem c-fachen des neuen Wertes von x vermehrt um k, also

$$y + \text{Zuwachs von } y = c\,(x + \text{Zuwachs von } x) + k$$

oder:

$$y + \Delta y = c\,(x + \Delta x) + k. \tag{3}$$

Um nun links nur die Zunahme Δy von y zu haben, ziehen wir die Formel (2) von der Formel (3) ab. Dann bleibt übrig:

$$\Delta y = c\,\Delta x,$$

in Worten: der Zuwachs von y ist stets gleich dem c-fachen des Zuwachses von x. Man wird einwenden, daß das ja schon nach S. 28 bekannt sei. Aber das ist irrig, dort nämlich wurden nur solche Zunahmen von x und y ins Auge gefaßt, bei denen die ursprünglichen Werte die Anfangswerte a und b waren. Jetzt dagegen ist bewiesen worden, daß die Proportionalität zwischen den Zunahmen auch dann besteht, wenn man von irgendeinem Werte x und dem zugehörigen Werte y ausgeht.

Dividieren wir die letzte Formel mit Δx, so kommt:

Satz 6: Bei einer linearen Funktion

$$y = cx + k$$

ist das Verhältnis aus einem Zuwachs von y und dem zugehörigen Zuwachs von x stets gleich der Konstante c:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = c.$$

Wir können auch sagen:

Satz 7: Eine lineare Funktion

$$y = cx + k$$

wird durch eine Gerade dargestellt, deren Steigung c gleich dem Quotienten beliebiger zusammengehöriger Zunahmen Δy und Δx von y und x ist:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = c.$$

Dies leuchtet auch geometrisch ein:

Wenn wir auf der Geraden (siehe Fig. 29) irgend zwei Punkte wählen und dann den ersten in den zweiten übergehen lassen, wächst sein x um eine Größe Δx, sein y um eine Größe Δy. Das Verhältnis $\Delta y : \Delta x$ bleibt nun immer dasselbe, wo wir auch die beiden Punkte auf der Geraden wählen mögen. Diese Eigenschaft kommt nur den Geraden zu. Sie ist der Ausdruck der „Geradlinigkeit". Rechnerisch ist sie kennzeichnend dafür, daß y eine „lineare" Funktion von x ist. Beim Wort „linear" im Ausdruck „lineare Funktion von x" kann man also immer an zweierlei denken: Einmal daran, daß in dieser Funktion x nur linear, d. h. in der ersten Potenz auftritt, und dann daran, daß diese Funktion mit Hilfe des Lineals bildlich dargestellt werden kann.

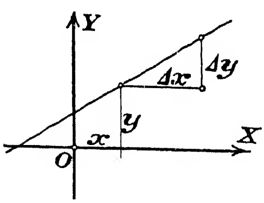


Fig. 29.

Wir können uns wohl denken, daß man findet, die Sätze 6 und 7 seien selbstverständlich; es lohne sich nicht recht, sie besonders abzuleiten und auszusprechen. Aber man wird doch vielleicht anderer Meinung, wenn man das folgende Beispiel mit seinem etwas verblüffenden Ergebnisse durchnimmt:

12. Beispiel: Um eine recht große Kugel, z. B. von der Größe der Erde, denke man sich längs des Äquators einen Ring gelegt, der aus eisernen Schienen von 1 m Länge zusammengesetzt sei. Angenommen, in diesen Ring, der gerade genau um die

Kugel herumpaßt, werde noch eine einzige Schiene von 1 m Länge eingeschaltet. Dadurch wird der Ring ein wenig locker. Um wieviel wird er jetzt allseitig von der Kugel abstehen? Stellt man sich die Riesenlänge des Äquators gegenüber der einzuschaltenden Schiene von 1 m Länge vor, so ist man geneigt zu vermuten, daß die Lockerung höchstens ein Paar Millimeter beträgt. Auch wird man glauben, daß die Frage erst dann genau beantwortet werden könne, wenn die Länge des Kugelradius angegeben sei. Beides ist irrig. Beträgt nämlich der Kugelradius x m, so hat der Äquator den Umfang $y = 2\pi x$ m, d. h. der Umfang y ist eine lineare Funktion des Radius x. Daraus folgt: Wächst der Radius um irgendeinen Betrag, so wächst der Umfang um das 2π-fache dieses Betrages. Nun soll dieser Umfang um 1 m wachsen, also wird der Radius um 1 m, dividiert mit 2π, wachsen. Das aber sind rund 16 cm. Demnach wird der neue, nur um 1 m längere Ring überall von der Kugel um nicht weniger als 16 cm abstehen. Dies gilt, wie groß auch immer der Radius gewählt sei.

Der Leser wird sich wahrscheinlich darüber wundern, daß wir so ausführlich von den linearen Funktionen und ihrer Darstellung durch gerade Linien gesprochen haben. Aber wir glauben dadurch etwas erreicht zu haben, was ihm nur angenehm sein kann. Wir hoffen nämlich, daß dem Leser das, was wir in unseren Sätzen 1 bis 7 ausgesprochen haben, nunmehr im Gedächtnis haftet, ohne daß er die Mühe hat, es auswendig zu lernen. Das Auswendiglernen ist in der Mathematik von Übel. Man soll sich die Sätze dadurch merken, daß man sie nach allen Richtungen durchdenkt und wiederholt anwendet.

§ 2. Quadratische Funktionen.

Jetzt gehen wir zu Funktionen über, die x auch in der zweiten Potenz enthalten, zu Funktionen zweiten Grades oder quadratischen Funktionen:

(1) $$y = ax^2 + bx + c,$$

wo a, b, c Konstanten bedeuten. Schon in § 3 des ersten Kapitels, im 4. Beispiele kam eine derartige Funktion vor, nämlich:

$$y = 0{,}1\,x^2 - 0{,}4\,x + 0{,}2,$$

siehe Fig. 10 auf S. 20. Während bei den linearen Funktionen $y = cx + k$ nur zwei Konstanten, c und k, auftraten, kommen bei den quadratischen Funktionen (1) drei Konstanten a, b, c vor. Je nachdem man sie wählt, erhält man verschiedenartige quadratische Funktionen.

Zunächst betrachten wir die einfachste quadratische Funktion, nämlich:

(2) $$y = x^2.$$

Ihre graphische Darstellung verlangt die Auffindung aller Punkte, deren Ordinaten gleich den Quadraten der Abszissen sind. Setzen wir $x = 1$, 2, 3, 4 . . . , so kommt $y = 1$, 4, 9, 16 . . . , wodurch sich Punkte

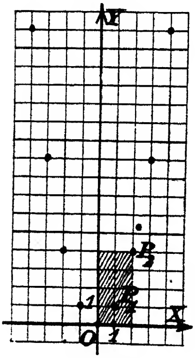


Fig. 30.

der Fig. 30 ergeben, in der wir die x-Einheit gleich der y-Einheit gewählt haben. Für $x = -1, -2, -3, -4 \ldots$ gehen dieselben Werte von y wie soeben hervor: 1, 4, 9, 16 ... Für $x = 0$ ist $y = 0$. Man sieht, daß sich die Punkte mit einer gewissen Regelmäßigkeit aneinanderreihen. Dazwischen kann man andere Werte einschalten, z. B. für $x = 2{,}3$ kommt $y = 5{,}29$. Derselbe Wert von y ergibt sich für $x = -2.3$. Überhaupt: Werden für x zwei Werte a und $-a$ gewählt, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, so ergibt sich beide Male für y derselbe Wert $y = a^2$. Dies hat eine einfache geometrische Bedeutung: Punkte mit entgegengesetzt gleichen Abszissen a und $-a$ und gleicher Ordinate liegen so, daß ihre Verbindende auf der y-Achse senkrecht steht und von ihr in der Mitte geteilt wird (siehe Fig. 31). Indem man sich an eine bekannte Eigenschaft des Spiegels erinnert, drückt man dies so aus: Einer der beiden Punkte geht durch Spiegelung an der y-Achse in den anderen über. Dies bedeutet: Fällt man vom einen Punkte das Lot auf die y-Achse und verdoppelt man es über den Fußpunkt hinaus, so kommt man zum andern Punkt. Für das Bild der quadratischen Funktion $y = x^2$ ergibt sich mithin die Eigenschaft: Jeder Bildpunkt geht durch Spiegelung an der y-Achse wieder in einen Bildpunkt über. Das Stück des Bildes, das rechts von der y-Achse liegt, geht in das linke Stück über, wenn man die rechte Ebenenhälfte um die y-Achse nach links herumklappt wie ein Blatt in einem Buche. Die y-Achse ist mithin eine sogenannte Symmetriegerade des Bildes der Funktion $y = x^2$.

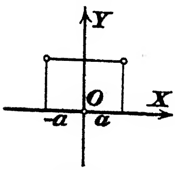


Fig. 31.

Die Formel (2) lehrt ferner, daß alle Ordinaten y, weil sie Quadrate sind, positive Werte haben, d. h.: das Bild der Funktion $y = x^2$ liegt nur im ersten und zweiten Quadranten (siehe S. 25).

Wenn wir für viele Werte von x die zugehörigen Werte von y berechnen, wie z. B. für

$$x = 0 \quad 0{,}5 \quad 1 \quad 1{,}5 \quad 2 \quad 2{,}5 \quad 3 \quad 3{,}5 \quad \text{usw.}$$

die Werte:

$$y = 0 \quad 0{,}25 \quad 1 \quad 2{,}25 \quad 4 \quad 6{,}25 \quad 9 \quad 12{,}25 \quad \text{usw.},$$

und dann die zugehörigen Bildpunkte einzeichnen, beobachten wir immer

wieder, daß sich diese Punkte in einer regelmäßigen Folge aneinanderreihen. Je mehr Stellen man einreiht, um so mehr tritt die Regelmäßigkeit hervor. Wir wollen dies für das Stück von $x = 0$ bis $x = 2$ genauer erläutern. Es kommt:

x	y	x	y	x	y	x	y
0,1	0,01	0,6	0,36	1,1	1,21	1,6	2,56
0,2	0,04	0,7	0,49	1,2	1,44	1,7	2,89
0,3	0,09	0,8	0,64	1,3	1,69	1,8	3,24
0,4	0,16	0,9	0,81	1,4	1,96	1,9	3,61
0,5	0,25	1,0	1,00	1,5	2,25	2,0	4,00

Die zugehörigen Bildpunkte können wir in Fig. 30 unmöglich deutlich einzeichnen. Wir tun daher das, was dem Mikroskopieren bei Naturbeobachtungen entspricht: Wir vergrößern die Figur. Das in Fig. 30 geschraffte Rechteck ist in Fig. 32 in zehnfacher Vergrößerung dargestellt. Hier können wir alle durch die Tafel gegebenen Punkte deutlich einzeichnen. Wollen wir in der Nähe des Punktes P_1 oder $(1\,;1)$ noch mehr Punkte einschalten, etwa von $x = 0{,}9$ an bis $x = 1{,}1$, so werden wir das in Fig. 32 geschraffte Rechteck abermals in zehnfacher Größe zeichnen und dann die durch die folgende Tafel gegebenen Punkte ermitteln. In der jetzt entstehenden Fig. 33 liegen die Bildpunkte beinahe in gerader Linie; zur Vergleichung ist eine gerade Linie durch P_1 in Fig. 33

x	y	x	y	x	y	x	y
0,90	0,8100	0,96	0,9216	1,01	1,0201	1,06	1,1236
0,91	0,8281	0,97	0,9409	1,02	1,0404	1,07	1,1449
0,92	0,8464	0,98	0,9604	1,03	1,0609	1,08	1,1664
0,93	0,8649	0,99	0,9801	1,04	1,0816	1,09	1,1881
0,94	0,8836	1,00	1,0000	1,05	1,1025	1,10	1,2100
0,95	0,9025						

eingezeichnet. Will man die Umgebung von P_1 noch genauer ins Auge fassen, so berechnet man die Ordinaten y für Werte von x zwischen 0,99 und 1,01 und zeichnet wieder ein kleines Stück der Fig. 33 in zehnfacher Vergrößerung. Man wird dann finden, daß die Bildpunkte kaum erkennbar von einer geraden Linie abweichen. Dies Verfahren kann beliebig weit fortgesetzt werden.

Wir gelangen dadurch zu dem Erfahrungssatze, daß in der allernächsten Nähe des Punktes P_1 oder $(1\,;1)$ die Bildpunkte der quadratischen Funktion $y = x^2$ außerordentlich wenig von einer geraden Linie abweichen.

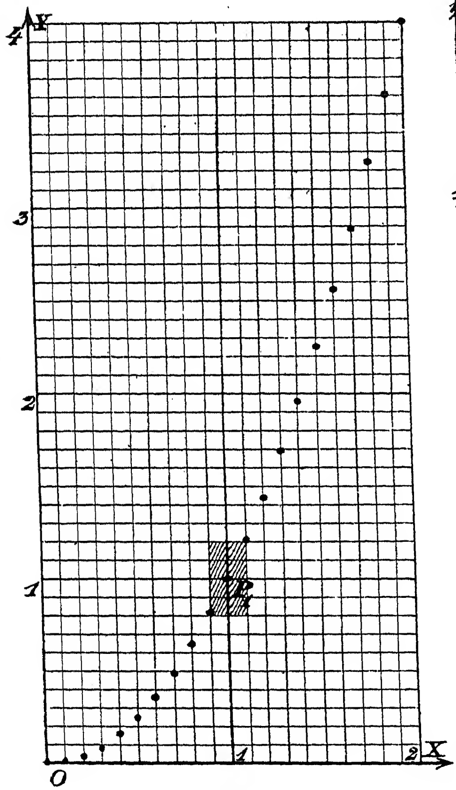


Fig. 32.

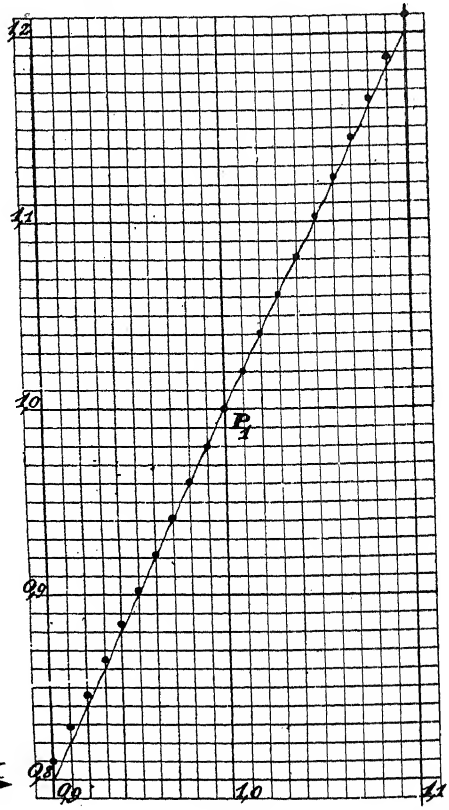


Fig. 33.

Dasselbe Verfahren könnten wir an einer anderen Stelle anwenden. Wir würden auch dort eine außerordentlich starke Annäherung der Bildpunkte an eine gerade Linie feststellen können. Aber solche einzelne Untersuchungen genügen doch nicht. Denn Gewißheit über die aufgestellte Behauptung ließe sich auf diesem Wege nur dadurch schaffen, daß wir die Untersuchung für jeden Wert von x wirklich ausführten, was unmöglich ist, weil es unendlich viele Werte von x gibt. Die Macht des mathematischen Beweises, zu dem wir jetzt übergehen, liegt darin, daß er die Aufgabe, unendlich viele Einzelergebnisse festzustellen, lösbar macht, indem er eine Unzahl von einzelnen Schlußfolgerungen in nur eine zusammenfaßt.

Wir schließen nämlich so: Angenommen, irgendein bestimmter Wert der unabhängigen Veränderlichen sei ins Auge gefaßt. Zu ihm gehört nach

(2) ein bestimmter Wert der abhängigen Veränderlichen y, nämlich $y = x^2$. Jetzt lassen wir den Wert x um irgendeinen Betrag zunehmen. Da die abhängige Veränderliche stets gleich dem Quadrat der unabhängigen sein soll, wird sich y mit x ändern. Ebenso wie

$$y = x^2 \tag{2}$$

ist, haben wir auch:

$$y + \text{Zunahme von } y = (x + \text{Zunahme von } x)^2.$$

Wenn wir nun die Zunahme, die dem x erteilt wird, wie auf S. 39 mit $\varDelta x$ und die zugehörige Zunahme von y mit $\varDelta y$ bezeichnen, kommt:

$$y + \varDelta y = (x + \varDelta x)^2. \tag{3}$$

Um die Zunahme $\varDelta y$ selbst auszudrücken, subtrahieren wir hiervon den Wert (2) und erhalten:

$$\varDelta y = (x + \varDelta x)^2 - x^2$$

oder, wenn das Quadrat von $x + \varDelta x$ ausgerechnet wird:

$$\varDelta y = x^2 + 2x \,.\, \varDelta x + \varDelta x^2 - x^2.$$

Hier soll $\varDelta x^2$ das Quadrat der Zunahme $\varDelta x$ von x bedeuten.[1] Die beiden Glieder x^2 heben einander fort, und es bleibt:

$$\varDelta y = 2x \,.\, \varDelta x + \varDelta x^2. \tag{4}$$

Diese Formel für die Zunahme $\varDelta y$ der abhängigen Veränderlichen gilt bei der in Rede stehenden Funktion $y = x^2$ ganz allgemein, d. h. für jeden beliebig gewählten ursprünglichen Wert x und für jeden beliebig gewählten Zuwachs $\varDelta x$ von x. Dies möge man an einigen Zahlenbeispielen bestätigen. Wir geben nur eines an: Wird $x = 2$ und $\varDelta x = 1$ gewählt, so liefert (4) den Wert $\varDelta y = 5$. Geht man also von demjenigen Bildpunkte der Funktion $y = x^2$ aus, dessen Abszisse $x = 2$ ist (der also die Ordinate $y = 4$ hat, nämlich Punkt P_2 in Fig. 30), und läßt man seine Abszisse um $\varDelta x = 1$ sowie seine Ordinate um $\varDelta y = 5$ wachsen, so gelangt man wieder zu einem Bildpunkte der Funktion, nämlich zu dem mit den Koordinaten 3 und 9 (der ebenfalls in Fig. 30 angegeben ist). Man kann die Formel (4) auch für negative Zunahmen $\varDelta x$ von x verwenden. So prüfe man z. B., was die Annahmen $x = 2$, $\varDelta x = -3$ ergeben, und verfolge dies in Fig. 30.

Obgleich die Zuwachsformel (4) für alle Werte von $\varDelta x$ gilt, wollen

[1] Dagegen würde $\varDelta (x^2)$ etwas ganz anderes bedeuten, nämlich die Zunahme des Quadrates von x, d. h. gerade die oben mit $\varDelta y$ bezeichnete Größe, die nicht gleich dem Quadrat die Zunahme von x ist.

wir sie in der Folge nur für geringe Zunahmen Δx benutzen. Schreiben wir die Formel in der Gestalt:

$$\Delta y = (2x + \Delta x) . \Delta x, \tag{5}$$

so schließen wir: Je geringer die Zunahme Δx ist, d. h. je weniger Δx von Null abweicht, um so weniger weicht $2x + \Delta x$ von $2x$ ab, um so weniger also Δy von $2x . \Delta x$. Da aber $2x . \Delta x$ den Faktor Δx hat, wird auch dieser Wert um so weniger von Null abweichen, je weniger Δx selbst von Null verschieden ist.

Wir haben es demnach in der Hand, durch hinreichende Beschränkung der Größe der Zunahme Δx von x zu erreichen, daß die zugehörige Zunahme Δy, die y erfährt, von Null um weniger abweicht als irgend eine noch so klein gewählte Größe. Wie man dies in jedem Falle zahlenmäßig erreicht, wird am besten an einem Beispiel erläutert. Daher sei etwa $x = 15$ gewählt, und es werde verlangt, daß Δy um weniger als 0,01 von Null abweiche, also zwischen $+0{,}01$ und $-0{,}01$ liege. Nach (4) ist hier $\Delta y = 30\,\Delta x + \Delta x^2$. Wenn man nun nach und nach für Δx die Werte 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001 usw. setzt, findet man für Δy die Werte

$$3{,}01, \quad 0{,}3001, \quad 0{,}030001, \quad 0{,}00300001 \text{ usw.}$$

Hieraus erkennt man: Wird Δx zwischen

$$-0{,}0001 \quad \text{und} \quad +0{,}0001$$

angenommen, so liegt Δy gewiß zwischen

$$-0{,}01 \quad \text{und} \quad +0{,}01,$$

wie verlangt wurde.

Dies hat folgende geometrische Bedeutung: Wenn wir die Bildpunkte der quadratischen Funktion $y = x^2$ in das Koordinatenkreuz einzeichnen, können wir immer neben jedem Bildpunkt einen zweiten Bildpunkt finden, dessen Abszisse und Ordinate so wenig von denen jenes Punktes abweichen, wie wir nur wollen, der also so nahe bei jenem ersten Bildpunkte liegt, wie wir nur immer wünschen. Wenn wir also immer mehr und mehr neue Bildpunkte einzeichnen, indem wir x immer enger aufeinanderfolgende Werte geben, werden auch die Bildpunkte eine immer enger werdende Kette ausmachen. Die Kette aller Bildpunkte hat demnach nirgends eine Lücke; sie wird daher stetig genannt.

Aber noch mehr: Aus (5) geht durch Division mit Δx hervor:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x. \tag{6}$$

Von jedem Wertepaare $(x; y)$ an ist also das Verhältnis aus dem Zuwachs von y und dem Zuwachs von x gleich dem doppelten des gewählten Wertes x, vermehrt um den angenommenen Zuwachs von x. Dieser Bruch (6) ist andererseits nach S. 31 nicht anderes als die Steigung derjenigen Geraden, die den Bildpunkt $(x; y)$ mit dem Bildpunkte $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ verbindet (siehe Fig. 34). Lassen wir den zweiten Punkt immer näher an den ersten rücken, d. h. wählen wir den Zuwachs Δx von x immer geringer, so daß der zugehörige Zuwachs Δy von y, wie beschrieben, ebenfalls immer geringer wird, so weicht der zweite Summand auf der rechten Seite der Formel (6) immer weniger von Null ab. Die rechte Seite nähert sich also mehr und mehr dem Werte $2x$, so daß der Bruch $\Delta y : \Delta x$ so wenig von $2x$ abweicht, wie wir nur immer wollen. Soll er z. B. weniger als ein Milliontel von $2x$ abweichen, so brauchen wir nur Δx kleiner als ein Milliontel anzunehmen.

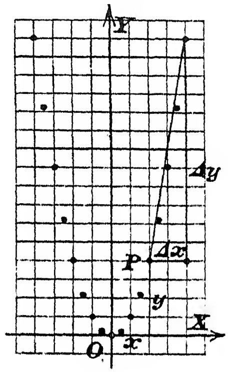


Fig. 34.

Also folgt: Diejenigen Bildpunkte der quadratischen Funktion, die einem bestimmt gewählten Bildpunkte P benachbart sind, liegen zugleich nahe bei derjenigen Geraden durch P, deren Steigung gleich $2x$ ist, wobei x die Abszisse von P bedeutet, und zwar liegen sie um so näher bei dieser Geraden, je näher jene Bildpunkte beim gewählten Bildpunkte P gelegen sind.

Die lückenlose oder stetige Kette aller Bildpunkte der quadratischen Funktion nähert sich also in jedem kleinen Stückchen, sobald man es nur hinreichend vergrößert zeichnet, um so mehr einer Geraden, je kürzer das betrachtete Stückchen ist. Denken wir uns, die Kette aller Bildpunkte liege gezeichnet vor, und nehmen wir an, wir betrachten eine Stelle der Kette mit einem außerordentlich scharfen Mikroskop, so wird das Stück, das man im Mikroskop sieht, nahezu geradlinig erscheinen und zwar um so mehr, je stärker das Mikroskop ist.

Mathematisch drückt man dies so aus:

Die Gesamtheit **aller** Bildpunkte $(x; y)$ der quadratischen Funktion $y = x^2$ erfüllt eine **stetige krumme Linie** oder **Kurve** (vom lateinischen curvus, krumm). An einer Stelle, deren Abszisse gleich x ist, schmiegt sich die Linie an diejenige Gerade durch diese Stelle an, der die Steigung $2x$ zukommt. Man sagt: Die Kurve **berührt** dort die bezeichnete Gerade,

oder auch: Die Kurve hat dort die bezeichnete Gerade als **Tangente** (vom lateinischen tangere, berühren).

Für $x = 1$ z. B. ist die Steigung dieser Tangente gleich 2. Erinnern wir uns daran, daß Fig. 33 ein hundertmal vergrößertes Stück der Fig. 30 in der Umgebung der Stelle P_1 mit der Abszisse $x = 1$ ist, so sehen wir, daß die in Fig. 33 gezeichnete schräge Gerade die Tangente der Kurve an der Stelle P_1 ist. In Fig. 35 ist Fig. 30 noch einmal wiederholt, aber mit der eingezeichneten Tangente der Stelle P_1. Die Punktreihe ist hier durch die stetige Kurve ersetzt worden. Das Einzeichnen der Tangente geschieht ja sehr einfach: Ihre Steigung soll 2 sein; da wir die Einheiten beider Achsen hier gleich groß gewählt haben, tragen wir also von P_1 aus irgendeine Strecke (in Fig. 35 ist die Strecke 3 gewählt worden) wagerecht an und errichten im Endpunkt eine doppelt so lange Strecke. Ihr Endpunkt T_1 ist ein Punkt der Tangente. — Wir können auch an jeder anderen Stelle der Kurve die Tangente ermitteln; wir werden sogar, ehe wir die Kurve zeichnen, zunächst nur für einzelne Punkte von ihr die Tangenten ziehen. So haben wir in Fig. 36 die Punkte gewählt:

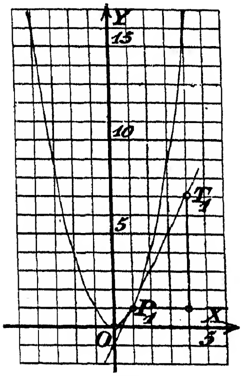


Fig. 35.

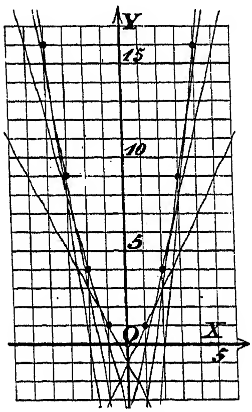


Fig. 36.

$x = -4$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 16$	9	4	1	0	1	4	9	16,

bei denen die Steigung $2x$ der Tangente die Werte hat:

-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8.

Im Punkte (2; 4) z. B. ist die Steigung der Tangente gleich 4. Wir gehen daher vom Punkte (2; 4) um etwa zwei Einheiten nach rechts und vom Ende um das Vierfache, d. h. um acht Einheiten, nach oben, um einen Punkt der Tangente dieser Stelle zu erhalten. Indem wir ihn geradlinig mit dem Punkte (2; 4) verbinden, bekommen wir die Tangente des Punktes (2; 4). An der Stelle (0; 0), dem Anfangspunkt O, ist die Steigung gleich Null, d. h. die x-Achse selbst die Tangente. Man sieht, daß

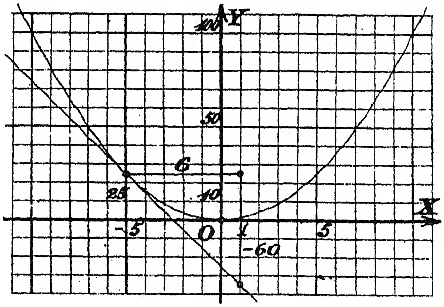


Fig. 37.

die neun in Fig. 36 gezeichneten Tangenten schon recht deutlich den Verlauf der Kurve angeben.

Sie steigt sehr steil an; wir können aber dieselbe quadratische Funktion $y = x^2$ durch eine weniger steile Kurve veranschaulichen, indem wir die y-Einheit kleiner als die x-Einheit annehmen. In Fig. 37 ist sie nur ein Zehntel so groß. Hier können wir deshalb auch die Punkte:

$x = \pm 5$	± 6	± 7	± 8	± 9	± 10
$y = 25$	36	49	64	81	100

zeichnen. Die zugehörigen Steigungen sind:

$$\pm 10 \mid \pm 12 \mid \pm 14 \mid \pm 16 \mid \pm 18 \mid \pm 20.$$

Die Pluszeichen beziehen sich auf die Stellen rechts, die Minuszeichen auf die Stellen links. Für den Punkt $(-5; 25)$ z. B. ist die Steigung gleich -10. Gehen wir also vom Punkte $(-5; 25)$ etwa um 6 x-Einheiten nach rechts und darauf um $-10 \cdot 6$ oder -60 y-Einheiten nach oben, anderes gesagt: um 60 y-Einheiten nach unten, so gelangen wir zu einem Punkte der Tangente der Stelle $(-5; 25)$.

Wir legen großes Gewicht darauf, daß der Leser das Beispiel $y = x^2$ in allen Einzelheiten vollkommen verstehe. Wer so weit ist, wird mit Leichtigkeit ähnliche Schlußfolgerungen bei anderen quadratischen Funktionen ziehen. Wir dürfen uns daher bei ihnen kürzer fassen.

Vorgelegt sei z. B. die quadratische Funktion:

$$y = \tfrac{1}{10}x^2 - x + 5. \tag{7}$$

Wächst x um Δx, so möge y um Δy zunehmen, d. h. zu dem Wert $x + \Delta x$ der unabhängigen Veränderlichen soll der Wert $y + \Delta y$ der abhängigen Veränderlichen gehören. Zwischen $y + \Delta y$ und $x + \Delta x$ soll also dieselbe Beziehung bestehen, die vermöge (7) zwischen y und x besteht. Daher soll sein:

$$y + \Delta y = \tfrac{1}{10}(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x) + 5$$

oder ausgerechnet:

$$y + \Delta y = \tfrac{1}{10}x^2 + \tfrac{1}{5}x\,\Delta x + \tfrac{1}{10}\Delta x^2 - x - \Delta x + 5.$$

Ziehen wir hiervon die Gleichung (7) ab, so bleibt als Wert von Δy:

Die Bildpunkte einer jeden quadratischen Funktion (10) erfüllen eine stetige krumme Linie, die im Punkt mit der Abszisse x von derjenigen Geraden durch diesen Punkt, deren Steigung gleich $2ax+b$ ist, berührt wird.

Dies Ergebnis, bei dem wir vorläufig stehen bleiben, könnten wir als einen Lehrsatz aussprechen, damit sichs der Leser merke. Aber glücklicherweise ist es nur vorläufig nötig, daß man dies Ergebnis im Kopfe habe. Im vierten Paragraphen werden wir nämlich erkennen, daß es nur ein besonderer Fall einiger leicht zu merkender allgemeinerer Sätze ist; wir dürfen schon jetzt versprechen, daß der Leser später dies Ergebnis als etwas ganz Selbstverständliches aufzufassen lernen wird. Daher ist es nicht erforderlich, das Gedächtnis unnötig zu belasten.

1. Beispiel: Die quadratische Funktion

$$y = -2x^2 + 5x - 8$$

soll graphisch dargestellt werden. Das Rechenschema ist hier dies:

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= -2(x+\Delta x)^2 + 5(x+\Delta x) - 8 \\ &= -2x^2 - 4x\Delta x - 2\Delta x^2 + 5x + 5\Delta x - 8, \\ \Delta y &= -4x\Delta x - 2\Delta x^2 + 5\Delta x \\ &= (-4x + 5 - 2\Delta x)\Delta x, \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= -4x + 5 - 2\Delta x. \end{aligned}$$

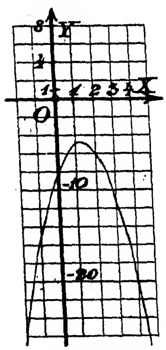


Fig. 40.

Die Tangente der Bildkurve an der Stelle mit der Abszisse x hat die Steigung $-4x+5$. Siehe Fig. 40, worin wir die y-Einheit kleiner als die x-Einheit gewählt haben, damit die krumme Linie nicht gar zu steil ausfällt.

2. Beispiel: Der Querschnitt eines 1 m langen und zuerst bis an den Rand mit Wasser gefüllten Troges hat die Form eines gleichschenkligen Trapezes $ABCD$ (siehe Fig. 41) von 40 cm Höhe, 20 cm unterer und 60 cm oberer Breite. Durch eine Öffnung unten fließe das Wasser aus und zwar in jeder Sekunde gerade ein Liter. Ist der Wasserspiegel nur noch x cm hoch, so ist eine gewisse Zeit verflossen. Sie soll als Funktion y von x bestimmt werden. y sei also die Zahl der Sekunden, in denen der Wasserspiegel von 40 cm bis auf x cm gefallen ist. Da in jeder Sekunde ein Liter abfließt, ist y zugleich die Zahl der bisher ausgeflossenen Liter, d. h. gleich dem in Litern gemessenen Volumen des Prismas, dessen Länge 1 m und dessen Querschnitt das Trapez $ABUV$ in Fig. 41 ist. Der Prismeninhalt ist gleich dem Produkt aus Länge und Querschnittfläche. Das Trapez $ABUV$ ist $(40-x)$ cm hoch, seine obere Kante ist 60 cm lang. Die Länge l seiner unteren Kante in Zentimetern ist leicht aus der Proportion

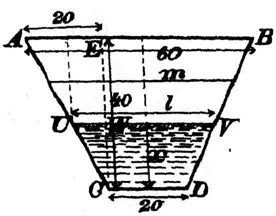


Fig. 41.

$$UW : WC = AE : EC$$

zu finden, da sie gibt:

$$\frac{\frac{1}{2}\,l - 10}{x} = \frac{20}{40};$$

also:

$$\tfrac{1}{2}\,l - 10 = \tfrac{1}{2}\,x \quad \text{oder} \quad l = 20 + x\,.$$

Die Mittellinie m des Trapezes $ABUV$ ist das Mittel von 60 und l, also

$$m = 30 + \tfrac{1}{2}\,l = 30 + 10 + \tfrac{1}{2}\,x = 40 + \tfrac{1}{2}\,x\,.$$

Die Fläche des Trapezes $ABUV$ ist gleich dem Produkt aus Höhe und Mittellinie, also gleich

$$(40 - x)\,(40 + \tfrac{1}{2}\,x)\ \text{qcm}\,,$$

daher der Raum des leeren Prismas gleich

$$100\,(40 - x)\,(40 + \tfrac{1}{2}\,x)\ \text{ccm}.$$

Ein Liter aber enthält 1000 ccm. Somit sind

$$\tfrac{1}{10}\,(40 - x)\,(40 + \tfrac{1}{2}\,x)\ \text{Liter}$$

abgeflossen, so daß die dazu nötige Sekundenzahl ebenfalls

$$y = \tfrac{1}{10}\,(40 - x)\,(40 + \tfrac{1}{2}\,x)$$

ist. Dies gibt ausmultipliziert und nach Potenzen von x geordnet:

$$y = -\tfrac{1}{20}\,x^2 - 2\,x + 160\,.$$

Die Zeit y ist also eine quadratische Funktion der Höhe x des Wasserspiegels. Da die größte Höhe des Wasserspiegels 40 cm beträgt, kommen für x nur die Werte zwischen 0 und 40 in Betracht. Für $x = 40$ ist $y = 0$, wie es sein muß. Für $x = 0$ ist $y = 160$, d. h. der Trog ist in 160 Sekunden geleert. Da x von 0 bis 40 und y von 160 bis 0 geht, wird man in der Fig. 42 die y-Einheit etwa $\frac{1}{4}$ so groß wie die x-Einheit wählen. Die Tangente der Kurve an der Stelle mit der Abszisse x hat die Steigung $-\frac{1}{10}x - 2$ (warum?), also für $x = 0$ die Steigung -2 und für $x = 40$ die Steigung -6.

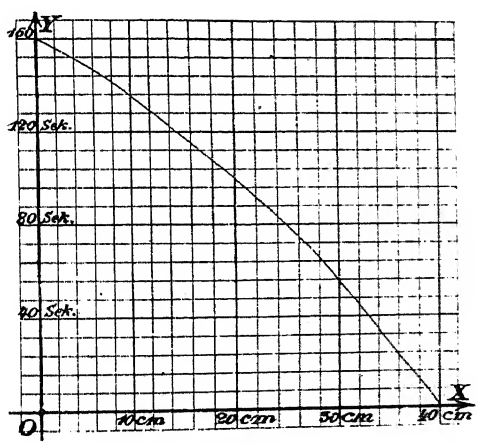


Fig. 42.

3. Beispiel: An einer Straße liegt ein dreieckiges **Grundstück** ABC mit der Seite AB, siehe Fig. 43. Der Punkt C liegt 25 m hinter der Seite AB. Die Dreieckshöhe von C aus treffe AB in D so, daß AD 20 m und DB 30 m lang ist. Auf dem Grundstücke soll längs der Straße AB ein Gebäude von rechteckigem Grundriß errichtet werden. Will man das Grundstück möglichst ausnutzen, so wird man die Tiefe UP

des Rechtecks so wählen, daß zwei seiner Ecken (U und V) auf AC und BC liegen, also etwa wie in Fig. 43, 44 oder 45. Je nach der gewählten Tiefe wird das Rechteck verschieden groß ausfallen. Um uns einen Überblick über alle Möglichkeiten zu verschaffen, berechnen wir die Fläche des Rechtecks für eine beliebige Tiefe UP. Die unabhängige Veränderliche ist die Länge x von UP in Metern, die abhängige der Inhalt y der Fläche $PQUV$ in Quadratmetern. Dieser Inhalt ist gleich dem Produkt

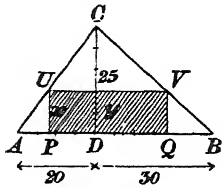


Fig. 43.

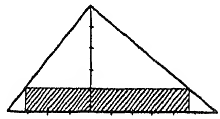


Fig. 44.

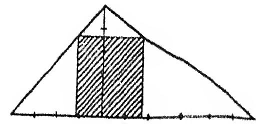


Fig. 45.

von Frontlänge PQ und Tiefe x des Grundrisses. PQ ist leicht zu berechnen, da wir AP und QB sofort finden können; es ist ja:

$$\frac{AP}{PU} = \frac{AD}{DC} \quad \text{und} \quad \frac{QB}{QV} = \frac{DB}{DC}$$

oder:

$$\frac{AP}{x} = \frac{20}{25} \quad \text{und} \quad \frac{QB}{x} = \frac{30}{25},$$

also:

$$AP = \tfrac{4}{5}\, x \quad \text{und} \quad QB = \tfrac{6}{5}\, x,$$

demnach:

$$PQ = AB - AP - QB = 50 - 2\,x.$$

Also kommt:

$$y = PQ \,.\, x = (50 - 2\,x)\, x$$

oder:

$$y = -2\,x^2 + 50\,x.$$

Die Grundfläche y des Gebäudes ist also eine quadratische Funktion der Tiefe x. Die unabhängige Veränderliche x kümmert uns nur zwischen den Grenzen $x = 0$ und

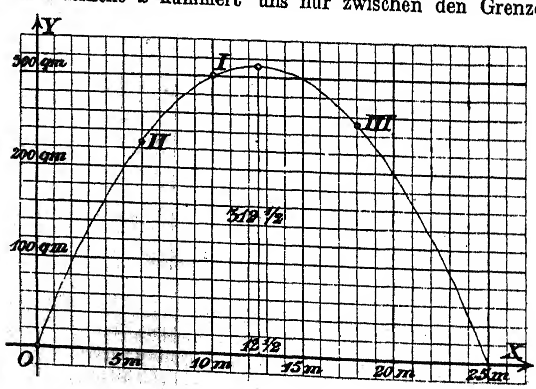


Fig. 46.

$x = 25$. Für $x = 0$ und für $x = 25$ ergibt sich $y = 0$, was auch geometrisch erhellt, da das Rechteck in diesen Fällen eine Seite von der Länge Null hat. Die quadratische Funktion wird durch eine Kurve dargestellt. An der Stelle mit der Abszisse x hat die Tangente der Kurve die Steigung $-4x + 50$, was man nach den früheren Auseinandersetzungen berechnen möge. Für $x = 0$ ist die Steigung gleich 50, für $x = 25$ ist sie gleich -50. Siehe Fig. 46. In Fig. 43, 44 und 45 ist $x = 10$, 6 und 18 gewählt, also $y = 300$, 228 und 252. Dies gibt die Stellen I, II, III der Fig. 46. Die beste Ausnutzung des vorhandenen Grundstücks findet statt, wenn die Fläche y am größten ist. Offenbar ist y da am größten, wo die Tangente der Kurve zur x-Achse parallel ist, d. h. die Steigung Null hat. Da allgemein $-4x + 50$ die Steigung ist, wird sie gleich Null, wenn

$$-4x + 50 = 0$$

d. h.:

$$4x = 50 \quad \text{oder} \quad x = 12\tfrac{1}{2}$$

ist. Alsdann wird $y = 312\frac{1}{2}$. Also ist die größtmögliche Grundfläche des geplanten Gebäudes $312\frac{1}{2}$ qm. Sie wird erhalten, wenn die Tiefe des Grundrisses gleich $12\frac{1}{2}$ m, also halb so groß wie CD, gewählt wird. Dann ist $AP = \frac{4}{5}x = 10$ und $QB = \frac{6}{5}x = 15$. Siehe Fig. 47.

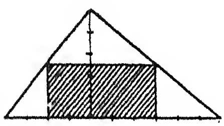


Fig. 47.

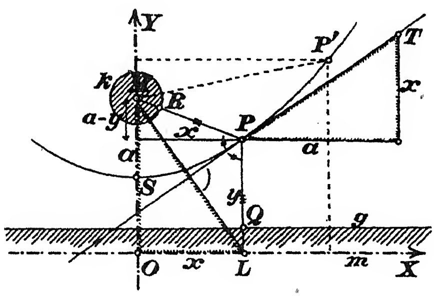


Fig. 48.

4. Beispiel: Das Ufer eines Sees sei die gerade Linie g in Fig. 48. Auf dem See liege eine kreisförmige Insel k mit der Mitte M. Angenommen, jemand erleidet auf dem See Schiffbruch und will möglichst schnell festen Boden erreichen. Er wird ans Ufer oder zur Insel schwimmen, je nachdem ihm das Ufer oder die Insel näher ist. In Zweifel kann er nur da sein, wo beide Entfernungen gleich sind. Wir wollen daher den Ort derjenigen Punkte P bestimmen, die vom Ufer g und von der Insel k dieselbe Entfernung haben. Für diese Punkte P ist PQ, das Lot auf g, gleich PR, der Strecke auf PM bis zum Kreis k. Wenn wir zur Linie g die Parallele m landeinwärts im Abstande gleich dem Kreisradius ziehen und PQ bis zu ihr, bis L, verlängern, muß also $PM = PL$ sein. Wir suchen mithin den Ort aller Punkte P, die von dem Punkte M dieselbe Entfernung wie von der Geraden m haben. Zu diesem Zwecke zeichnen wir in die Figur ein Achsenkreuz ein und zwar möglichst bequem: Als x-Achse wählen wir die Gerade m, als y-Achse das Lot hierzu durch M, so daß der Anfangspunkt O der Fußpunkt des Lotes auf m ist. Auf beiden Achsen wählen wir als Längeneinheit das Meter. Die Entfernung OM betrage a m. Hat nun der Punkt P die Koordinaten x und y, ist also $OL = x$ m und $LP = y$ m, so ist PM die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete gleich x m und dessen andere Kathete gleich $(a - y)$ m ist. Also kommt nach dem Satze des Pythagoras

$$x^2 + (a - y)^2 = PM^2.$$

Liegt P weiter von m entfernt als M, etwa an der Stelle P', so ist die zweite Kathete allerdings nicht $(a - y)$ m, sondern $(y - a)$ m lang. Aber das macht in der Formel für PM^2 nichts aus, weil $(a - y)^2 = (y - a)^2$ ist. Ferner ist das Quadrat von PL gleich y^2. Da $PM = PL$ sein soll, fordern wir mithin

$$x^2 + (a - y)^2 = y^2$$

oder:

$$x^2 + a^2 - 2ay = 0,$$

d. h.:

$$2ay = x^2 + a^2$$

oder:

$$y = \frac{1}{2a}x^2 + \frac{a}{2}.$$

Die Ordinate y ist daher eine quadratische Funktion der Abszisse x und der gesuchte geometrische Ort ihre Bildkurve. Sie geht durch die Mitte S von OM, da dieser Punkt von M und m gleiche Abstände hat. Für diesen Punkt ist $x = 0$ und $y = \frac{1}{2}a$. Die Steigung der Tangente der Kurve ist nach dem Früheren zu berechnen, nämlich gleich $x : a$. Wenn wir also von P nach rechts die Strecke a antragen und im Endpunkte nach oben die Abszisse x,[1] ergibt sich ein Punkt T der Tangente von P. Man erkennt, daß das soeben hergestellte rechtwinklige Dreieck mit der Hypotenuse PT dem rechtwinkligen Dreieck LOM kongruent ist, aber um 90° gegen dieses gedreht. Daher ist $PT \perp ML$. Weil außerdem $PM = PL$ ist, stellt PML ein gleichschenkliges Dreieck mit der Spitze P dar, dessen Höhe die Tangente von P ist. Also folgt: Die Tangente von P teilt den Winkel, den die beiden einander gleichen Strecken PM und PL miteinander bilden, in gleiche Teile.

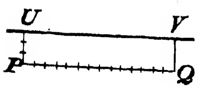


Fig. 49.

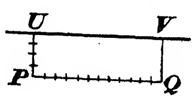


Fig. 50.

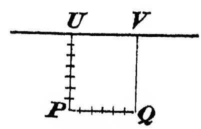


Fig. 51.

5. Beispiel: Längs einer vorhandenen geraden Mauer (siehe Fig. 49) soll ein rechteckiger Platz $UVPQ$ umzäunt werden. Dazu stehen 20 m Zaunlänge zur Verfügung. Man kann dem Rechteck verschiedene Gestalten geben, doch stets muß die Summe der Längen der zur Mauer senkrechten Wände und der zur Mauer parallelen Wand gleich 20 m sein. Wählen wir z. B. $PU = 3$ m, so ist auch $QV = 3$ m, so daß für PQ noch $20 - 6 = 14$ m bleiben, wie in Fig. 49. In Fig. 50 ist $PU = 4$, also $PQ = 20 - 2 . 4 = 12$, in Fig. 51 ist $PU = 7$, also $PQ = 20 - 2 . 7 = 6$ gewählt. Der Inhalt der abgegrenzten Fläche fällt in den verschiedenen Fällen verschieden groß aus. Um einen Überblick über alle Möglichkeiten zu erhalten, stellen wir den Zusammenhang zwischen dem Flächeninhalt und der gewählten Zerlegung der 20 m graphisch dar. Zwei Fragen hat man dabei zu beantworten. Zuerst: Welche Größe ist hier die unabhängige Veränderliche? Wollen wir eine der Figuren 49 bis 51 herstellen, so gehen wir von irgendeiner Zerlegung der 20 m in zwei gleiche Teile PU und QV und einen dritten Teil PQ aus. Also ist die unabhängige Veränderliche x etwa die Länge von PU ($= QV$). Dann hat PQ die Länge $20 - 2x$. Zweitens: Welche

[1] Man beachte, daß die Einheiten auf beiden Achsen gleich groß gewählt sind.

Größe ist die abhängige Veränderliche? In den verschiedenen Figuren fällt die Fläche verschieden groß aus; sie ist also die abhängige Veränderliche y. Wird sie in Quadratmetern gemessen, so kommt

$$y = x\,(20 - 2x) = -2x^2 + 20x,$$

also eine quadratische Funktion von x. Fig. 52 gibt ihre Darstellung. Wie groß ist die Steigung der Tangente des Punktes mit der Abszisse x? Innerhalb welcher Grenzen darf sich x bewegen? Für welche Abszisse x ist die Ordinate am größten? Wie zerlegt man also die 20 m Zaunlänge am günstigsten? Welche Form hat dann der Platz?

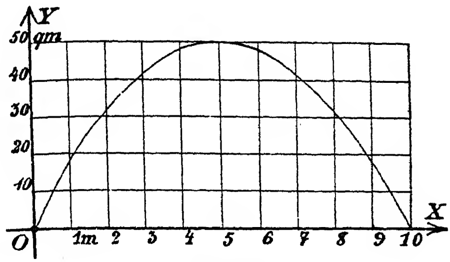


Fig. 52.

6. **Beispiel:** Ein unterirdischer Kanal soll gebaut werden, dessen Querschnitt die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreise hat, siehe Fig. 53. Die Kosten

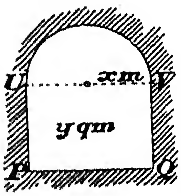


Fig. 53.

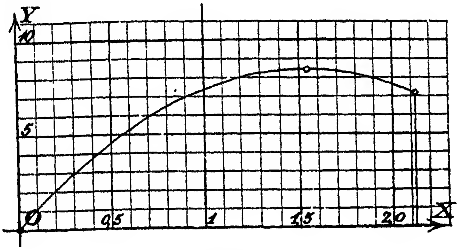


Fig. 54.

der Ummauerung richten sich nach dem Umfange des Querschnittes. Ist ein bestimmter Kostenbetrag ausgeworfen, so heißt dies daher, daß der Umfang des Querschnittes vorgeschrieben ist. Er betrage 11 m. Will man einen Querschnitt von diesem Umfange zeichnen, so kann man zunächst den Radius des Halbkreises innerhalb gewisser Grenzen beliebig wählen. Er betrage x m. Wie lang ist der Halbkreis über UV, wie lang die Sohlenbreite PQ? Wie viele Meter bleiben also für PU und QV zusammen übrig? Wie lang ist demnach PU? Wie groß ist also die Fläche des Rechtecks $PQUV$? Wie groß ist die Fläche des ganzen Kanaldurchschnittes? Sie wird sich als quadratische Funktion von x ergeben. Wir bezeichnen sie mit y (in Quadratmetern). Man entwerfe **selbst** das in Fig. 54 gegebene Bild der Funktion. x ist mindestens gleich Null. Wie groß **darf** x höchstens sein? Wie groß ist die Steigung der Bildkurve an der Stelle mit der **Abszisse** x? An welcher Stelle ist die Tangente der Kurve zur x-Achse parallel? Welche Bedeutung hat diese Stelle für unsere Aufgabe?

Hat der Leser alle Fragen der beiden letzten Beispiele beantwortet, so **hat** er eine gute Selbstprüfung abgelegt. Wir fügen hier noch einige **einfache** Beispiele zu eigener Bearbeitung hinzu, bei denen wir weniger **Hilfe leisten:**

7. **Beispiel:** Ein Rechteck von 7 cm Umfang soll hergestellt werden. Welche Strecke x kann beliebig gewählt werden? Welche Funktion von x ist die Fläche y

des Rechtecks? Wie muß das Rechteck gezeichnet werden, damit es den größten Inhalt habe?

8. Beispiel: Der mittlere Ausdehnungskoeffizient α des Quecksilbers, d. h. diejenige Zahl α, mit der man das Volumen des Quecksilbers bei t^0 C. multiplizieren muß, um den Volumenzuwachs bei der Erwärmung auf $(t + 1)^0$ C. zu erhalten, hat den Wert:

$$\alpha = 0{,}000\,181\,163 + 0{,}000\,000\,011\,54\, t + 0{,}000\,000\,000\,021\,187\, t^2,$$

ist also eine quadratische Funktion von t. Man versuche, sie graphisch darzustellen, indem man t als Abszisse, α als Ordinate benutze. Woran scheitert dieser Versuch?

9. Beispiel: x Personen treffen einander. Sie reichen sich gegenseitig die Hand zum Gruß. Wie viele Händedrücke ereignen sich? Man stelle ihre Zahl y graphisch dar. Hier tritt ein besonderer Fall ein, indem der Natur der Sache nach die unabhängige Veränderliche x nur eine ganz positive Zahl sein darf. Aber auch für alle anderen Werte von x gibt die Formel für die Zahl y einen Wert, so daß man trotzdem eine Kurve findet, wenn auch für das vorliegende Beispiel nur gewisse Stellen der Kurve in Betracht kommen.

Einige Beispiele lassen einen erwähnenswerten Umstand erkennen: Die unabhängige Veränderliche x wird durch die Art der Aufgabe häufig insofern beschränkt, als sie nur innerhalb gewisser Grenzen veränderlich ist. So ist sie im 2. Beispiel auf die Werte zwischen 0 und 40 und im 9. auf ganzzahlige positive Werte beschränkt. Dennoch ergeben sich für alle Werte von x zugehörige Werte von y. Die Bildkurven erstrecken sich ins Unendliche, aber in den Beispielen kommt es nur auf Stücke von ihnen an.

§ 3. Grenzwerte, Unendlichkleines, Differentiale und Differentialquotienten.

Überlegungen, wie wir sie namentlich auf S. 51, 52 machten, kehren an sehr vielen Stellen unseres Buches wieder; zur Vermeidung ermüdender Wiederholungen ist es deshalb nützlich, nur noch einmal das, worauf es wesentlich ankommt, auseinanderzusetzen und diejenigen Redeweisen zu erklären, die man dabei gebraucht. Überall wo später die nachher zu erklärenden Schlagworte Grenzwert oder Grenze, Unendlichkleinwerden, Differentiale und Differentialquotienten gebraucht werden, muß man sich an das erinnern, was wir uns jetzt zu erörtern anschicken. Hiernach sind die Auseinandersetzungen des gegenwärtigen Paragraphen von grundlegender Bedeutung und von der größten Wichtigkeit für das ganze Buch.

Zur Vorbereitung einige Worte über Größen oder Zahlen überhaupt. Eine Zahl kann positiv, gleich Null oder negativ sein[1]. Ist sie negativ,

[1] Von imaginären Zahlen soll hier überhaupt noch gar nicht geredet werden.

so versteht man unter ihrem absoluten Betrag eben dieselbe Zahl, aber mit dem Pluszeichen[1]. So hat — 3 den absoluten Betrag 3. Weil man von vornherein von einer Größe oft nicht weiß, ob sie negativ ist, braucht man die Bezeichnung: absoluter Betrag auch bei positiven Zahlen und bei der Null, indem man darunter eben diese Zahlen selbst versteht. Danach hat 3 den absoluten Betrag 3 und die Null den absoluten Betrag 0. Der absolute Betrag einer Zahl ist also stets positiv oder — und zwar nur der von Null — gleich Null. Man kennzeichnet ihn durch Einschluß der Zahl zwischen zwei senkrechten Strichen. Danach ist $|a|$ der absolute Betrag von a, also z. B. $|-0{,}5| = 0{,}5$, aber auch $|0{,}5| = 0{,}5$. Den absoluten Betrag einer Zahl nennt man auch die absolut genommene Zahl.

Der absolute Betrag einer Summe wird gewiß nicht kleiner, wenn man jeden negativen Summanden durch seinen absoluten Betrag ersetzt. So hat die Summe $-5+2$ den Wert -3, also den absoluten Betrag 3, und dieser wird vergrößert, falls man -5 in der Summe durch 5 ersetzt, denn dann kommt 7 heraus. Offenbar gilt also der

Satz 8: Der absolute Betrag einer Summe ist kleiner als die Summe der absoluten Beträge der Summanden oder höchstens gerade so groß, in Formel:

$$|a+b+c+\ldots| \leqq |a|+|b|+|c|+\ldots$$

Wenn man bedenkt, wie sich das Vorzeichen eines Produktes oder Quotienten aus den Vorzeichen der einzelnen Glieder ergibt, leuchtet ferner sofort ein der

Satz 9: Der absolute Betrag eines Produktes oder Quotienten ist gleich dem Produkt oder Quotienten der absoluten Beträge aller Glieder, in Formel:

$$\left|\frac{a.b.c\ldots}{\alpha.\beta.\gamma\ldots}\right| = \frac{|a|.|b|.|c|\ldots}{|\alpha|.|\beta|.|\gamma|\ldots}.$$

So ist $|-3.4| = |-12| = 12$ und auch $|-3|.|4| = 3.4 = 12$.

Die Zahlen stehen in einer Rangordnung, indem jede Zahl größer oder kleiner als eine von ihr verschiedene Zahl ist. So ist 3 kleiner als 4, aber größer als -4. Zwischen einer sehr kleinen positiven Zahl und einer sehr kleinen Zahl überhaupt besteht aber ein Unterschied: Zwar ist z. B. 0,000001 eine sehr kleine positive Zahl, aber die negativen Zahlen

[1] Sehr gebräuchlich, aber dennoch falsch ist es, vom positiven und negativen Vorzeichen statt vom Plus- und Minuszeichen zu reden. Nicht das Vorzeichen ist positiv oder negativ, sondern die Zahl. Dieser sprachliche Fehler steht in einer Reihe mit der beliebten Redeweise: billige Preise statt, wie es richtig heißt, billige Waren.

-10, -20 usw. sind doch noch kleiner. Soll eine Zahl nahe bei Null liegen, so ist das nicht dasselbe, als wenn wir sagen: sie soll sehr klein sein. Dies wäre nur dann der Fall, wenn wir uns auf positive Zahlen beschränkten. Wohl aber liegt eine positive oder negative Zahl a nahe bei Null, sobald ihr absoluter Betrag $|a|$ sehr klein ist. Der kleinste Wert, den ein absoluter Betrag überhaupt haben kann, ist ja die Null. Ferner liegt a um so näher bei b, je kleiner der absolute Betrag $|a-b|$ der Differenz ist, und dabei kann a größer oder kleiner als b sein.

Nach diesen Vorbemerkunngen sprechen wir darüber, daß eine Veränderliche u nach einem bestimmten Wert **strebt**, und beginnen mit einigen einfachen Beispielen:

Lassen wir die Veränderliche u nach einander die Werte

$$(1) \qquad 1{,}9, \quad 1{,}99, \quad 1{,}999, \quad 1{,}9999 \quad \text{usw.}$$

annehmen oder, wie man auch sagt, diese endlose Reihe von Werten durchlaufen, so nähert sie sich immer mehr der Zahl 2, ohne sie je zu erreichen. Die Annäherung kann man beliebig weit treiben. Um weniger als ein Milliontel weicht u von 2 ab, falls u den sechsten Wert in der Reihe (1) durchlaufen hat, und zwar gilt es von da an für alle folgenden Werte (1). Dabei nähert sich u beständig **wachsend** dem Wert 2.

Dagegen nähert sich die Veränderliche u beständig **abnehmend** dem Wert 2, falls sie die endlose Wertereihe

$$(2) \qquad 2{,}1, \quad 2{,}01, \quad 2{,}001, \quad 2{,}0001 \quad \text{usw.}$$

durchläuft. Im übrigen gilt hier dasselbe wie vorher.

Wenn u drittens die endlose Zahlenfolge

$$(3) \qquad 2+\tfrac{1}{1}, \quad 2-\tfrac{1}{2}, \quad 2+\tfrac{1}{3}, \quad 2-\tfrac{1}{4}, \quad 2+\tfrac{1}{5} \quad \text{usw.}$$

mit abwechselnden Summen und Differenzen durchläuft, nähert sich u ebenfalls (allerdings viel langsamer) immer mehr der Zahl 2, ohne

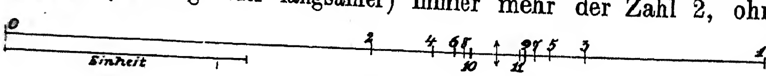


Fig. 55.

sie je zu erreichen. Hier aber ist u abwechselnd größer oder kleiner als 2, die Werte pendeln also um den Wert 2 herum. Fig. 55, worin die elf ersten Zahlen der Folge (3) durch die Strecken 01, 02, 03, 04 usw. veranschaulicht werden, soll dies geometrisch erläutern, natürlich nur in den ersten der unzählig vielen Schritte. Auch hier kann man die Annäherung so stark machen, wie man nur will.

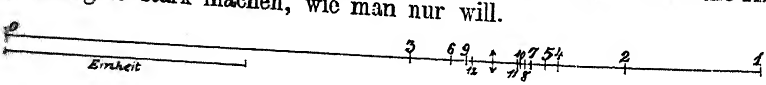


Fig. 56.

Noch anders verhält es sich, wenn u die endlose Wertereihe

(4) $$2+1,\quad 2+\tfrac{1}{2},\quad 2-\tfrac{1}{3},\quad 2+\tfrac{1}{4},\quad 2+\tfrac{1}{5},\quad 2-\tfrac{1}{6}\ \text{usw.}$$

durchläuft, worin nach je zwei Summen eine Differenz kommt. Denn auch hier nähert sich u zwar immer mehr dem Wert 2, aber so, daß abwechselnd je zwei Werte größer als 2 sind und dann ein Wert kleiner als 2 ist. Siehe Fig. 56.

Man kann beliebig viele andere endlose Zahlenfolgen ersinnen, von denen dasselbe gilt. Nur um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, führten wir solche Folgen vor, die gerade nach der Zahl 2 streben. Selbstverständlich lassen sich beliebig viele endlose Folgen aufstellen, die nach einer andern bestimmten Zahl streben. Man betrachte z. B. diese Folge:

(5) $$0{,}36,\quad 0{,}3636,\quad 0{,}363\,636\ \text{usw.}$$

Beim Durchlaufen dieser Wertereihe strebt die Veränderliche u nach dem Wert des periodischen Dezimalbruches

$$a = 0{,}363\,636\ldots,$$

den man leicht als gemeinen Bruch ermitteln kann. Denn Multiplikation mit 100 gibt

$$100\,a = 36{,}363\,636\ldots = 36 + a,$$

so daß $99\,a = 36$, also $a = \frac{4}{11}$ ist.

Irgendeine endlose Zahlenfolge wollen wir so bezeichnen:

(6) $$u_1,\quad u_2,\quad u_3,\quad u_4\ \text{usw.}$$

Die zur Unterscheidung angehängten Ziffern 1, 2, 3, 4 usw. geben an, die wievielte Zahl der Folge gemeint ist: u_n soll die n-te Zahl sein. Man nennt n den Index (Anzeiger). Soll die Folge (6) etwa die Folge (5) sein, so ist z. B. $u_3 = 0{,}363\,636$.

Wir haben nun genau festzustellen, was es heißt, daß die Veränderliche u beim Durchlaufen einer endlosen Zahlenfolge (5) nach einem bestimmten Wert a strebt. Wir verlangen, daß die Zahlen der Folge (6) von einem gewissen Index n an sämtlich von a um weniger abweichen, als jemand nur immer vorschreiben mag. Wählen wir also nach Gutdünken eine beliebig wenig von Null abweichende positive Zahl h, so soll es stets einen Index n derart geben, daß alle Werte der Zahlenfolge von u_n an, daß also u_n, u_{n+1}, u_{n+2} usw. sämtlich um weniger als h von a abweichen, d. h. daß die Differenzen $u_n - a$, $u_{n+1} - a$, $u_{n+2} - a$ usw. sämtlich abgesehen vom Vorzeichen kleiner als h ausfallen, anders ausgedrückt, daß alle absoluten Beträge

$$|u_n - a|,\quad |u_{n+1} - a|,\quad |u_{n+2} - a|\ \text{usw.}$$

kleiner als h werden. Dies soll wohlbemerkt gelten, wie klein wir auch die positive Zahl h angenommen haben. Wesentlich ist, daß zuerst diese beliebig kleine positive Zahl h gewählt wird und daß es dann eine Stellenzahl n derart geben soll, daß die absoluten Beträge von $u_n - a$, $u_{n+1} - a$, $u_{n+2} - a$ usw. sämtlich kleiner als h werden. Es soll also in unserer Macht liegen, immer von einer Stellenzahl an die Abweichungen von a so klein zu machen, wie wir wollen.

Statt dann zu sagen, die Veränderliche u strebe beim Durchlaufen der Zahlenfolge (6) nach a, sagt man auch, u habe den Grenzwert a, in Formel:

$$\lim u = a$$

gelesen „limes u gleich a“, indem man das lateinische Wort limes für Grenze braucht.

Kaum brauchte gesagt zu werden, daß es selbstverständlich endlose Zahlenfolgen gibt, bei deren Durchlaufen die Veränderliche u nicht nach einem bestimmten Grenzwert a strebt.

Im folgenden handelt es sich nun um Betrachtungen, bei denen zwar eine Veränderliche nach einem Grenzwerte streben soll. Aber diese Betrachtungen sollen so beschaffen sein, daß sie gelten, auf welche Art auch immer das Streben nach dem Grenzwerte stattfindet. Deshalb lassen wir uns nicht auf eine bestimmte endlose Zahlenfolge unter den unzählig vielen vorhandenen ein, sondern denken uns eine ganz beliebige. Das einzig als wesentlich Übrigbleibende ist also dies: Strebt die Veränderliche u nach einem Grenzwert a, so soll dies heißen: Nach genügend vielen Schritten soll u von a um weniger als eine beliebig klein angenommene positive Zahl h abweichen, d. h.

$$|u - a| < h$$

sein. Dies also ist die Bedeutung der Formel $\lim u = a$. Für den Gebrauch bedient man sich auch einer anderen Redeweise. Man sagt: die Differenz $u - a$ soll unendlichklein werden. Das Unendlichkleine ist hiernach in der Mathematik nur eine zur Vereinfachung eines sonst umständlichen Ausdruckes eingeführte Abkürzung und bedeutet keine philosophische Spitzfindigkeit.

Wir wollen jetzt annehmen, daß zwei veränderliche Größen u und v nach bestimmten Grenzen a und b streben:

$$\lim u = a, \quad \lim v = b.$$

Daß dann ihre Summe $u + v$ nach der Summe $a + b$ streben wird und ihre Differenz $u - v$ nach der Differenz $a - b$, dürfte dem Leser augenscheinlich sein. Denn es leuchtet ein, daß man u und v so nahe bei a und b annehmen kann, daß $u + v$ oder $u - v$ so wenig, wie man nur immer will, von $a + b$ oder $a - b$ abweicht.

Entsprechendes gilt für das Produkt uv und für den Quotienten $u:v$. Sie streben, falls u nach a und v nach b strebt, augenscheinlich nach ab und $a:b$. Dies wollen wir aber noch geometrisch veranschaulichen:

Im Fall eines **Produktes** verfahren wir so: Die veränderlichen Größen u und v veranschaulichen wir uns durch die Breite und Höhe eines Rechtecks, siehe Fig. 57, das dann den Flächeninhalt uv hat. Wenn nun u nach a und v nach b strebt, also sowohl $u-a$ als auch $v-b$ absolut genommen kleiner wird als eine beliebig klein angenommene positive Zahl h, erhellt, daß der Unterschied der Flächeninhalte uv und ab der beiden Rechtecke in Fig. 57 so klein gemacht werden kann, wie man nur will, wenn man eben nur h hinreichend klein wählt. Dies aber bedeutet: Wenn $\lim u = a$ und $\lim v = b$ ist, wird auch $\lim (uv) = ab$.

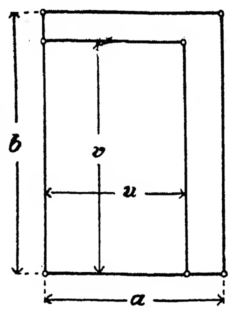


Fig. 57.

Wollen wir uns auch den Fall des **Quotienten** $u:v$ geometrisch veranschaulichen, so werden wir uns u als den Flächeninhalt eines veränderlichen Quadrates $ABCD$ und v als eine Strecke von veränderlicher Länge EA vorstellen, die wir auf der Geraden AD über A hinaus antragen, siehe Fig. 58. Wenn wir dann E mit B verbinden und auf EB in B das Lot errichten, wird dies Lot die Gerade AD in einem Punkte F treffen. Nun ist im rechtwinkligen Dreieck EBF das Quadrat der Höhe AB, also der Flächeninhalt u, gleich dem Rechteck aus den Abschnitten EA und AF der Hypotenuse, also aus v und AF, mithin $u = v \cdot AF$ oder $AF = u:v$. Somit wird der Quotient $u:v$ durch die Strecke AF dargestellt. Jetzt soll u nach a und v nach b streben. Wir geben uns a als den Inhalt eines Quadrates, des in Fig. 58 gestrichelten mit der Seite AB', während wir uns b durch die Strecke $E'A$ versinnlichen. Das in B' auf $E'B'$ errichtete Lot trifft die Gerade AD in einem Punkt F' so, daß $AF' = a:b$ ist. Nun erhellt: Wenn man B hinreichend nahe bei B' und E hinreichend nahe bei E' annimmt, rückt F so nahe an F', wie man nur immer will. Dies besagt: Wenn u nach a und v nach b strebt, wird auch $u:v$ nach $a:b$ streben. Anders ausgedrückt: Aus $\lim u = a$ und $\lim v = b$ folgt $\lim (u:v) = a:b$.

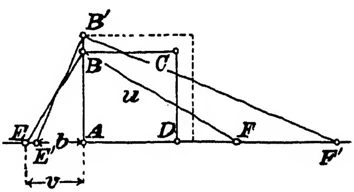


Fig. 58.

Beide Schlußfolgerungen, sowohl die für das Produkt uv als auch die

für den Quotienten $u : v$, kann man auch rein rechnerisch durchführen, jedoch ist das lange nicht so anschaulich wie die geometrische Behandlung, und deshalb wollen wir gar nicht darauf eingehen. Dagegen ist zu bemerken, daß unsere Schlußfolgerung für den Quotienten $u : v$ in einem Fall versagt. Denn es handelt sich hier darum, daß FF' beliebig klein gemacht werden kann, wenn B hinreichend nahe an B' sowie E hinreichend nahe an E' heranrückt, und dies trifft nicht zu, wenn das in B' auf $E'B'$ errichtete Lot die Gerade AD gar nicht in einem Punkte F' schneidet, sondern zu ihr parallel ist, d. h. wenn $E'B'$ zu AD senkrecht ist, mithin wenn E' in A liegt, also $E'A$ oder $b = 0$ ist. Der Schluß, daß $\lim (u : v) = a : b$ ist, falls $\lim u = a$ und $\lim v = b$ ist, gilt also nicht, wenn $b = 0$ ist. Die Annahme $b = 0$ ist jedoch überhaupt auszuschließen, weil die Division $a : b$ nicht erlaubt ist, wenn $b = 0$ ist. Dies wird ja schon auf der Schule gelehrt und beruht einfach darauf, daß die Division als die Umkehrung der Multiplikation erklärt wird. Denn unter $a : b$ wird diejenige Zahl c verstanden, die mit b multipliziert a gibt. Wenn aber $b = 0$ ist, gibt jede Zahl c multipliziert mit b Null. Ist also dann a nicht gleich Null, so ist die Division unmöglich. Auf der unerlaubten Division mit Null beruht ja auch der bekannte Trugschluß: Da $3 . 0 = 4 . 0$ ist, ergibt sich durch die nicht gestattete Division mit Null $3 = 4$.

Nur ganz nebenbei sei erwähnt: Ist nicht nur $a = 0$, sondern auch $b = 0$, so ist die Division $a : b$ nicht deshalb unerlaubt, weil sie etwa unmöglich wäre, sondern deshalb, weil sich jede beliebige Zahl c ergeben kann, denn $c . b$ ist stets gleich a, wenn a und b gleich Null sind.

Wahrscheinlich hat der Leser gar nicht gemerkt, daß wir bei den Beweisen in der Anknüpfung an Fig. 57 und 58 außer acht gelassen haben, ob die Formeln $\lim (uv) = ab$ und $\lim (u : v) = a : b$ auch hinsichtlich der Vorzeichen stimmen. In den Figuren haben wir ja nur Strecken und Flächen an sich, also absolut genommen, ins Auge gefaßt. Diese Lücke ist aber leicht auszufüllen: Nehmen wir zunächst an, daß weder a noch b gleich Null sei, so ist doch klar, daß u bei hinreichender Annäherung an a dasselbe Vorzeichen wie a bekommt, ebenso v bei hinreichender Annäherung an b dasselbe wie b. Also stimmen die Vorzeichen. Wenn $a = 0$ ist oder $b = 0$ ist, kommt es auf das Vorzeichen von uv gar nicht an, da ja dann $ab = 0$ ist, ebenso nicht, wenn $a = 0$ ist, auf das von $u : v$, da dann $a : b = 0$ ist.

Weil $\lim u = a$ und $\lim v = b$ angenommen wurde, können wir a und b auch mit $\lim u$ und $\lim v$ bezeichnen. Darum drücken sich unsere Ergebnisse in Formeln so aus:

$$(7)\quad \begin{cases} \lim(u+v) = \lim u + \lim v\,, \\ \lim(u-v) = \lim u - \lim v\,, \\ \lim(u\,.\,v) = \lim u\,.\,\lim v\,, \\ \lim(u:v) = \lim u : \lim v \text{ für } \lim v \neq 0\,. \end{cases}$$

Zum letzten Fall sei noch bemerkt: Wenn u nach einer von Null verschiedenen Zahl a, dagegen v nach dem bisher ausgeschlossenen Wert Null strebt, wird der absolute Betrag von $u:v$ immer größer, je weiter die Annäherung von u an a und von v an Null fortschreitet, d. h. $|u:v|$ strebt über jede noch so große positive Zahl hinaus. Man sagt dann, daß $|u:v|$ nach $+\infty$, dem Positiv-Unendlichgroßen strebt. Doch dies nur nebenbei.

Wenn Summen, Differenzen, Produkte oder Quotienten von mehr als zwei Gliedern vorkommen, gelten ganz entsprechende Grenzwertformeln. Dies kann man auf Grund von (7) leicht beweisen. Wir begnügen uns mit dem Beispiel eines Produktes $u\,v\,w$ von drei Faktoren. Wegen $uvw = (uv)\,.\,w$ gibt die dritte Formel (7), indem man sie auf das Produkt von zwei Faktoren uv und w anwendet:

$$\lim(u\,v\,w) = \lim[(u\,v)\,.\,w] = \lim(u\,v)\,.\,\lim w\,.$$

Nun aber gibt dieselbe Formel auch:

$$\lim(u\,v) = \lim u\,.\,\lim v\,.$$

Wird dies in die vorhergehende Gleichung eingeführt, so kommt:

$$\lim(u\,v\,w) = \lim u\,.\,\lim v\,.\,\lim w\,.$$

Ebenso einfach sind die übrigen Beweise. Somit ergibt sich überhaupt der

Satz 10: Der Grenzwert eines aus mehreren Veränderlichen durch Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division gebildeten Ausdruckes ist gleich demselben Ausdruck, gebildet für die Grenzwerte der einzelnen Glieder. Abzusehen ist dabei von solchen Fällen, wo ein Nenner nach Null strebt.

Insbesondere ist, falls k eine Konstante bedeutet und eine Veränderliche u nach einem Grenzwerte strebt:

$$\begin{aligned} \lim(u+k) &= \lim u + k, \\ \lim(u-k) &= \lim u - k, \\ \lim(k\,u) &= k \lim u, \\ \lim(k:u) &= k : \lim u \text{ für } \lim u \neq 0\,. \end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt wieder die allgemeine quadratische Funktion:

(8) $$y = ax^2 + bx + c$$

wie auf S. 51. Hier sollen a, b, c gegebene Konstanten bedeuten.

Der Veränderlichen x denken wir uns irgendeinen Wert erteilt; zu ihm gehört nach der Vorschrift (8) ein gewisser Wert y. Nun möge jener Wert x um Δx wachsen, d. h. $x + \Delta x$ sei ein zweiter Wert der unabhängigen Veränderlichen. Zu ihm gehört ein neuer Wert der abhängigen Veränderlichen, nämlich der Wert $y + \Delta y$, wenn Δy den erfolgten Zuwachs darstellt. Gerade so wie (8) haben wir anzusetzen:

$$y + \Delta y = a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c.$$

Hieraus und aus (8) folgt durch Subtraktion wie schon auf S. 51:

(9) $$\Delta y = (2ax + b + a\Delta x)\Delta x.$$

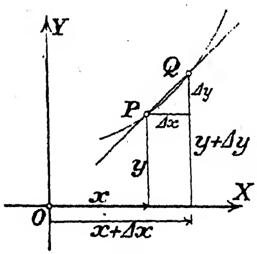


Fig. 59.

Die Fig. 59 diene zur Veranschaulichung. Darin soll P den Bildpunkt mit den Koordinaten x und y und Q den Bildpunkt mit den Koordinaten $x + \Delta x$ und $y + \Delta y$ vorstellen.

Wir lassen jetzt Δx unendlich klein werden, d. h. Δx soll nach dem Grenzwerte Null streben, in Formel: $\lim \Delta x = 0$. Nach welchem Grenzwerte strebt dann Δy? Aus (9) ergibt sich nach Satz 10:

$$\lim \Delta y = (2ax + b + a \lim \Delta x) \lim \Delta x.$$

Wegen $\lim \Delta x = 0$ ist der Inhalt der Klammer gleich $2ax + b$ und der zweite Faktor rechts gleich Null, also:

$$\lim \Delta y = 0.$$

Jede quadratische Funktion y von x ist mithin so beschaffen, daß, falls der Zuwachs Δx der unabhängigen Veränderlichen x nach Null strebt, dasselbe von dem zugehörigen Zuwachs Δy der Funktion gilt. Deshalb folgen die Bildpunkte der quadratischen Funktion so aufeinander, daß sie überall eine vollkommen dichte Kette bilden. Aus diesem Grunde nennt man die quadratischen Funktionen stetige Funktionen.

Aus (9) folgt weiter durch Division mit Δx:

(10) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + b + a\Delta x.$$

Geometrisch stellt der Quotient die Steigung der Geraden vom Bildpunkte P nach dem Bildpunkte Q in Fig. 59 dar. Wir fragen nach dem Grenzwerte dieses Quotienten für $\lim \Delta x = 0$. Nach Satz 10 ergibt sich aus (10):

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + b + a \lim \Delta x,$$

also, da $\lim \Delta x = 0$ ist:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + b. \tag{11}$$

Wenn Δx und also auch, wie wir sahen, Δy unendlich klein wird, sagt man, daß der Bildpunkt Q unendlich nahe an den Bildpunkt P rücke oder nach P strebe. Dabei bleibt Q beständig ein Bildpunkt, d. h. Q bewegt sich längs der Bildkurve der quadratischen Funktion auf P zu. Die Formel (11) besagt daher: Wenn Δx unendlich klein wird, strebt die Sekante[1] PQ durch den festen Bildpunkt P mit der Abszisse x und durch einen veränderlichen Bildpunkt Q nach einer Grenzlage, deren Steigung den Wert $2ax + b$ hat. Diese Grenzlage ist als die Gerade von P nach einem unendlich benachbarten Punkte der Bildkurve der quadratischen Funktion zu bezeichnen und heißt die Tangente der Bildkurve in P.

Δx und Δy sind Differenzen, nämlich die der Abszissen von Q und P und der Ordinaten von Q und P. Will man ausdrücken, daß Δx nach Null strebt, wobei, wie wir sahen, dasselbe von Δy gilt, so pflegt man Δx und Δy mit dx und dy zu bezeichnen und nicht mehr Differenzen, sondern Differentiale zu nennen. Das Differential einer Veränderlichen bedeutet also einen nach Null strebenden Zuwachs der Veränderlichen. Da nun schon in diesen neuen Bezeichnungen dx und dy liegt, daß Δx und Δy nach dem Grenzwerte Null streben, kann man statt (11) schreiben:

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b. \tag{12}$$

Unter dem Quotienten $dy : dx$ wird also der Grenzwert verstanden, nach dem der Quotient $\Delta y : \Delta x$ zusammengehöriger Zunahmen von y und x strebt, falls Δx unendlich klein wird. Er ist als der Quotient der Differentiale oder kürzer als der Differentialquotient der quadratischen Funktion (8) zu bezeichnen. Geometrisch bedeutet er die Steigung der Tangente ihrer Bildkurve in demjenigen Punkte P, der zu der gewählten Abszisse x gehört.

Wir haben hier zwar nur Betrachtungen aus dem vorigen Paragraphen wiederholt. Aber wir haben dabei eine Anzahl von Fachausdrücken eingeführt, die uns künftig erlauben werden, statt langer Auseinandersetzungen kurze Schlüsse zu machen, wobei man sich dann immer an die in dem gegenwärtigen Paragraphen gegebenen Erklärungen

[1] Die Sekante PQ ist die Gerade, die P mit Q verbindet, in ihrer ganzen Ausdehnung über P und Q hinaus. Die Strecke PQ dagegen heißt eine Sehne.

erinnern und den wichtigen Satz 10 im Auge behalten muß. Wir haben nun noch einiges zu sagen, was sich nicht bloß auf quadratische, sondern auch auf andere Funktionen bezieht. Da aber dieser Paragraph schon lang genug geworden ist, tun wir es im nächsten.

§ 4. Differentialquotienten von Summen, Produkten und Brüchen.

Irgendeine Funktion

(1) $$y = f(x)$$

liege vor. Dann kann man versuchen, auch hier diejenigen Betrachtungen durchzuführen, die wir bei einer quadratischen Funktion anstellten. Gewiß dürfen wir uns kürzer fassen; wer doch noch Schwierigkeiten hat, blicke auf die entsprechenden Auseinandersetzungen über die quadratischen Funktionen im vorhergehenden Paragraphen zurück.

Ein Wert x werde irgendwie bestimmt gewählt; zu ihm gehört ein Wert y der Funktion (1). Statt x benutzen wir nun einen beliebigen anderen Wert $x + \varDelta x$, indem wir den Zuwachs oder die Differenz $\varDelta x$ beliebig lassen. Zu $x + \varDelta x$ gehört der Funktionswert $f(x + \varDelta x)$, den wir $y + \varDelta y$ nennen können:

$$y + \varDelta y = f(x + \varDelta x).$$

Wird hiervon der Wert (1) abgezogen, so kommt:

(2) $$\varDelta y = f(x + \varDelta x) - f(x).$$

Nun erhebt sich die Frage, wohin $\varDelta y$ strebt, falls $\varDelta x$ nach Null strebt oder also, wie man ja dafür auch sagt, falls $\varDelta x$ unendlich klein wird. Diese Frage konnten wir bei einer quadratischen Funktion beantworten. Allgemein ist das nicht möglich, weil wir keine bestimmt gegebene Funktion betrachten. Vielmehr können wir nur sagen, was künftig unsere erste Aufgabe bei jeder neu vorkommenden Funktion $f(x)$ sein wird: Wir haben zu untersuchen, ob $\varDelta y$ nach Null strebt, wenn $\varDelta x$ es tut. Ist dies der Fall — und das wird meistens eintreten —, so sagt man, daß sich die betrachtete Funktion $f(x)$ stetig verhalte. Geometrisch bedeutet es, daß die Bildpunkte eine vollkommen dichte Kette ausmachen, oder auch: Wenn $\varDelta x$ nach Null strebt, strebt der Bildpunkt mit den Koordinaten $x + \varDelta x$, $y + \varDelta y$ nach dem Bildpunkte $(x; y)$.

Der aus (2) durch Division mit $\varDelta x$ hervorgehende Quotient

(3) $$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \frac{f(x + \varDelta x) - f(x)}{\varDelta x}$$

von zusammengehörigen Zunahmen von y und x bedeutet geometrisch die Steigung der von dem Bildpunkte $(x; y)$ nach dem Bildpunkte $(x + \Delta x; y + \Delta y)$ gehenden Geraden. Unsere zweite Aufgabe ist es nun, bei jeder neu vorkommenden Funktion $f(x)$ festzustellen, ob auch dieser Quotient für $\lim \Delta x = 0$ einen Grenzwert hat. Ist es der Fall, so heißt der Grenzwert der Differentialquotient der Funktion $f(x)$, indem man Δx und Δy beim Grenzübergange $\lim \Delta x = 0$ und $\lim \Delta y = 0$ als Differentiale dx und dy zu bezeichnen pflegt, so daß allgemein $dy : dx$ einen Differentialquotienten bedeutet.

Der Differentialquotient einer stetigen Funktion $y = f(x)$ ist hiernach der Grenzwert des Quotienten aus zusammengehörigen Zunahmen Δy und Δx von y und x für den Fall, wo Δx nach Null strebt. Geometrisch stellt er die Steigung der Tangente der Bildkurve der Funktion in demjenigen Bildpunkte dar, der zu dem angenommenen Werte x gehört. Die Tangente darf man als die Gerade durch den Bildpunkt $(x; y)$ und durch einen unendlich benachbarten Bildpunkt der Funktion bezeichnen. Sie ist die Grenzlage der Sekante vom Bildpunkte $(x; y)$ nach einem anderen Bildpunkte für den Fall, wo dieser zweite Bildpunkt längs der Kurve nach dem ersten strebt. Vgl. Fig. 59 auf S. 66.

Wir haben im vorhergehenden die beiden Aufgaben angegeben, die unserer bei jeder neu vorkommenden Funktion harren. Das sind die ersten Aufgaben der sogenannten Differentialrechnung. Die Beispiele in § 2 werden es schon klar gemacht haben, wie wichtig der Begriff des Differentialquotienten ist. Man kann sagen, daß der Differentialquotient überhaupt der wichtigste Begriff in der höheren Mathematik ist. Den Differentialquotienten einer Funktion ermitteln heißt: die Funktion differentiieren. Man wird sehen, daß sich im Lauf unserer Betrachtungen ein sehr einfaches, geradezu handwerksmäßiges Verfahren der Differentiation ergeben wird. Man lernt es bald mechanisch so gut, daß man oft darüber ganz vergißt, was der eigentliche Begriff des Differentialquotienten ist. Wem das geschieht, der gleicht jemandem, der eine schöne Reise nach einem bestimmten Ziel antritt, aber über den Annehmlichkeiten der Reise vergißt, wohin er eigentlich wollte.

Daß man für das Differentiieren gewisse wie gesagt geradezu handwerksmäßige Regeln aufstellen kann, verdankt man in nicht geringem Maße dem Umstande, daß Leibniz (1646—1716), der gleichzeitig mit Newton (1643—1727) in den letzten Jahrzehnten des 17. Jahrhunderts die Differentialrechnung erfand, sofort mit kundigem Blick die Bezeichnungen prägte, deren Anwendung das Verfahren so bequem

macht. Selbst die Engländer brauchen statt der von NEWTON benutzten Zeichen heutzutage meistens die unseres Landsmanns LEIBNIZ. In der Philosophie spielt LEIBNIZ bekanntlich auch eine Rolle, aber das Beste hat er mit der Differentialrechnung für den Aufschwung der Mathematik, der Naturwissenschaften und der Technik geleistet.

Damit der Leser für den Differentialquotienten eine Hochachtung empfinde, wie sie ihm vielleicht die vorhergehende rein mathematische Erklärung nicht einzuflößen vermocht hat, sei nur einer der vielen Fälle kurz erwähnt, in denen der Differentialquotient von größter Bedeutung ist: Angenommen, x sei das Maß der Zeit in Sekunden, y dagegen in Metern der Weg, den ein beweglicher Punkt, ein Mobil, nach irgend einem Gesetz in der Zeit x zurücklegt. Der Weg y ist dann eine Funktion der Zeit x. Zur Zeit x hat das Mobil y Meter durchlaufen. Nimmt die Zeit um Δx Sekunden zu, so legt das Mobil weiterhin Δy Meter zurück. Der Quotient $\Delta y : \Delta x$ ist die Geschwindigkeit des Mobils in diesem Zeitraume Δx; aber im allgemeinen wird sie für verschieden große Zeiträume Δx verschieden groß ausfallen. Man tut daher besser, den Quotienten die durchschnittliche Geschwindigkeit in dem Zeitraume von x bis $x + \Delta x$ Sekunden zu nennen. Ferner geht für $\lim \Delta x = 0$ aus dem Quotienten $\Delta y : \Delta x$ der Differentialquotient $dy : dx$ hervor, der also diejenige Geschwindigkeit ist, die zu einem unendlich kleinen Zeitraum dx gehört, die sogenannte momentane Geschwindigkeit, nämlich die im Augenblick x. Sie ist nicht nur für den Mathematiker, sondern für jedermann ein äußerst wichtiger Begriff. Dies ist aber nur eine der vielen Erscheinungsformen, in denen der Differentialquotient in den Naturwissenschaften vorkommt. —

Wir treffen jetzt die Vorbereitungen für die Art der Berechnung von Differentialquotienten.

Oft wird es sich zeigen, daß eine Funktion $f(x)$, die differentiiert werden soll, die Summe oder Differenz von zwei einfacheren Funktionen ist, wie z. B. $x^2 + 5x - 3$ die Summe von x^2 und $5x - 3$. Ebenso kommt es vor, daß eine Funktion als Produkt zweier Funktionen gegeben ist, wie z. B. $(x - 5)(x^2 + 3)$ als Produkt von $x - 5$ und $x^2 + 3$. Funktionen können auch als Brüche aus zwei Funktionen gegeben sein. Deshalb erhebt sich die Frage, ob man den Differentialquotienten der Summe, der Differenz, des Produkts oder des Bruches berechnen kann, sobald man die Diferentialquotienten der einzelnen Bestandteile kennt. Wäre diese Frage zu bejahen, so hätten wir ein Mittel, die Aufgabe, verwickelte Funktionen zu differentiieren, auf die Differentiation einfacherer Funktionen

zurückzuführen. Dies ist glücklicherweise der Fall. Die aufzustellenden Regeln sind noch dazu ziemlich einfach.

Zwei Funktionen von x, also zwei von x abhängige Veränderliche, mögen u und v heißen, und wir wollen annehmen, daß wir ihre Differentialquotienten

$$\frac{du}{dx} \text{ und } \frac{dv}{dx}$$

schon kennen. Die erste Frage ist dann, wie man den Differentialquotienten ihrer Summe

$$y = u + v$$

berechnen kann. Diese Summe y ist, da u und v von x abhängen, ebenfalls eine Funktion von x.

Um ein Beispiel ins Auge zu fassen: u sei die Länge eines Metallstabes, v die eines zweiten aus anderem Metall, beide mit dem Meter gemessen und zwar bei einer Temperatur von x Grad. Dann sind u und v Funktionen der Temperatur x, da sich die Stäbe bei wachsender Temperatur ausdehnen. Sind beide Stäbe aneinandergelötet, so daß ein Stab von der Länge $y = u + v$ Metern vorliegt, so wird sich auch seine Länge mit der Temperatur x ändern. Nun leuchtet ein, daß hier ein sehr einfaches Gesetz besteht. Trotzdem wollen wir es mathematisch ableiten: Die Temperatur x nehme um Δx zu, infolgedessen die Länge u um Δu und die Länge v um Δv. Dann nimmt die Gesamtlänge y ebenfalls zu, um Δy. Ebenso wie

$$y = u + v$$

ist, muß auch

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v)$$

sein. Ziehen wir die erste Gleichung von der zweiten ab, so kommt

(4) $$\Delta y = \Delta u + \Delta v$$

oder, da $y = u + v$ ist:

$$\Delta (u + v) = \Delta u + \Delta v.$$

In Worten: Die Änderung einer Summe ist gleich der Summe der Änderungen der Summanden. Siehe Fig. 60.

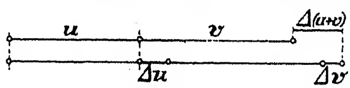


Fig. 60.

Sind u und v stetige Funktionen von x, so werden Δu und Δv unendlich klein, sobald Δx unendlich klein wird. Dann schreiben wir dx, du, dv statt Δx, Δu, Δv. Nach Satz 10, S. 65, folgt aus (4):

$$\lim \Delta y = \lim \Delta u + \lim \Delta v,$$

d. h., da $\lim \Delta u = 0$ und $\lim \Delta v = 0$ ist:

$$\lim \Delta y = 0.$$

Statt Δy dürfen wir somit dy schreiben, und es gilt der

Satz 11: *Die Summe zweier stetiger Funktionen ist ebenfalls eine stetige Funktion.*

Aus (4) folgt außerdem

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

oder, wenn Δx zum Differential dx wird, wieder nach Satz 10, S. 65:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}, \tag{5}$$

in Worten:

Satz 12: *Der Differentialquotient einer Summe ist gleich der Summe der Differentialquotienten der Summanden.*

Man kann, da $y = u + v$ ist, die Gleichung (5) auch so schreiben:

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \tag{6}$$

und in Worten so ausdrücken: *Eine Summe wird differentiiert, indem man jeden Summanden für sich differentiiert.* Dies ist nicht völlig erschöpfend, eigentlich müßte noch hinzugefügt werden: *und dann die Summe bildet*, aber dies versteht sich von selbst. Man sagt auch: *Eine Summe wird gliedweise differentiiert.*

Der Satz gilt auch für *Summen von mehr als zwei Gliedern* sowie für *Differenzen*. Denn wenn z. B. $y = u - v$ ist, wird

$$\Delta y = \Delta u - \Delta v$$

oder auch:

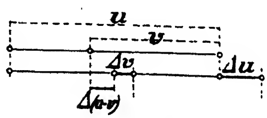


Fig. 61.

$$\Delta(u - v) = \Delta u - \Delta v, \tag{7}$$

siehe Fig. 61, woraus dann ganz entsprechend wie vorher folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}.$$

Also auch Differenzen werden gliedweise differentiiert. Daher allgemein:

Satz 13: Eine algebraische Summe von mehreren Funktionen wird gliedweise differentiiert.

Die Gleichung (4) und (7) gelten insbesondere, wenn sich u und v nur unendlich wenig ändern. Also:

$$(8)\qquad \begin{cases} d(u+v) = du + dv, \\ d(u-v) = du - dv. \end{cases}$$

Trotz der Selbstverständlichkeit dieser Ergebnisse wollen wir sie so aussprechen:

Satz 14: Das Differential einer Summe oder Differenz ist gleich der Summe oder Differenz der Einzeldifferentiale.

Wir wollen jetzt eine Funktion y von x betrachten, die das k-fache einer Funktion u von x ist:

$$y = k u.$$

Dabei soll k eine Konstante sein. Wächst x um Δx, so wachse u um Δu. Dabei gehe y in $y + \Delta y$ über. Dann kommt:

$$y + \Delta y = k(u + \Delta u),$$

also, wenn hiervon $y = k u$ abgezogen wird:

$$(9)\qquad \Delta y = k \Delta u.$$

Nach Satz 10, S. 65, ist daher:

$$\lim \Delta y = k \lim \Delta u.$$

Im Falle $\lim \Delta u = 0$ ist mithin auch $\lim \Delta y = 0$, d. h.:

Satz 15: Ein konstantes Vielfaches einer stetigen Funktion ist ebenfalls eine stetige Funktion.

Ferner ergibt sich aus (9) durch Division mit Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = k \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

und hieraus für $\lim \Delta x = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = k \frac{du}{dx},$$

d. h.:

Satz 16: Der Differentialquotient eines konstanten Vielfachen einer Funktion ist gleich demselben konstanten Vielfachen des Differentialquotienten der Funktion.

Wir haben z. B. in § 2, S. 47, gesehen, daß der Differentialquotient der Funktion x^2 gleich $2x$ ist. Also ist der Differentialquotient von kx^2 gleich $k \cdot 2x$ oder $2kx$, wenn k eine Konstante bedeutet.

Wir erwähnten in § 2, S. 52, daß das dort gefundene Ergebnis, wonach die Funktion

$$y = ax^2 + bx + c$$

den Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b$$

hat, nicht auswendig gelernt zu werden braucht, vielmehr aus dem Kopf abgeleitet werden kann. Dies wollen wir jetzt zeigen:

Zunächst hat die Funktion $y = x^2$, wie gesagt, den Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

Betrachten wir zweitens die Funktion $y = x$. Wie groß ist ihr Differentialquotient? Nach Vorschrift soll hier die abhängige Veränderliche y gerade so groß wie die unabhängige Veränderliche x sein; also ist auch ihr Zuwachs Δy gerade so groß wie der Zuwachs Δx, d. h. $\Delta y : \Delta x = 1$, was insbesondere auch gilt, wenn der Zuwachs von x unendlich klein wird; daher:

$$\frac{dy}{dx} = 1.$$

Die Frage nach dem Differentialquotienten der Funktion $y = x$ ist also ganz einfach zu beantworten. Dennoch halten wir es für nützlich, darauf hinzuweisen, daß man die Antwort auf diese Frage sofort im Kopfe haben muß, wenn man das Frühere verstanden hat. Denn $y = x$ ist ja eine lineare Funktion von x und ihre Bildkurve die Gerade, auf der die Abszisse stets gleich der Ordinate ist, d. h. die Gerade durch den Anfangspunkt mit der Steigung 1.

Wir betrachten drittens die Funktion $y = c$, wo c eine Konstante sei. Wie groß ist ihr Differentialquotient? Man möchte vielleicht hier einwenden, y sei gar keine Funktion von x, da rechts x nicht auftritt; aber das stimmt nicht. Unter einer Funktion y von x hatten wir eine Größe y verstanden, die für jeden Wert von x einen gewissen Wert hat. Das ist jetzt auch der Fall: Für jeden Wert von x hat hier y den Wert c, der freilich immer derselbe bleibt. Alle Bildpunkte, d. h. alle Punkte, deren Abszissen x beliebig und deren Ordinaten gleich c sind, liegen augenscheinlich auf einer Parallelen zur x-Achse (siehe Fig. 62). Diese Gerade hat die Steigung Null, also die Funktion $y = c$ den Differentialquotienten Null. Aber dies muß dem Leser ohne weiteres selbstverständlich sein. Denn wenn y gleich einer Konstanten ist, heißt das

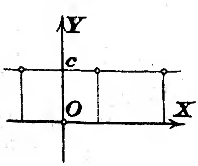


Fig. 62.

ja, daß sich y überhaupt nicht ändert, daß also dy nicht nach Null strebt, sondern gleich Null ist, also auch $dy : dx = 0$.

Man findet zuweilen in Lehrbüchern den Satz: Der Differentialquotient einer Konstante ist gleich Null. Wir meinen aber, daß dies ganz selbstverständlich sei, nämlich nur eine Umschreibung der platten Wahrheit: Die Änderung einer unveränderlichen Größe ist gleich Null.

Drei Fragen haben wir beantwortet, die nach den Differentialquotienten von x^2, von x und von c. Die Differentialquotienten sind $2x$, 1 und 0. Nun kommt die Frage:

Wie groß ist der Differentialquotient der Funktion

$$y = ax^2 + bx + c\,?$$

Vor allem ist diese Funktion y eine Summe. Nach Satz 13 ist also $dy : dx$ gleich dem Differentialquotienten von ax^2 plus dem von bx plus dem von c. Der von c ist aber gleich Null. Wir müssen also nur noch den von ax^2 und den von bx berechnen und beide addieren. Nach Satz 16 ist aber der Differentialquotient von ax^2 gleich dem a-fachen des Differentialquotienten von x^2, also gleich $a \,.\, 2x$. Ferner ist nach Satz 16 der Differentialquotient von bx gleich dem b-fachen des Differentialquotienten von x, der gleich 1 ist. Demnach hat bx den Differentialquotienten b. Also kommt:

$$\frac{dy}{dx} = a \,.\, 2x + b \,.\, 1 + 0,$$

oder:

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b,$$

und dies fanden wir schon auf S. 52.

Man sieht also: die Aufgabe, $y = ax^2 + bx + c$ zu differentiieren, ist durch unsere beiden Sätze 13 und 16 auf die zurückgeführt, x^2, x und c zu differentiieren. Erstens nämlich wird die Summe $ax^2 + bx + c$ nach Satz 13 gliedweise differentiiert, d. h. ax^2, bx und c für sich, und zweitens sind a und b konstante Faktoren, die nach Satz 16 als Faktoren stehen bleiben.

Wir fragen uns nun, wie man ein Produkt von zwei Funktionen differentiiert. Für die Summe hatten wir den einfachen Satz, daß die Änderung einer Summe gleich der Summe der Änderungen der Summanden ist. Ein grober Fehler wäre es, diesen Satz auf Produkte auszudehnen. Liegt z. B. das Produkt $3 \,.\, 4 = 12$ vor und ändern wir beide Faktoren, indem wir den ersten etwa um 2, den zweiten etwa um 3 wachsen lassen, so ist das neue Produkt $(3 + 2)(4 + 3) = 5 \,.\, 7 = 35$, also die Änderung des Produktes $35 - 12$ oder 23. Dagegen ist das Produkt der Änderun-

gen der Faktoren nur 2 . 3 oder 6. Die Änderung eines Produktes ist also nicht gleich dem Produkte der Änderungen der Faktoren.

Wir müssen vielmehr die Frage für das Produkt besonders behandeln. Wir verstehen unter u und v zwei Funktionen von x, und es sei y ihr Produkt:

$$y = uv. \tag{10}$$

Um ein anschauliches Beispiel zu haben, nehmen wir wieder an, u und v seien die Längen zweier Stäbe aus verschiedenen Metallen. Jeder Stab sei aber doppelt vorhanden, und wir denken uns die vier Stäbe zu einem Rechteck zusammengelötet. Der Flächeninhalt des Rechtecks ist dann gleich uv oder y. Dies alles gelte bei der Temperatur von x Grad. Wächst nun die Temperatur um Δx Grad, so dehnen sich die Stäbe aus. Das Rechteck vergrößert sich, seine Seiten haben jetzt die Längen $u + \Delta u$ und $v + \Delta v$, und sein Inhalt ist jetzt gleich $y + \Delta y$. Aus Fig. 63 erkennt man, daß der Zuwachs Δy des Inhaltes die Summe der Inhalte dreier Rechtecke ist:

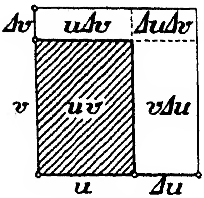


Fig. 63.

$$\Delta y = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u . \Delta v. \tag{11}$$

Dies gilt auch, wenn Δu oder Δv negativ ist, also u oder v abnimmt. Dann wäre die Figur allerdings anders zu zeichnen. Um alle Fälle zu umfassen, ist es daher besser, die Formel (11) rechnerisch abzuleiten: Wie $y = uv$ ist, so ist auch

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

oder ausmultipliziert:

$$y + \Delta y = uv + \Delta u . v + u\Delta v + \Delta u . \Delta v.$$

Ziehen wir hiervon die Gleichung (10) ab, so bleibt in der Tat der Wert (11) von Δy übrig.

Sind nun u und v stetige Funktionen von x und wird der Zuwachs Δx unendlich klein, so werden auch Δu und Δv unendlich klein. Die Formel (11) zeigt, daß dann auch Δy unendlich klein wird, nach Satz 10, S. 65. Daher gilt der

Satz 17: Das Produkt zweier stetiger Funktionen ist ebenfalls eine stetige Funktion.

Aus (11) folgt weiter, wenn wir mit Δx dividieren:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v. \tag{12}$$

Haben u und v Differentialquotienten, so treten sie in (12) auf, wenn Δx zum Differential dx wird. Also kommt dann nach Satz 10, S. 65:

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}\lim \Delta v.$$

Da aber $\lim \Delta v = 0$ ist, bleibt einfach übrig:

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}. \tag{13}$$

Mithin gilt der

Satz 18: Der Differentialquotient des Produktes von zwei Faktoren ergibt sich, wenn man jeden Faktor mit dem Differentialquotienten des anderen Faktors multipliziert und dann die Summe bildet.

Da $y = uv$ ist, können wir die Gleichung (13) auch so schreiben:

$$\frac{d(uv)}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}, \tag{14}$$

was deshalb besser ist, weil diese Gleichung für sich den Satz 18 ausdrückt, ohne daß man Erläuterungen hinzuzufügen braucht.

Wir wollen eine wichtige Anwendung machen, nämlich die Differentialquotienten der Funktionen x^2, x^3, x^4, x^5 usw. bestimmen. Da diese Funktionen Produkte $xx\ldots$ sind, lehrt Satz 17 sofort, daß x^n eine stetige Funktion von x ist, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet.

Nun sei zunächst $y = x^2 = x \,.\, x$, also y das Produkt uv von $u = x$ und $v = x$. Diese Funktionen u und v haben die Differentialquotienten:

$$\frac{du}{dx} = 1, \quad \frac{dv}{dx} = 1.$$

Nach (14) ist somit:

$$\frac{d(x^2)}{dx} = x \,.\, 1 + x \,.\, 1 = 2x.$$

Wir haben also hier auf neuem Wege das aus § 2 bekannte Ergebnis gefunden, daß x^2 den Differentialquotienten $2x$ hat.

Jetzt sei $y = x^3$. Dies ist das Produkt von $u = x^2$ und $v = x$, und es ist:

$$\frac{du}{dx} = 2x, \quad \frac{dv}{dx} = 1,$$

so daß (14) gibt:

$$\frac{d(x^3)}{dx} = x \,.\, 2x + x^2 \,.\, 1 = 3x^2.$$

Daher ist der Differentialquotient von x^3 gleich $3x^2$.

Der Leser wird jetzt schon erraten, wie groß der Differentialquotient von x^4 ist. Er wird vermuten, daß sich $4x^3$ ergibt. In der Tat, wenn

$$y = x^4 = x^3 \,.\, x$$

ist, setzen wir:

$$u = x^3, \qquad v = x.$$

Nach dem Vorhergehenden ist:

$$\frac{du}{dx} = 3x^2, \qquad \frac{dv}{dx} = 1.$$

Mithin kommt nach (14)

$$\frac{d(x^4)}{dx} = x \,.\, 3x^2 + x^3 \,.\, 1 = 4x^3,$$

womit die Vermutung bestätigt wird.

Man sieht, daß sich dieselbe Schlußfolgerung immer weiter fortsetzen läßt. Sind wir bis zu irgendeiner Potenz $y = x^n$ gekommen, so werden wir also vermutlich als Differentialquotienten den Wert nx^{n-1} erhalten, da wir sahen, daß der Differentialquotient immer den Exponenten der Potenz zum Faktor hat und sein eigener Exponent um Eins kleiner ist. Wollen wir diese Schlußfolgerung streng machen, so gehen wir wie folgt vor:

Angenommen, wir wüßten, daß x^n den Differentialquotienten nx^{n-1} habe, wobei n eine bestimmte von den Zahlen 2, 3, 4, . . . sei. Was würde aus dieser Annahme für den Differentialquotienten von x^{n+1} folgen?

Diese Folgerung können wir leicht ziehen. Ist

$$y = x^{n+1} = x^n \,.\, x,$$

so setzen wir:

$$u = x^n, \quad v = x.$$

Nach der gemachten Annahme ist:

$$\frac{du}{dx} = \frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1},$$

außerdem ist bekanntlich:

$$\frac{dv}{dx} = 1,$$

so daß — immer vorausgesetzt, daß die Annahme richtig sei — aus (14) folgt:

$$\frac{d(x^{n+1})}{dx} = x \,.\, nx^{n-1} + x^n \,.\, 1 = (n+1)x^n.$$

Also sehen wir: Wenn

x^n den Differentialquotienten nx^{n-1}

hat, muß

x^{n+1} den Differentialquotienten $(n+1)x^n$

haben.

Für $n = 4$ aber ist die Annahme, daß x^n den Differentialquotienten nx^{n-1} hat, richtig, wie wir oben sahen. Also folgt, daß x^5 den Differentialquotienten $5x^4$ hat. Jene Annahme gilt demnach auch, wenn

$n = 5$ ist. Für $n = 5$ aber gilt wieder die Folgerung, daß x^6 den Differentialquotienten $6x^5$ hat. Jene Annahme stimmt daher auch für $n = 6$, usf.

Wir haben durch diesen Schluß aus einer Annahme die Möglichkeit gewonnen, Schritt für Schritt weiter zu schließen zu einem immer um eine Einheit größeren n. Man nennt dies Verfahren[1] den Schluß von n auf $n + 1$. Es zeigt uns:

Satz 19: Der Differentialquotient der Funktion

$$y = x^n$$

mit ganzem positiven Exponenten n hat den Wert:

$$\frac{dy}{dx} = n x^{n-1}.$$

Nützlich ist es, zu erläutern, daß dies auch für $n = 1$ richtig ist. Nämlich für $n = 1$ ist $y = x$, also der Differentialquotient bekanntlich gleich 1, während der Satz den Wert $1 \cdot x^0$ liefert. Aber in der Arithmetik wird festgesetzt, daß die nullte Potenz einer Zahl als 1 gelesen werden soll[2]. Also stimmt der Satz in der Tat auch für $n = 1$.

Ja, sogar für $n = 0$ ist der Satz richtig. Denn dann ist $y = x^0 = 1$, daher der Differentialquotient gleich Null, und der Satz gibt in der Tat den Wert

$$0 \,.\, x^{-1} = \frac{0}{x} = 0.$$

Wir wollen verraten, daß sich bald ergeben wird, daß der Satz 19 auch dann richtig bleibt, wenn n eine negative ganze Zahl ist wie -1, -2, -3 usw., und später werden wir sehen, daß er auch dann gilt, wenn n eine beliebige positive oder negative Konstante bedeutet wie z. B. $n = -7{,}642$.

Jetzt wollen wir noch einmal auf die allgemeine quadratische Funktion

$$y = ax^2 + bx + c$$

zurückkommen und zeigen, wie man sie nach den vorhergehenden Regeln ganz handwerksmäßig differentiiert. Wir dürfen schreiben:

$$y = ax^2 + bx^1 + cx^0.$$

Nach Satz 13 folgt zunächst:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(ax^2)}{dx} + \frac{d(bx^1)}{dx} + \frac{d(cx^0)}{dx},$$

---

[1] Nebenbei bemerkt heißt es auch die vollständige Induktion.

[2] Man erreicht dadurch, daß das bekannte Gesetz $a^n \,.\, a^m = a^{n+m}$ auch für $n = 0$ richtig wird, und andererseits darf man die Annahme $a^0 = 1$ machen, weil a^n nur für ganzes positives n erklärt wird, also für $n = 0$ noch nach Belieben erklärt werden kann.

nach Satz 16 weiter:

$$\frac{dy}{dx} = a\frac{d(x^2)}{dx} + b\frac{d(x^1)}{dx} + c\frac{d(x^0)}{dx},$$

nach Satz 19 ist aber:

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x, \quad \frac{d(x^1)}{dx} = 1, \quad \frac{d(x^0)}{dx} = 0.$$

Also kommt:

$$\frac{dy}{dx} = a \,.\, 2x + b \,.\, 1 + c \,.\, 0$$

oder in der Tat wie auf S. 75:

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b.$$

Schließlich kommen wir zur Berechnung des Differentialquotienten eines Bruches. Wieder seien u und v Funktionen von x, und es sei

(15) $$y = \frac{u}{v}.$$

Wenn x um Δx wächst, wachse u um Δu, v um Δv und y um Δy. Dann muß sein:

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}.$$

Ziehen wir hiervon die Gleichung (15) ab, so kommt:

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}.$$

Bringen wir die Brüche auf den Hauptnenner $(v + \Delta v)v$, indem wir den ersten mit v und den zweiten mit $v + \Delta v$ erweitern, so kommt:

$$\Delta y = \frac{uv + \Delta u \cdot v - uv - u\Delta v}{(v + \Delta v)v}$$

oder

(16) $$\Delta y = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{(v + \Delta v)v}.$$

Sind nun u und v stetige Funktionen von x, so streben Δu und Δv nach Null, wenn Δx nach Null strebt. Nach Satz 10, S. 65, ist ferner der Grenzwert des Bruches (16) gleich dem Bruch aus den Grenzwerten von Zähler und Nenner, vorausgesetzt, daß der Grenzwert des Nenners nicht gleich Null ist. Da dieser nach demselben Satz gleich

$$v \lim (v + \Delta v) = v(v + \lim \Delta v) = v^2$$

wegen $\lim \Delta v = 0$ ist, setzen wir also $v \neq 0$ voraus. Also folgt aus (16)

$$\lim \Delta y = \frac{\lim (v\Delta u - u\Delta v)}{v^2} = \frac{v \lim \Delta u - u \lim \Delta v}{v^2}.$$

Weil nun $\lim \Delta u = 0$ und $\lim \Delta v = 0$ ist, folgt hieraus $\lim \Delta y = 0$. Mithin gilt der

Satz 20: Sind u und v stetige Funktionen von x, so ist auch der Bruch $u:v$ eine stetige Funktion für alle Werte von x, für die der Nenner v nicht gleich Null ist.

Um den Differentialquotienten des Bruches $u:v$ zu berechnen, dividieren wir (16) mit Δx. Dann kommt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}.$$

Lassen wir Δx nach Null streben, so haben wir wie vorhin den Satz 10, S. 65, anzuwenden. Er liefert wegen $\lim \Delta v = 0$ sofort:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \lim \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2}.$$

Hier bedeuten die rechts vorkommenden Grenzwerte die Differentialquotienten $du:dx$ und $dv:dx$ von u und v, während links der Differentialquotient $dy:dx$ von y steht. Mithin ergibt sich:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}. \tag{17}$$

Diese Gleichung lehrt, wie ein Bruch $y = u:v$ zu differentiieren ist. Wir schreiben die Regel deutlicher so:

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}. \tag{18}$$

Sie besagt:

Satz 21: Der Differentialquotient eines Bruches ist gleich einem Bruch, dessen Nenner das Quadrat des alten Nenners ist. Sein Zähler ist gleich dem Produkt des alten Nenners mit dem Differentialquotienten des alten Zählers, vermindert um das Produkt des alten Zählers mit dem Differentialquotienten des alten Nenners.

Man wird den sprachlichen Ausdruck etwas umständlich finden. Wie man sich die Regel leicht merkt, besprechen wir noch.

Machen wir jetzt eine Anwendung: Es sei $y = x^{-4}$ zu differentiieren. x^{-4} bedeutet bekanntlich nichts anderes als $1:x^4$. Also wird die Aufgabe gestellt, den Differentialquoten von

$$y = \frac{1}{x^4}$$

zu finden. Diese Funktion ist ein Bruch $u : v$ mit dem Zähler $u = 1$ und dem Nenner $v = x^4$. Aber

$$u = 1 \text{ und } v = x^4$$

haben, wie wir wissen, die Differentialquotienten

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{dv}{dx} = 4x^3;$$

aus (18) folgt somit:

$$\frac{d\left(\frac{1}{x^4}\right)}{dx} = \frac{x^4 . 0 - 1 . 4x^3}{x^8} = -\frac{4x^3}{x^8} = -\frac{4}{x^5}.$$

Hierfür können wir schreiben:

$$\frac{d(x^{-4})}{dx} = -4x^{-5}.$$

Blicken wir jetzt auf Satz 19 zurück. Darin ist n positiv vorausgesetzt. Nehmen wir uns trotzdem die Freiheit, darin $n = -4$ zu setzen, so würde er aussagen, daß x^{-4} den Differentialquotienten $-4x^{-4-1}$ oder $-4x^{-5}$ hätte. Das ist aber, wie wir soeben gesehen haben, tatsächlich der Fall. Unser Satz 19 gilt daher auch für $n = -4$.

Ebenso leicht ist zu beweisen, daß der Satz 19 überhaupt für jedes negative ganze n gilt. Es sei nämlich:

$$y = \frac{1}{x^m}$$

wo m eine **positive** ganze Zahl bedeute. Dann ist $y = x^{-m}$. Diese Funktion würde also dieselbe sein wie die des Satzes 19, wenn die Zahl $n = -m$, also n eine negative ganze Zahl wäre. Wäre der Satz 19 auch für solche Werte von n richtig — was noch nicht bewiesen ist —, so würde folgen, daß y den Differentialquotienten

$$-mx^{-m-1}$$

hätte. Man sieht also, es kommt darauf an, zu beweisen, daß

$$y = \frac{1}{x^m},$$

den Differentialquotienten $-mx^{-m-1}$ oder

$$-\frac{m}{x^{m+1}}$$

hat. Dies aber ist mit Hilfe der Formel (18) leicht einzusehen. Da nämlich

$$y = \frac{1}{x^m}$$

ist, betrachten wir y als Bruch $u:v$, wobei $u=1$ und $v=x^m$ ist. Der Differentialquotient von u hat den Wert Null. Ferner ist $v=x^m$ eine positive ganze Potenz von x, und weil Satz 19 für solche Potenzen gilt, lehrt er:

$$\frac{dv}{dx}=mx^{m-1}.$$

Jetzt gibt die Gleichung (18):

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\left(\frac{1}{x^m}\right)}{dx}=\frac{x^m\,.\,0-1\,.\,mx^{m-1}}{(x^m)^2}$$

oder:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\left(\frac{1}{x^m}\right)}{dx}=-\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}}.$$

Oben stehen $m-1$ Faktoren x, unten $2m$; also heben sich $m-1$ Faktoren fort, so daß unten $m+1$ Faktoren bleiben. Demnach kommt:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\left(\frac{1}{x^m}\right)}{dx}=-\frac{m}{x^{m+1}}.$$

Dies aber wollten wir nachweisen.

Hiernach läßt sich Satz 19 verallgemeinern:

Satz 22: Der Differentialquotient der Funktion

$$y=x^n,$$

wo n eine ganze positive oder negative Zahl ist, hat den Wert

$$\frac{dy}{dx}=nx^{n-1}.$$

Zur Vermeidung von Rechenfehlern erwähnen wir noch eine Kleinigkeit, die wir an den Beispielen

$$y=x^8 \quad \text{und} \quad y=\frac{1}{x^8}$$

erläutern. Wir können diese Funktionen so schreiben:

$$y=x^8 \quad \text{und} \quad y=x^{-8}.$$

Im ersten Fall ist also $n=8$, im zweiten $n=-8$, d. h. im ersten ist $n-1=7$, dagegen im zweiten $n-1=-9$ und nicht -7. Man bekommt also in diesen beiden Fällen:

$$\frac{dy}{dx}=8x^7 \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx}=-8x^{-9}=-\frac{8}{x^9}.$$

§ 5. Rückblick.

Nachdem wir so weit gekommen sind, bemächtigt sich des Lesers vielleicht ein ängstliches Gefühl: eine ganze Reihe von Begriffen und Lehrsätzen sind in diesem Kapitel vorgekommen; wie soll man sich das alles merken? Wir heben deshalb hervor, daß man sich eigentlich nur wenig zu merken braucht. Vorausgesetzt wird allerdings, daß man das Vorgetragene wirklich vollständig verstanden habe.

Vor allem muß man den Begriff des Differentialquotienten verstehen. Er wurde in § 3 so gründlich erörtert, daß derjenige, der diesen § 3 verdaut hat, den Begriff kennt, ohne sein Gedächtnis irgend wie mit Auswendiggelernten belastet zu haben. Bei der Abbildung der Funktion durch eine Kurve bedeutet der Differentialquotient die Steigung der Tangente. Wer dies verstanden hat, dem ist es selbstverständlich, daß der Differentialquotient einer Konstanten gleich Null und der Differentialquotient von x selbst gleich Eins ist (vgl. S. 74).

Um nun das Differentiieren leicht zu gestalten, haben wir im vorigen Paragraphen einige Regeln aufgestellt. Diese Regeln muß man sich allerdings merken. Nötig wäre es nicht, man könnte ja in jedem Fall zur richtigen Stelle zurückblättern. Aber hier gilt ähnliches wie beim gewöhnlichen Zahlenrechnen: gewiß kann jedermann das Produkt 723.546 ausrechnen, auch wenn er das Einmaleins nicht auswendig kann. Es wäre aber zeitraubend und unpraktisch, da das Einmaleins unzählige Male im Leben nützlich anzuwenden ist. Ähnlich verhält es sich mit den Differentiationsregeln. Es ist gut, wenn man sie beständig zur Anwendung im Kopfe hat.

Diese Regeln sind folgende:

1. Regel (Summenregel): Eine Summe wird Glied für Glied differentiiert, in Formel:

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

Wir behaupten wohl nicht zu viel, wenn wir sagen, daß dies ohne Gedächtnisarbeit im Kopfe haftet.

2. Regel (Faktorregel): Konstante Faktoren bleiben beim Differentiieren konstante Faktoren, in Formel:

$$\frac{d(ku)}{dx} = k\frac{du}{dx}, \quad \text{wenn } k = \text{konst.}$$

Diese Regel haben wir in Satz 16, S. 73, etwas anders ausgesprochen. Hat man sie aber einmal verstanden, so genügt diese Fassung. Dabei ist Gewicht auf das Wort: Faktor zu legen. Es handelt sich um eine

konstante Zahl k, mit der eine Funktion u multipliziert wird, nicht etwa um eine additive Konstante wie die Konstante k in $u+k$.

3. Regel (Produktregel): Den Differentialquotienten eines Produktes von zwei Faktoren findet man, indem man jeden Faktor mit dem Differentialquotienten des andern multipliziert und dann beide Ausdrücke addiert, in Formel:

$$\frac{d(uv)}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}.$$

Diese Regel ist, wie man sieht, durchaus symmetrisch hinsichtlich beider Faktoren, was so sein muß, weil $uv = vu$ ist. Auch bedarf es keiner Anstrengung, sie sich dauernd ins Gedächtnis einzuprägen.

4. Regel (Bruchregel): Die Regel für die Differentiation eines Bruches ist in Worten so langwierig (vgl. Satz 21, S. 81), daß es besser ist, sie hier nur in Formel zu wiederholen:

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Hat man die Regel für das Produkt, die dritte Regel, im Kopfe, so ist auch die vierte gemerkt. Denn vor allem muß man sich einprägen, daß sich ein Bruch ergibt und der Nenner dieses neuen Bruches das Quadrat des alten Nenners ist. Beim Differentiieren eines Bruches tut man also gut, vor allem einen Bruchstrich zu ziehen und darunter das Quadrat des alten Nenners zu setzen, also so anzufangen:

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{\qquad\qquad}{v^2}$$

Nun wendet man für den Zähler dieselbe Regel an wie für das Produkt, nur mit dem Unterschiede, daß man statt der Summe

$$v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$$

die Differenz

$$v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}$$

bildet. Dabei geht das Glied voran, bei dem der alte Zähler differentiiert wird.

5. Regel (Potenzregel): Der Differentialquotient von x^n ist nx^{n-1}. Allerdings haben wir nur erst bewiesen, daß dies gilt, wenn n eine positive oder negative ganze Zahl ist. Wir werden später, wie schon gesagt, zeigen, daß dies gilt, was für eine Konstante auch n sein

mag. Daher fassen wir die Regel in dieser kurzen Weise. Anwenden werden wir sie in der Folge nur für ganzzahlige Werte von n, bis wir bewiesen haben, daß sie auch für andere Konstanten n richtig ist.

Das ist alles, was man im Gedächtnis zu haben braucht. Wir wiederholen, nötig ist es nicht, aber nützlich. Wer sich trotz dieser Auseinandersetzungen die Regeln vorläufig nicht zu merken vermag, dem raten wir, sie so oft anzuwenden, bis sie von selber im Gedächtnisse haften.

Weil das Differentiieren zeichnerisch auf das Tangentenziehen hinauskommt, lassen sich die Regeln geometrisch deuten. Wir wollen dies insbesondere mit der Summenregel und mit der Faktorregel tun:

Zwei Funktionen u und v werden durch zwei Kurven, eine u-Kurve und eine v-Kurve, dargestellt, deren Ordinaten die zu den Abszissen x gehörigen Werte von u und v sind. In Fig. 64 bedeute OQ eine beliebige Abszisse x, und QP_1 und QP_2 seien die zugehörigen Ordinaten, d. h. Werte der Funktionen u und v. Wenn wir für dieselbe Abszisse x die Summe $QP_1 + QP_2$ als Ordinate QP benutzen, ist P ein Punkt der Bildkurve der Summenfunktion $y = u + v$. Indem wir an die Summengerade zweier Geraden auf S. 37 erinnern, nennen wir deshalb die Bildkurve von $y = u + v$ die Summenkurve der u-Kurve und v-Kurve. Die Summenregel besagt nun:

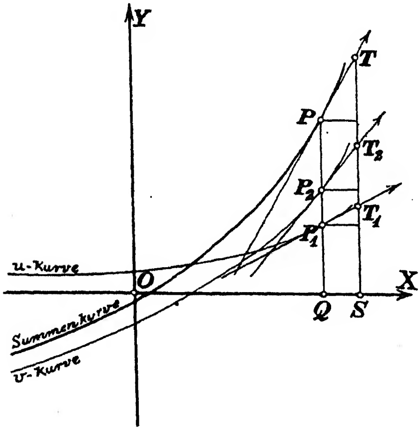


Fig. 64.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx},$$

in Worten: Die Steigung der Tangente des Punktes P der Summenkurve ist gleich der Summe aus den Steigungen der Tangenten der u- und v-Kurve an den zugehörigen Stellen P_1 und P_2. Um die Steigungen geometrisch darzustellen, ziehen wir eine Parallele zu QP durch irgendeinen Punkt S der Abszissenachse. Sie treffe die Tangenten von P_1, P_2 und P in T_1, T_2 und T. Dann sind augenscheinlich

$$\frac{ST - QP}{QS}, \quad \frac{ST_1 - QP_1}{QS}, \quad \frac{ST_2 - QP_2}{QS}$$

die Steigungen der Tangenten von P, P_1 und P_2. Also ist nach der Summenregel der erste Bruch gleich der Summe der beiden andern. Da alle drei denselben Nenner haben, kommt somit:

$$ST - QP = ST_1 - QP_1 + ST_2 - QP_2.$$

Weil aber $QP = QP_1 + QP_2$ gemacht wurde, bleibt übrig:

$$ST = ST_1 + ST_2.$$

Da nun T ein beliebiger Punkt der Tangente von P ist, besagt dies:

Die Tangente in einem Punkte P der Summenkurve ist die Summengerade der Tangenten der u- und v-Kurve in den zugehörigen Punkten P_1 und P_2.

Da die Summenregel ohne weiteres auf beliebig viele Summanden ausgedehnt werden kann, gilt dies auch für die Summenkurve von mehr als zwei Kurven.

Statt zu sagen, man bildet die Summenkurve, sagt man auch, man stellt die Aufeinanderlagerung (Superposition) mehrerer Kurven her.

Bevor wir an die Faktorregel gehen, sprechen wir von einer einfachen Art, wie man aus einer Kurve neue Kurven ableiten kann: Wenn man alle Ordinaten einer Kurve l nach einem bestimmten Verhältnis vergrößert oder verkleinert, anders gesagt, wenn man sie mit einer Konstanten k multipliziert, geht eine neue Kurve hervor. In Fig. 65 haben wir die Linie l beliebig angenommen. Aus ihr gehen die übrigen Linien hervor, wenn man die Ordinaten von l mit den angegebenen Zahlen $k = 1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, -1\frac{1}{2}$ multipliziert. Wenn k negativ ist, bekommt dabei jede Ordinate das entgegengesetzte Vorzeichen. Sofort ist es klar, daß alle aus l entstandenen Kurven die x-Achse an denselben Stellen schneiden wie l selbst. Denn ein beliebiger Punkt der Abszissenachse hat die Ordinate Null, wird also durch Multiplikation seiner Ordinate mit k nicht behelligt. Alle aus l auf die angegebene

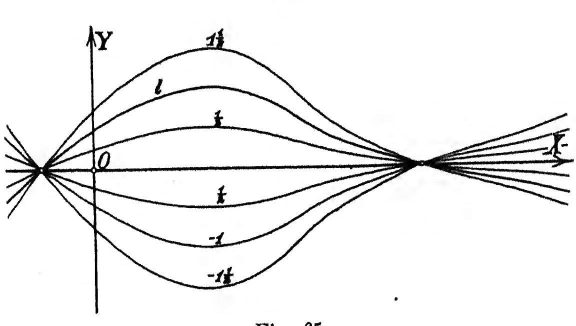


Fig. 65.

Art hervorgehenden Kurven haben mit l etwas Verwandtes. Ein großer deutscher Mathematiker, LEONHARD EULER (1707—1783), hat gelegentlich in einem lateinisch verfaßten Buche von diesen neuen Kurven gesprochen und sie dabei „affines", d. h. „verwandte" Kurven genannt. Daher kommt es, daß man den Fachausdruck affin für die so aus l entstandenen Kurven auch heute noch verwendet. Die Abszissenachse, deren Punkte wie gesagt durch die Multiplikation der Ordinaten mit k nicht behelligt werden, wird die Affinitätsachse genannt[1]. Ist die Linie l eine Gerade, so leuchtet sofort ein, daß alle zu ihr affinen Kurven auch Geraden sind.

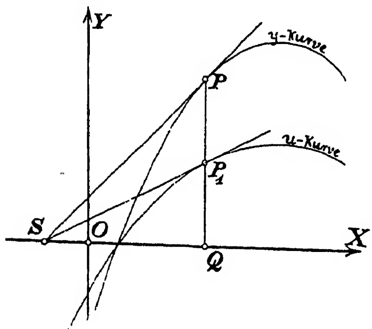


Fig. 66.

Nun endlich die geometrische Deutung der Faktorregel! Unter u verstehen wir eine differentiierbare Funktion von x, und y sei diejenige Funktion, die aus u durch Multiplikation mit einer Konstanten k entsteht. Die Bildkurven beider Funktionen sind zueinander affin, siehe Fig. 66 (wo wir $k = 2$ gewählt haben). Zu einer beliebigen Abszisse $x = OQ$ gehören die Ordinaten $u = QP_1$ und $y = QP = k \cdot QP_1$. Die Faktorregel

$$\frac{dy}{dx} = k\frac{du}{dx}$$

besagt: In jedem Punkte P der y-Kurve ist die Steigung der Tangente das k-fache der Steigung der Tangente der u-Kurve im zugehörigen Punkte P_1. Wenn die Tangente von P_1 die Abszissenachse in S schneidet, ist $QP_1 : QS$ die Steigung dieser Tangente. Nach der Faktorregel hat also die Tangente von P die Steigung $k \cdot QP_1 : SQ$. Da aber $k \cdot QP_1 = QP$ ist, wird diese Steigung gleich $QP : SQ$, d. h. auch die Tangente von P geht durch S. Mithin ist diese Tangente diejenige Gerade, die aus der Tangente von P_1 entsteht, wenn man ihre Ordinaten mit k multipliziert, d. h.:

Wird aus einer Kurve eine affine Kurve dadurch abgeleitet, daß man alle Ordinaten mit einer Konstanten k multi-

[1] Die Lage der y-Achse in Fig. 65 ist bei der Herstellung der affinen Kurven gleichgültig. Man kann auch in bezug auf eine beliebige Gerade an Stelle der x-Achse als Affinitätsachse affine Kurven herstellen: Man multipliziert die Abstände aller Punkte einer angenommenen Kurve l von dieser Geraden mit einem beliebig wählbaren konstanten Faktor k.

pliziert, so geht auf dieselbe Art aus jeder Tangente der ursprünglichen Kurve die Tangente der neuen Kurve im zugehörigen Punkte hervor.

Zu affinen Kurven wird man auch geführt, wenn man die graphische Darstellung einer Kurve nachträglich, etwa deshalb, weil das Bild zu steil oder zu flach ausfällt, abändert, indem man eine neue y-Einheit wählt. In der Tat, will man statt der zuerst benutzten y-Einheit als Einheit der Ordinaten eine Strecke benutzen, die k-mal so groß als die zuerst verwendete Einheit ist, so muß man alle Ordinaten k-mal so groß wie vorher zeichnen. Gelegentlich haben wir dies schon einmal getan: In Fig. 36 auf S. 48 erschien die Bildkurve der Funktion $y = x^2$ sehr steil; deshalb zeichneten wir in Fig. 37 diese Bildkurve noch einmal unter Annahme einer neuen Ordinateneinheit, die nur ein Zehntel der zuerst benutzten betrug. Infolgedessen sind in Fig. 37 die Ordinaten nur ein Zehntel so lang wie in Fig. 36. Legt man beide Figuren so aufeinander, daß sich die Anfangspunkte und die positiven x-Achsen decken, so hat man also affine Kurven wie in Fig. 65, und dabei ist $k = \frac{1}{10}$

Jetzt wird auch die Faktorregel beinahe selbstverständlich. Denn wenn man auf diese Art das Bild einer Funktion durch ein besser geeignetes ersetzt, leuchtet ein, daß die Tangenten der neuen Bildkurve in entsprechendem Maße steiler oder weniger steil zu zeichnen sind, und dies eben besagt die Faktorregel.

Drittes Kapitel.
Algebraische Funktionen.

§ 1. Ganze Funktionen.

Die linearen und quadratischen Funktionen

$$y = ax + b \quad \text{und} \quad y = ax^2 + bx + c$$

sind die einfachsten Fälle von sogenannten ganzen Funktionen. Hierunter versteht man nämlich solche Funktionen von x, die Summen von mehreren Gliedern sind, von denen jedes eine ganze positive Potenz von x multipliziert mit einer Konstanten ist wie z. B.

$$x^3 - 7x^4 + 5x + 6x^5, \qquad 3 + 2{,}6\,x^8 + 3{,}2\,x^2 - 7x^9.$$

Also sollen keine negativen Potenzen von x wie x^{-1} oder $1 : x$, x^{-2} oder $1 : x^2$ usw. vorkommen, auch keine gebrochenen Potenzen wie $x^{\frac{1}{2}}$. Liegt eine ganze Funktion vor, so kann man die Glieder der Summe nach fallenden Potenzen von x ordnen, in den beiden soeben angegebenen Beispielen also in dieser Weise:

$$(1) \qquad 6x^5 - 7x^4 + x^3 + 5x, \qquad -7x^9 + 2{,}6\,x^8 + 3{,}2\,x^2 + 3.$$

Ist die höchste vorkommende Potenz von x die n^{te}, so nennt man die Funktion eine ganze Funktion n^{ten} Grades. Die Beispiele sind ganze Funktionen vom 5. und 9. Grade.

Nach S. 77 ist x^n eine stetige Funktion von x, wenn n eine positive ganze Zahl ist. Also sind in (1) alle vorkommenden Potenzen von x stetig. Aus Satz 15, S. 73, und Satz 11, S. 72, folgt mithin, daß auch die Funktionen (1) stetig sind. So beweist man überhaupt:

Satz 1: Jede ganze Funktion ist überall stetig.

Hiernach ist das Bild einer ganzen Funktion eine überall stetige Kurve, aus Bergen und Tälern bestehend.

Man sieht auch sofort, daß die ganzen Funktionen differentiierbar sind. Wir können uns damit begnügen, den Differentialquotienten der ersten Funktion (1) zu bestimmen: Nach der Potenzregel haben x^5, x^4, x^3 und x die Differentialquotienten $5x^4, 4x^3, 3x^2$ und 1, nach der

Faktorregel haben also $6x^5$, $-7x^4$, x^3 und $5x$ die Differentialquotienten $30x^4$, $-28x^3$, $3x^2$ und 5. Mithin hat die erste Funktion (1) nach der Summenregel den Differentialquotienten

$$30x^4 - 28x^3 + 3x^2 + 5.$$

Die vorgelegte Funktion war vom fünften Grad, und ihr Differentialquotient ist eine ganze Funktion vom vierten Grad. Das liegt daran, daß x^n den Differentialquotienten nx^{n-1} hat. Allgemein:

Satz 2: Der Differentialquotient einer ganzen Funktion n^{ten} Grades ist eine ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades.

Man kann den Differentialquotienten einer ganzen Funktion auch schon dann berechnen, wenn ihre Glieder noch nicht geordnet sind, ja auch dann, wenn die Funktion nicht ausgerechnet vorliegt, wie die folgenden Beispiele zeigen.

1. Beispiel: Die ganze Funktion dritten Grades $y = -6 + 6x^2 - 2x^3 + x$ hat den Differentialquotienten $6 \cdot 2x - 2 \cdot 3x^2 + 1$ oder $-6x^2 + 12x + 1$.

2. Beispiel: $y = (x-2)(x^2+1)$ ist eine ganze Funktion dritten Grades. Man kann sie nach der Produktregel differentiieren, indem man $u = x - 2$, $v = x^2 + 1$ setzt. Die Differentialquotienten von u und v sind 1 und $2x$. Die Produktregel gibt also

$$\frac{dy}{dx} = (x^2+1) \cdot 1 + (x-2) \cdot 2x = 3x^2 - 4x + 1.$$

Zur Probe rechne man die Klammern in y aus, ordne die Glieder und differentiiere dann.

3. Beispiel: Eine ganze Funktion vierten Grades ist

$$y = [(ax+b)^2 + cx][x^2 - x + 1].$$

Indem man den ersten Faktor mit u und den zweiten mit v bezeichnet, wendet man die Produktregel an. Der Faktor u läßt sich so schreiben:

$$u = a^2x^2 + (2ab + c)x + b^2$$

und hat also den Differentialquotienten

$$\frac{du}{dx} = 2a^2x + 2ab + c.$$

Da v den Differentialquotienten $2x - 1$ hat, wird

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 - x + 1)(2a^2x + 2ab + c) + [(ax+b)^2 + cx][2x - 1].$$

4. Beispiel: $y = (x-2)(x+2)(x^2+4)$, $\dfrac{dy}{dx} = 4x^3$.

5. Beispiel: $y = (2 - 3x^2)(2 + 3x^2) - (3 - 2x^3)(3 + 2x^3)$, $\dfrac{dy}{dx} = -20x^3$.

6. Beispiel: $y = 1 + \dfrac{x}{1} + \dfrac{x^2}{1 \cdot 2} + \dfrac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$,

$$\frac{dy}{dx} = y - \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}.$$

Nach diesen bloß rechnerischen Beispielen zwei Anwendungen:

7. Beispiel: Wird ein elastischer Stab wagerecht in einer Mauer befestigt und beschwert man sein freies Ende mit einer Last, so wird er nach unten gebogen. Vernachlässigt man seine Dicke, so bildet er eine Kurve, die als eine **elastische Linie** bezeichnet wird, siehe Fig. 67. In der Mechanik wird gezeigt, daß sie, wenigstens in großer Annäherung, die Bildkurve der Funktion

$$y = a(3\,lx^2 - x^3) \tag{2}$$

ist. Dabei bedeutet l die Länge des freien Stabes und a eine durch das Material und die Größe der Last bedingte Konstante. Als x-Achse ist der ursprünglich unverbogene Stab gewählt, als y-Achse die durch die Befestigungsstelle in der Wand gezogene Lotrechte nach **unten**. Das Achsenkreuz hat also hier eine andere Lage als gewöhnlich. Die x-Einheit wird gleich der y-Einheit angenommen. Durch (2) wird y als ganze Funktion **dritten Grades** von x dargestellt. Für $x = l$ ist $y = 2al^3$. Dies ist die Strecke AB, um die der Stab am freien Ende B nach unten gebogen wird. Die Gleichung (2), die, wie gesagt, eine Näherungsformel ist, gibt nur dann das Richtige, wenn die Durchbiegung, d. h. die Strecke AB gegenüber der Stablänge OA oder l gering ist. Um die Form des gebogenen Stabes deutlicher hervortreten zu lassen, haben wir jedoch AB übertrieben groß dargestellt.

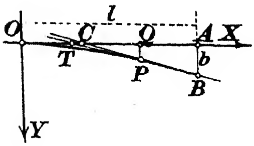


Fig. 67.

Bezeichnet man AB mit b, so ist

$$b = 2al^3 \quad \text{oder} \quad a = \frac{b}{2l^3},$$

so daß man (2) auch so schreiben kann:

$$y = \frac{b}{2l^3}(3\,lx^2 - x^3) = \frac{3b}{2l^2}x^2 - \frac{b}{2l^3}x^3. \tag{3}$$

Diese Funktion hat den Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3b}{2l^2}\,2x - \frac{b}{2l^3}\,3x^2 = \frac{3b}{l^2}\,x - \frac{3b}{2l^3}\,x^2 = \frac{3bx}{2l^3}\,(2l - x)\,. \tag{4}$$

Er gibt die Steigung der elastischen Linie an.

Für $x = 0$ ist $dy : dx = 0$, d. h. in O hat die Tangente wagerechte Lage. Am Ende B, d. h. für $x = l$, ist der Differentialquotient gleich $3b : 2l$ oder $b : \frac{2}{3}l$. Wenn wir von OA ein Drittel durch den Punkt C abschneiden, d. h. wenn $CA = \frac{2}{3}l$ ist, hat die Gerade CB eben diese Steigung $AB : CA = b : \frac{2}{3}l$. Man muß nämlich beachten, daß die Richtung nach unten positiv ist. Demnach ist die Gerade CB die Tangente der elastischen Linie in B. Ferner sei P ein beliebiger Punkt der Kurve, also $OQ = x$, $QP = y$. Die Tangente von P treffe die x-Achse in T. Ihre Steigung ist nach (4):

$$\frac{QP}{TQ} = \frac{3b}{2l^3}\,(2\,lx - x^2)\,,$$

daher:

$$TQ = \frac{2l^3}{3b}\,\frac{QP}{2lx - x^2}$$

oder, da $QP = y$ den Wert (3) hat:

$$TQ = \frac{x(3l - x)}{3(2l - x)}.$$

Also kommt:

$$OT = OQ - TQ = x - TQ = \frac{x(3l - 2x)}{3(2l - x)}.$$

Für $x = \frac{2}{3}l$ z. B. (in Fig. 67 für P) ist $y = \frac{14}{27}b$ und $OT = \frac{5}{18}l$, so daß T sehr nahe bei C liegt. Die Kurve wird durch die drei Punkte O, P, B und ihre Tangenten genau genug bestimmt. Werte von x über l hinaus und negative Werte von x haben keine Bedeutung.

8. Beispiel: Wird derselbe Stab nicht am Ende, sondern überall und zwar gleichmäßig belastet, so lehrt die Mechanik, daß dann für die entstehende elastische Linie angenähert das Gesetz gilt:

$$y = a(6l^2x^2 - 4lx^3 + x^4),$$

wobei im übrigen dasselbe zu sagen ist wie im vorhergehenden Beispiele. Hier ist die Strecke b, um die das Ende B herabgebogen wird, gleich $3al^4$. Daher wird

$$y = \frac{b}{3l^4}(6l^2x^2 - 4lx^3 + x^4).$$

Auch diese Formel gilt nur für kleine Werte von b. Man beweise, daß die Tangente des Endpunktes B ein Viertel der Stablänge l abschneidet.

Nach den linearen Funktionen (§ 1 des 2. Kap.) sind die quadratischen Funktionen (§ 2 des 2. Kap.) die einfachsten ganzen Funktionen. Wir wollen jetzt noch einige Bemerkungen über die Bildkurven der quadratischen Funktionen machen.

Das Bild der einfachsten quadratischen Funktion $y = x^2$ ist uns schon einigermaßen vertraut. Man kann es (vgl. Fig. 35 und 37, S. 48, 49) als ein einziges Tal bezeichnen, dessen tiefste Stelle der Anfangspunkt ist, von dem es beiderseits symmetrisch zur y-Achse emporsteigt. Das Achsenkreuz setzen wir in der gewöhnlichen Lage voraus. Die x-Achse ist die Tangente des tiefsten Punktes. Wenn wir nun alle Ordinaten dieser Kurve mit einer Konstanten k multiplizieren, entsteht nach S. 88 eine affine Kurve, nämlich das Bild der quadratischen Funktion $y = kx^2$, siehe Fig. 68, wo l_0 die Bildkurve von $y = x^2$ und l_1 die von $y = kx^2$ ist und $k = \frac{1}{2}$ gewählt worden ist[1]. Die neue Kurve l_1 hat im wesentlichen dieselbe Gestalt wie l_0. Wäre k negativ gewählt worden, so wäre allerdings das Tal in einen Berg verwandelt worden; z. B. für $k = -\frac{1}{2}$ ergibt sich diejenige Kurve, die aus l_1 durch Umklappen um die x-Achse entsteht. Wir kommen auf diesen Fall nachher zurück. Nunmehr wollen wir die Kurve l_1 in der Richtung der x-Achse um irgendeine Strecke m verschieben, ohne sie zu drehen. Dabei ändert sich ihre Gestalt nicht.

[1] Um die Umformungen, die wir nach und nach mit der Kurve l_0 vornehmen, recht sinnfällig zu machen, ist in Fig. 68 angenommen worden, daß die Kurve (d. h. ein Teil von ihr) zusammen mit einer Strecke parallel zur x-Achse die Begrenzung eines Stückes Papier sei; ebenso ist mit den Kurven l_1, l_2, l_3 verfahren worden.

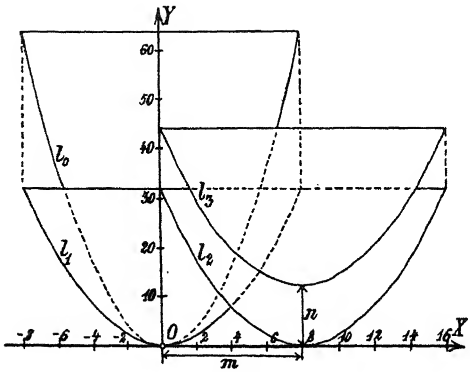


Fig. 68.

In Fig. 68 ist $m = 8$ gewählt. Die neue Kurve l_2 ist das Bild einer Funktion, deren Abszissen um m größer als die alten Abszissen sind, d. h. die neue Funktion entsteht aus der alten, wenn man x durch $x - m$ (nicht durch $x + m$) ersetzt: $y = k\,(x - m)^2$. Eine Probe: Für $x = m$ muß $y = 0$ sein. Schließlich verschieben wir die Kurve l_2 in der Richtung der y-Achse um irgendeine Strecke n, ohne sie zu drehen. Auch hierbei ändert sie ihre Gestalt nicht. In Fig. 68 ist $n = 12$ gewählt. Die so entstehende Kurve l_3 ist das Bild der Funktion

$$(5) \qquad y = k\,(x - m)^2 + n,$$

weil ihre Ordinaten um n größer als die von l_2 sind. Statt (5) kann man auch schreiben:

$$(6) \qquad y = kx^2 - 2km\,x + km^2 + n.$$

Selbstverständlich wird m mit der x-Einheit und n mit der y-Einheit gemessen. Da in Fig. 68 die Werte $k = \frac{1}{2}$, $m = 8$, $n = 12$ gewählt wurden, ergibt sich hier insbesondere:

$$y = \tfrac{1}{2}x^2 - 8x + 44.$$

Man bedenke nun, daß

$$(7) \qquad y = ax^2 + bx + c$$

die allgemeinste quadratische Funktion ist. Ihre Vergleichung mit (6) legt die Frage nahe, ob es nicht möglich ist, den Faktor k und die beiden Verschiebungsstrecken m und n so zu wählen, daß die hervorgegangene Funktion (5) gerade diese beliebig gewählte allgemeinste quadratische Funktion (7) wird. Man müßte fordern:

$$k = a, \quad -2km = b, \quad km^2 + n = c.$$

Die erste Forderung $k = a$ gibt, in die zweite eingesetzt, $m = -b : 2a$. Setzt man beide in die dritte ein, so kommt:

$$n = c - \frac{b^2}{4a}.$$

Also ist es wirklich möglich, und daher gilt der

Satz 3: Aus der Bildkurve der einfachsten quadratischen Funktion

$$y = x^2$$

geht die irgendeiner quadratischen Funktion

$$y = ax^2 + bx + c$$

dadurch hervor, daß man zuerst die Ordinaten mit einer geeignet zu wählenden Konstanten multipliziert, d. h. eine affine Kurve ableitet, und dann diese neue Kurve ohne Drehen in geeigneter Weise in der Ebene verschiebt.

Man muß nämlich beachten, daß jede Verschiebung in der Ebene dadurch geleistet werden kann, daß man zuerst eine Verschiebung parallel der x-Achse und dann eine Verschiebung der y-Achse ausübt. Wie wir sahen, ist

$$k = a, \quad m = -\frac{b}{2a}, \quad n = c - \frac{b^2}{4a} \tag{8}$$

zu wählen.

Abgesehen von der verschobenen Lage sind hiernach die Bildkurven **aller** quadratischen Funktionen kongruent mit denjenigen Kurven, die aus der Bildkurve von $y = x^2$ durch affine Veränderung entstehen. Je nachdem k oder also a positiv oder negativ ist, bestehen die Bildkurven aus einem einzigen Tal oder einem einzigen Berg. Denn wenn k negativ ist, treten an die Stelle der samt und sonders positiven Ordinaten $y = x^2$ negative. Die Bildkurven haben also auch sämtlich wie die von $y = x^2$ eine Symmetriegerade, und zwar ist dies eine Parallele zur y-Achse, die durch den tiefsten Punkt des Tales oder durch den höchsten des Berges geht. Dieser tiefste oder höchste Punkt hat als Tangente eine Parallele zur x-Achse, und seine Koordinaten sind m und n. Je nachdem m (oder n) in (8) positiv oder negativ ausfällt, muß man die Verschiebung parallel zur x-Achse (oder y-Achse) im positiven oder negativen Sinne der Achse ausführen.

Die Bildkurven der quadratischen Funktionen gehören zu einer Familie von Kurven, auf die wir später zurückkommen und die man Parabeln nennt. Insbesondere sind sie diejenigen Parabeln, deren Symmetriegeraden zur Ordinatenachse parallel liegen. Die Symmetriegerade einer Parabel wird auch die Parabelachse, der Punkt, in dem sie die Parabel trifft, also hier der tiefste oder höchste Punkt der Bildkurve, der Parabelscheitel genannt.

9. Beispiel: Die Achse der Parabel

$$y = -2x^2 + 5x - 8$$

zu bestimmen. Wegen $a = -2 < 0$ hat die Kurve die Form eines Berges. Wir bestimmen also ihren höchsten Punkt, dessen Tangente zur x-Achse parallel ist. Die Steigung der Tangente ist der Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = -4x + 5,$$

und sie ist gleich Null für $x = 1\frac{1}{4}$. Also ist die Parabelachse die Parallele zur y-Achse mit dieser Abszisse. Dasselbe geht aus der zweiten Gleichung (8) hervor, da hier $a = -2$, $b = 5$ ist, diese Gleichung also liefert: $m = 5 : 4 = 1\frac{1}{4}$. Da man sein Gedächtnis nicht unnötig mit den Formeln (8) belasten soll, ist die Ermittelung mit Hilfe des gleich Null gesetzten Differentialquotienten vorzuziehen.

Der Leser wird die Hoffnung hegen, daß auch die Bildkurven der nächst einfachen ganzen Funktion, nämlich der ganzen Funktionen dritten Grades

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + g, \tag{9}$$

etwas Einheitliches haben. Das ist zwar der Fall, aber die Sache liegt doch nicht so einfach wie bei den ganzen Funktionen zweiten Grades. Das kommt daher, daß in (9) vier Konstanten vorkommen. Daraus kann man schließen, daß man mit einer affinen Veränderung und mit Verschiebungen parallel zur x- und zur y-Achse nicht auskommen wird, denn dafür stehen uns nur drei willkürlich wählbare Konstanten k, m, n zur Verfügung. Wir wollen hierauf nicht näher eingehen.

Im Anschlusse noch eine kleine Anmerkung: In (9) haben wir die Konstanten mit a, b, c, g und nicht mit a, b, c, d bezeichnet. Der Buchstabe d dient nämlich in der Differentialrechnung als das Differentialzeichen bei dx und dy, deshalb muß man ihn sonst vermeiden, weil andernfalls Verwirrung vorkommen könnte. Was den Buchstaben e betrifft, so vermeiden wir ihn deshalb, weil man damit, wie im 6. und 7. Kap. auseinandergesetzt werden wird, eine gewisse sehr wichtige besondere Zahl bezeichnet. Auch der Buchstabe f ist zu vermeiden, da wir ihn als Funktionszeichen bei $f(x)$ gebrauchen. Deshalb wurde in (9) die letzte Konstante g genannt.

10. Beispiel: Aus einem rechteckigen Stück Pappe von 8 cm Länge und 5 cm Breite soll dadurch, daß man an den Ecken gleich große Quadrate abschneidet und dann die Ränder umknickt, eine offene Schachtel hergestellt werden, siehe Fig. 69. Von der Wahl der Länge der Quadratseite x, d. h. der Schachtelhöhe, hängt die Form der Schachtel und die Größe ihres Volumens in ccm ab. Da die Grundfläche die Kantenlängen $8-2x$ und $5-2x$ hat, also gleich $(8-2x)(5-2x)$ qcm ist, ergibt sich als Schachtelinhalt in ccm:

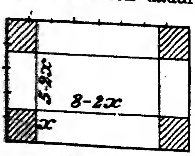


Fig. 69.

(10) $$y = (8 - 2x)(5 - 2x)x.$$

Dies ist eine ganze Funktion **dritten** Grades. Ausmultiplizieren gibt:

(11) $$y = 4x^3 - 26x^2 + 40x.$$

Hieraus berechnet man den Differentialquotienten:

(12) $$\frac{dy}{dx} = 12x^2 - 52x + 40.$$

Die Schachtelhöhe ist höchstens halb so lang wie die kurze Rechteckseite, d. h. höchstens gleich $2\frac{1}{2}$ cm. In Betracht kommen also nur Werte von x zwischen 0 und $2\frac{1}{2}$. Für x wählen wir eine Reihe von Werten in diesem Bereich. Indem wir dabei y bequemer aus (10), nicht aus (11) berechnen, bekommen wir:

x	y	$\frac{dy}{dx}$	
0	0	40	positiv
$\frac{1}{2}$	14	17	
1	18	0	
$1\frac{1}{2}$	15	-11	negativ
2	8	-16	
$2\frac{1}{2}$	0	-15	

Wenn man die Funktion y graphisch darstellt, so daß die Abszissen die Schachtelhöhen, die Ordinaten die Schachtelinhalte durch Strecken veranschaulichen, findet man eine Kurve, die vom Anfangspunkt an **steigt**, da $dy : dx$ zunächst positive Werte hat. Für $x = 1$ ist die **Steigung der Tangente gleich Null**. Hier ist der **Gipfel** der Kurve. Für $x > 1$ wird die Steigung negativ, d. h. die Kurve **fällt**, bis sie die x-Achse an der Stelle $x = 2\frac{1}{2}$ trifft, siehe Fig. 70. Allerdings haben wir dies noch nicht bewiesen, da wir nur einige Stellen betrachtet haben. Um es zu tun, formen wir den Wert von $dy : dx$ etwas um. Die Stelle $x = 1$ ist besonders bedeutsam, weil hier $dy : dx$ gleich Null wird. Wir können nun $dy : dx$ so ausdrücken, daß $x - 1$ statt x vorkommt, also derjenige Wert, der für $x = 1$ gleich Null ist. In der Tat, wenn wir in (12) statt $12x^2$ zunächst $12(x-1)^2$ schreiben, ist dies fehlerhaft, nämlich um $-24x + 12$ größer als $12x^2$, weshalb $24x - 12$ noch addiert werden muß. Deshalb kommt

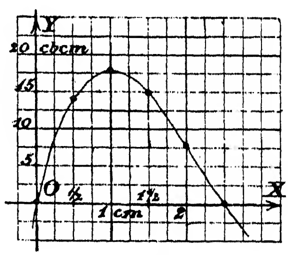


Fig. 70

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 12(x-1)^2 + 24x - 12 - 52x + 40 \\ &= 12(x-1)^2 - 28(x-1) = 12(x-1)(x - 3\tfrac{1}{3}).\end{aligned}$$

Da x zwischen 0 und $2\frac{1}{2}$ liegen muß, ist $x - 3\frac{1}{3}$ negativ. Dagegen ist $x - 1$ negativ für x kleiner als 1 und positiv für x größer als 1. Also für x zwischen 0 und 1 ist die Steigung positiv, für x zwischen 1 und $2\frac{1}{2}$ negativ. Für $x = 1$ hat die Kurve daher ihre einzige in Betracht kommende höchste Stelle, d. h. für $x = 1$ ist y am größten. Dies bedeutet: Die Schachtel wird den größten Inhalt haben, wenn man den Rand gerade **1 cm** hoch wählt. Der Inhalt ist dann **18 ccm**.

Jetzt betrachten wir ganze Funktionen beliebigen Grades n. Dabei ist unter n irgendeine ganze positive Zahl zu verstehen. Jede ganze Funktion n^{ten} Grades ist eine Summe von $n+1$ Gliedern, nämlich der mit Konstanten multiplizierten Potenzen x^n, $x^{n-1}, \ldots x^2$, x und einer letzten additiven Konstante (die man, wenn man will, als Faktor von x^0 bezeichnen kann, weil $x^0 = 1$ ist). Alle $n+1$ Konstanten zusammen heißen die Koeffizienten der Funktion. Sie der Reihe nach a, b, c usw. zu nennen, ist unübersichtlich und wegen der zu vermeidenden Zeichen d, e, f (vgl. S. 96) bedenklich. Wir bezeichnen sie sämtlich mit a, hängen aber dem a jedesmal einen Index (vgl. S. 61) an, der angibt, zu welcher Potenz von x der Koeffizient gehören soll. Demnach schreiben wir eine ganze Funktion n^{ten} Grades so:

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0. \tag{13}$$

Ihr Differentialquotient ist

$$\frac{dy}{dx} = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + 2 a_2 x + a_1. \tag{14}$$

Wir wissen, daß die Funktion überall stetig ist. Da auch der Differentialquotient (14) eine ganze Funktion ist, hat auch er für jedes x einen bestimmten endlichen Wert. Wenn wir die Bildkurve der Funktion y im Sinn wachsender Abszissen durchlaufen (S. 32), wird sie abwechselnd steigen und fallen können, d. h. aus Bergen und Tälern bestehen können, aber nirgends unendlich große Ordinaten haben. Auch wird ihre Tangente nirgends zur y-Achse parallel (weil sonst der Differentialquotient unendlich groß wäre). Doch gilt dies nur für endliche Werte der Abszisse x. Mithin ist noch zu fragen, wohin die Bildkurve strebt, wenn x nach unendlich großen Werten strebt?

Zur Beantwortung der Frage formen wir zuerst den Ausdruck der Funktion (13) um, indem wir die rechte Seite mit x^n multiplizieren und, um dies wieder gut zu machen, jeden Summanden mit x^n dividieren:

$$y = x^n \left(a_n + a_{n-1} \cdot \frac{1}{x} + \ldots + a_2 \cdot \frac{1}{x^{n-2}} + a_1 \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \cdot \frac{1}{x^n}\right).$$

Den Differentialquotienten (14) können wir entsprechend so umformen

$$\frac{dy}{dx} = x^{n-1}\left(n a_n + (n-1) a_{n-1} \cdot \frac{1}{x} + \ldots + 2 a_2 \cdot \frac{1}{x^{n-2}} + a_1 \cdot \frac{1}{x^{n-1}}\right).$$

Wenn nun x, sei es positiv oder negativ, über jede Zahl wächst, d. h. wenn $\lim x = +\infty$ oder $-\infty$ ist, streben alle Brüche

$$\frac{1}{x}, \ldots \frac{1}{x^{n-2}}, \quad \frac{1}{x^{n-1}}, \quad \frac{1}{x^n}$$

nach Null. Also wird dann

$$\lim y = \lim (x^n) \,.\, a_n, \qquad \lim \frac{dy}{dx} = \lim (x^{n-1}) \,.\, n\, a_n.$$

Wir nehmen selbstredend $n > 1$ an, denn für $n = 1$ handelt es sich um die linearen Funktionen, deren Bilder Geraden sind. Bei der Annahme $n > 1$ strebt auch x^{n-1} nach $+\infty$ oder $-\infty$, falls der absolute Betrag von x über jede Zahl wächst. Sowohl y als auch der Differentialquotient streben also nach dem positiv oder negativ Unendlichen. Ist n gerade, so ist x^n immer positiv, während x^{n-1} dasselbe Vorzeichen wie x hat. Ist n ungerade, so ist x^{n-1} immer positiv, während x^n dasselbe Vorzeichen wie x hat. Da ferner a_n positiv oder negativ sein kann, ergeben sich folgende Möglicheiten:

n	a_n	$\lim x$	$\lim y$	$\lim \frac{dy}{dx}$	
gerade	positiv	$-\infty$ $+\infty$	$+\infty$ $+\infty$	$-\infty$ $+\infty$	1. Fall
	negativ	$-\infty$ $+\infty$	$-\infty$ $-\infty$	$+\infty$ $-\infty$	2. Fall
ungerade	positiv	$-\infty$ $+\infty$	$-\infty$ $+\infty$	$+\infty$ $+\infty$	3. Fall
	negativ	$-\infty$ $+\infty$	$+\infty$ $-\infty$	$-\infty$ $-\infty$	4. Fall

11. Beispiel: Im 10. Beispiele trat die ganze Funktion dritten Grades

$$y = 4x^3 - 26x^2 + 40x$$

auf. Hier ist $n = 3$ ungerade, $a_n = a_3 = 4$ positiv. Also liegt der 3. Fall vor: Die Bildkurve kommt beim Durchlaufen im Sinn wachsender Abszissen vom Negativ-Unendlichen (von unten bei der gewöhnlichen Lage des Achsenkreuzes) mit stark steigender Tangente und geht nach dem Positiv-Unendlichen (nach oben) mit ebenfalls stark steigender Tangente. Dazwischen kann sie selbstredend noch Berge und Täler haben. In der Tat sieht sie so aus, wie es Fig. 71 zeigt. Die frühere Fig. 70 zeigt nur den damals gebrauchten Teil der Kurve von $x = 0$ bis $x = 2{,}5$.

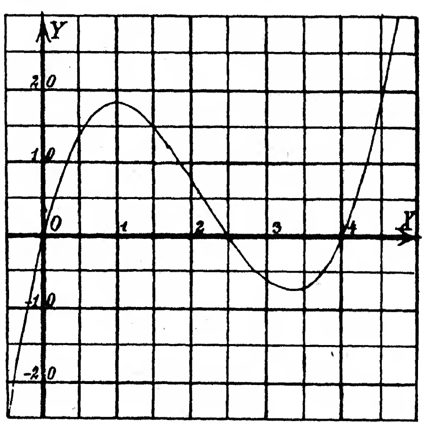


Fig. 71.

Was die Berechnung der Werte einer bestimmt vorgelegten ganzen Funktion höheren Grades betrifft, bei der also die Koeffizienten als bestimmte Zahlen gegeben sind; so wird sie mühselig, wenn der Grad groß ist, wegen der Potenzen von x. Bequemer ist es, wenn die Funktion zufällig in Produktform vorliegt, wie im 10. Beispiel unter (10) in der Form $y = (8 - 2x)(5 - 2x)x$. Deshalb ist es angebracht, zu erörtern, daß man **immer** aus allen Gliedern einer vorgelegten ganzen Funktion **irgendeine lineare Funktion** $x - h$ **absondern** kann, wenn h eine beliebig gewählte Zahl bedeutet. Allerdings bleibt dann schließlich immer noch eine letzte **additive Konstante** übrig, was jedoch die Berechnung nicht unbequem macht. Wie diese gemeint ist, wird man besser erkennen, wenn man ein Zahlenbeispiel betrachtet:

12. **Beispiel**: Wir versuchen, von der Funktion

$$y = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 42$$

den Faktor $x - 3$ abzusondern. Das dabei einzuschlagende Verfahren heißt die **Partialdivision**, weil man die Glieder von y nach und nach mit $x - 3$ dividiert. Dabei geht man nämlich vor wie beim Dividieren zweier Zahlen, wo man zuerst nur die Ziffern von der höchsten Stellenzahl benutzt. Wir fassen hier zuerst die höchste Potenz von x ins Auge, also das Glied $3x^4$. Seine Division mit x gibt $3x^3$. Wenn wir also $x - 3$ mit $3x^3$ multiplizieren und das Ergebnis von y abziehen, wird das Glied $3x^4$ verschwinden. In der Tat gibt die Multiplikation $3x^4 - 9x^3$ und die Subtraktion von y also als Rest $7x^3 + 5x - 42$. Demnach ist $3x^3$ unser **erstes Teilergebnis**. Vom Rest fassen wir wieder die höchste Potenz ins Auge, also $7x^3$. Dies Glied gibt mit x dividiert $7x^2$ als **zweites Teilergebnis**. Da $x - 3$ mit $7x^2$ multipliziert $7x^3 - 21x^2$ liefert, ist dies vom Rest abzuziehen. Dann verbleibt als neuer Rest $21x^2 + 5x - 42$. Er ist nur noch vom zweiten Grad. Nun ist $21x^2 : x = 21x$ und $(x - 3) . 21x = 21x^2 - 63x$. Mithin ist $21x$ das **dritte Teilergebnis**, und $21x^2 - 63x$ muß vom letzten Rest abgezogen werden. Dann verbleibt der Rest $68x - 42$. Das **vierte Teilergebnis** ist $68x : x$ oder 68. Wird schließlich $(x - 3)\,68$ oder $68x - 204$ vom Rest abgezogen, so bleibt die Konstante 162 übrig. Man kann also y mit $x - 3$ dividieren; dabei ergeben sich nach und nach die Glieder $3x^3$, $7x^2$, $21x$ und 68, und als Rest, der sich nicht mehr mit $x - 3$ dividieren läßt, verbleibt die Zahl 162. Also ist:

$$3x^4 - 2x^3 + 5x - 42 = (x - 3)(3x^3 + 7x^2 + 21x + 68) + 162. \tag{15}$$

Im Ergebnis (15) des letzten Beispiels steht **links** die **gegebene** Funktion, sie ist **vierten** Grades. Rechts steht zuerst das Produkt aus dem linearen Faktor $x - 3$ mit einer Funktion, die **selbstverständlich von um Eins geringerem** Grad, also vom **dritten** Grad ist. Den Schluß bildet die additive Konstante 162. Man wird wohl übersehen, daß sich im allgemeinen Fall ganz Entsprechendes ergibt: Wir nehmen statt der Funktion vierten Grades eine ganze Funktion n^{ten} Grades an, etwa in der Darstellung (13). Der lineare Faktor, der herausgezogen werden soll, sei $x - h$. Die übrigbleibende additive Konstante, der letzte Rest, sei r. Auf der rechten Seite wird dann

$x - h$ multipliziert mit einer ganzen Funktion von nur noch $(n-1)^{\text{tem}}$ Grad stehen. Sie wollen wir mit

$$b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

bezeichnen. Die allgemeine Formel wird demnach so aussehen:

$$(16)\left\{\begin{aligned} &a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \\ &= (x-h)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + b_{n-3}x^{n-3} + \ldots + b_2x^2 + \\ &\qquad + b_1x + b_0) + r. \end{aligned}\right.$$

Aber sie ist hiermit noch nicht streng bewiesen, sondern vorerst nur eine Vermutung. Man kann jedoch leicht zeigen: Wenn die ganze Funktion n^{ten} Grades gegeben ist, und wenn außerdem eine Konstante h gegeben wird, gibt es stets Konstanten b_{n-1}, b_{n-2}, b_{n-3}, ... b_2, b_1, b_0 und eine Restkonstante r derart, daß die Gleichung (16) für alle Werte von x richtig ist. Diesen Beweis führen wir nicht wie im 12. Beispiel durch Partialdivision, sondern indem wir Additionen und Multiplikationen anwenden. Die rechte Seite der Gleichung (16) lautet zunächst ausgerechnet so:

$$\begin{aligned} &b_{n-1}x^n + b_{n-2}x^{n-1} + b_{n-3}x^{n-2} + \ldots + b_1x^2 + b_0x - \\ &\quad - hb_{n-1}x^{n-1} - hb_{n-2}x^{n-2} - \ldots - hb_2x^2 - hb_1x - hb_0 + r. \end{aligned}$$

Nun ist (16) richtig, sobald die gegebenen Koeffizienten a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ... a_2, a_1, a_0 links in (16) gleich denjenigen Koeffizientensummen sind, die sich hier als Faktoren von $x^n, x^{n-1}, x^{n-2} \ldots x^2$, x und als additives Glied ergeben. Mithin wird verlangt:

$$\begin{aligned} a_n &= b_{n-1}, \\ a_{n-1} &= b_{n-2} - hb_{n-1}, \\ a_{n-2} &= b_{n-3} - hb_{n-2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_2 &= b_1 - hb_2, \\ a_1 &= b_0 - hb_1, \\ a_0 &= r - hb_0 \end{aligned} \qquad \text{d. h.: (17)} \left\{\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n, \\ b_{n-2} &= a_{n-1} + hb_{n-1}, \\ b_{n-3} &= a_{n-2} + hb_{n-2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_1 &= a_2 + hb_2, \\ b_0 &= a_1 + hb_1, \\ r &= a_0 + hb_0. \end{aligned}\right.$$

Die Formeln (17) geben aber einfache Vorschriften, wie man nacheinander b_n, b_{n-1}, b_{n-2}, ... b_1, b_0 und r durch Multiplikation und Addition berechnen kann, und damit ist der Beweis erbracht.

13. Beispiel: Wir zeigen, wie diese Berechnung anstatt der im 12. Beispiel angewandten Partialdivision dasselbe ergibt wie dort: Im 12. Beispiel liegt eine ganze Funktion vierten Grades vor, also ist $n = 4$. Die Koeffizienten der Funktion sind $a_4 = 3$, $a_3 = -2$, $a_2 = 0$, $a_1 = 5$, $a_0 = -42$. (Man muß nämlich beachten, daß das Glied mit x^2 fehlt, also $a_2 = 0$ zu setzen ist.) Ferner ist im 12. Beispiel $h = 3$ gewählt worden. Die Gleichungen (17) sind demnach jetzt die folgenden fünf:

$$b_3 = 3,\ b_2 = -2 + 3b_3,\ b_1 = 3b_2,\ b_0 = 5 + 3b_1,\ r = -42 + 3b_0.$$

Sie geben $b_3 = 3$, $b_2 = 7$, $b_1 = 21$, $b_0 = 68$, $r = 162$, und dies steht mit der Schlußgleichung (15) des 12. Beispiels im Einklange.

Die Gleichung (16) stellt eine Umformung einer ganzen Funktion dar. Um das Wesentliche davon durch einen Satz zusammenzufassen, ist es bequem, eine ganze Funktion n^{ten} Grades mit $f_n(x)$ zu bezeichnen. Dann können wir nämlich sagen:

Satz 4: Wird irgendeine ganze Funktion n^{ten} Grades $f_n(x)$ von x vorgelegt und bedeutet h eine beliebig gewählte Konstante, so gibt es stets eine gewisse ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades $f_{n-1}(x)$ von x und eine gewisse Konstante r derart, daß für alle Werte von x die Gleichung gilt:

$$f_n(x) = (x - h) \cdot f_{n-1}(x) + r.$$

In bezug auf die additive Konstante r, den Rest, ist eine Bemerkung zu machen. Im 12. und 13. Beispiel, wo die ganze Funktion

$$3x^4 - 2x^3 + 5x - 42$$

vorgelegt war und $h = 3$ angenommen wurde, möge man $x = 3$ in die Funktion einsetzen. Dann kommt $3 \cdot 81 - 2 \cdot 27 + 5 \cdot 3 - 42$ oder 162. Dies also ist gleich dem Rest r in Gleichung (15). Das ist kein Zufall! In der allgemeinen Formel (16), die in Satz 4 kürzer so geschrieben ist:

$$f_n(x) = (x - h) \cdot f_{n-1}(x) + r, \tag{18}$$

möge man für x den Wert h einsetzen, was erlaubt ist, da die Formel für alle Werte von x gilt. Weil der rechts vorkommende Faktor $x - h$ gleich Null wird, wenn man $x = h$ selbst setzt, kommt dann:

$$a_n h^n + a_{n-1} h^{n-1} + a_{n-2} h^{n-2} + \ldots + a_2 h^2 + a_1 h + a_0 = r \tag{19}$$

oder, kürzer geschrieben:

$$f_n(h) = r. \tag{20}$$

Unter $f_n(h)$ wird selbstverständlich $f_n(x)$ für $x = h$ verstanden. Der Rest r ist also stets gleich dem Wert, den $f_n(x)$ für $x = h$ annimmt.

Insbesondere ist es möglich, daß $x = h$ ein derartiger Wert von x ist, für den die Funktion $f_n(x)$ gleich Null wird. Nach (20) ist dann $r = 0$, so daß (18) die Form bekommt:

$$f_n(x) = (x - h)\, f_{n-1}(x).$$

Somit haben wir den

Satz 5: Dann und nur dann, wenn h ein Wert von x ist, für den eine vorgelegte ganze Funktion n^{ten} Grades

$f_n(x)$ den Wert Null hat, ist die Funktion $f_n(x)$ ohne Rest zerlegbar in das Produkt aus $x-h$ und einer ganzen Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades $f_{n-1}(x)$:

$$f_n(x) = (x-h)\, f_{n-1}(x).$$

14. Beispiel: Die Funktion vierten Grades

$$3x^4 - 2x^3 + 5x - 42,$$

die im 12. und 13. Beispiel betrachtet wurde, hat für $x = 2$ den Wert Null, wovon sich der Leser zunächst überzeugen möge. Deshalb ist die Funktion darstellbar in der Form:

$$3x^4 - 2x^3 + 5x - 42 = (x-2)\,(b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0).$$

Wir bestätigen dies durch Ausrechnung der rechten Seite:

$$3x^4 - 2x^3 + 5x - 42 = b_3 x^4 + (b_2 - 2b_3)\,x^3 + (b_1 - 2b_2)\,x^2 + (b_0 - 2b_1)\,x - 2b_0.$$

Die Vergleichung der Koeffizienten auf beiden Seiten liefert nun $3 = b_3$, $-2 = b_2 - 2b_3$, $0 = b_1 - 2b_2$, $5 = b_0 - 2b_1$, $-42 = -2b_0$. Also ist $b_3 = 3$, $b_2 = 4$, $b_1 = 8$, $b_0 = 21$, mithin:

$$3x^4 - 2x^3 + 5x - 42 = (x-2)(3x^3 + 4x^2 + 8x + 21).$$

Statt zu sagen, daß eine ganze Funktion n^{ten} Grades

(21) $$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

für $x = h$ den Wert Null hat, kann man auch sagen, daß die Gleichung n^{ten} Grades

(22) $$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

die Lösung $x = h$ hat. Schon auf S. 23 betonten wir den Unterschied zwischen dem allgemeinen Zeichen x für eine beliebig veränderliche Größe und der vom Schulunterrichte her gewohnten Bezeichnung der Lösungen einer Gleichung mit x. In (21) ist x eine beliebig veränderliche Größe. Dagegen stellt (22) eine Bedingung für x dar; diese Gleichung sagt aus, daß es sich nur um solche Werte von x handeln soll, die sie befriedigen. Der Satz 5 kann nun so gefaßt werden:

Satz 6: Dann und nur dann, wenn h eine Lösung der **Gleichung** n^{ten} Grades

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

ist, läßt sich die ganze **Funktion** n^{ten} Grades

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

als Produkt aus $x-h$ und einer gewissen ganzen Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, also in der Form

$$(x-h)(b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_2x^2+b_1x+b_0)$$

für alle Werte von x darstellen.

Hat man also den Wunsch, eine gegebene ganze Funktion n^{ten} Grades $f_n(x)$ als ein Produkt in der Form $(x-h)f_{n-1}(x)$ darzustellen, so muß man die Konstante h so wählen, daß $x=h$ eine Lösung der Gleichung n^{ten} Grades $f_n(x)=0$ ist; und das erschwert die Sache. Denn man wird ja noch von der Schule her wissen, daß die Aufgabe, eine Lösung einer vorgelegten Gleichung n^{ten} Grades ausfindig zu machen, nicht so einfach ist. Wir kommen auf diese Aufgabe in § 3 zurück

§ 2. **Maxima und Minima.**

Öfters haben wir uns veranlaßt gesehen, in einzelnen Aufgaben solche Werte von x zu bestimmen, für die eine Funktion y am größten wird, so im 3. Beispiel auf S. 55, im 9. auf S. 96 und im 10. Beispiel auf S. 97. Untersuchen wir dies jetzt allgemein! Wir wollen annehmen, eine vorgelegte Funktion $y=f(x)$ sei stetig, habe also eine stetige Bildkurve, und die Kurve habe überall Tangenten, d. h. die Funktion sei differentiierbar. Fig. 72 stelle die Bildkurve dar. Man erinnere sich daran, daß sie im Sinne wachsender Abszissen, also in Fig. 72 von links nach rechts, durchlaufen werden soll. Da die Steigung das Verhältnis zusammengehöriger Zunahmen von y und x ist, die Zunahme von x aber bei dieser Festsetzung beständig positiv bleibt, ist dann die Steigung positiv oder negativ, je nachdem die Zunahme von y positiv oder negativ ist. Weil die Steigung durch den Differentialquotienten angegeben wird, folgt daraus der

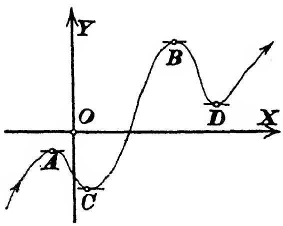


Fig. 72

Satz 7: Ist eine Funktion $y=f(x)$ differentiierbar und wird ihre Bildkurve im Sinn der positiven x-Achse durchlaufen, so steigt die Kurve, d. h. so wächst y, solange der Differentialquotient positiv ist; dagegen fällt die Kurve, d. h. nimmt y ab, solange der Differentialquotient negativ ist.

In Fig. 72 steigt die Kurve vor A und B und nach C und D; sie fällt dagegen nach A und B und vor C und D. Deshalb ist der Differentialquotient vor A und B und nach C und D positiv, dagegen nach A und B und vor C und D negativ. Mithin tritt in A, B, C, D ein Wechsel im Vorzeichen des Differentialquotienten ein, und dies kommt

dadurch zustande, daß der Wert des Differentialquotienten (der Steigung) dort durch Null hindurch geht. Aber es sind noch andere Fälle denkbar. Wenn nämlich die Kurve in einem Punkt die Steigung Null, d. h. eine zur x-Achse parallele Tangente hat, sind *für die kurz vorher oder nachher kommenden Punkte* überhaupt folgende Möglichkeiten vorhanden:

	Die Steigung ist:			
vorher	positiv	positiv	negativ	negativ
nachher	positiv	negativ	positiv	negativ
	1.	2.	3.	4.

Der erste Fall tritt in Fig. 73 an der Stelle 1 auf, der zweite an der Stelle 2 usw. Die Kurve weist daher im 1. und 4. Fall eine Art von *Terrasse* auf. Im 2. Fall dagegen hat die Kurve eine *höchste Stelle*, einen *Maximalwert* von y, im 3. Fall eine *tiefste Stelle*, einen *Minimalwert* von y. Sehr wohl kann es vorkommen, daß mehrere Maximalwerte von y auftreten oder auch mehrere Minimalwerte, wie in der vorigen Fig. 72. Wir sagen überhaupt: *y hat an einer Stelle ein Maximum (Minimum), sobald nur die unmittelbar vorhergehenden und unmittelbar nachfolgenden Werte von y kleiner (größer) sind.*

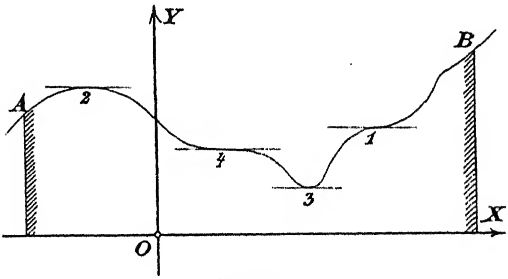


Fig. 73.

In der Natur einer Aufgabe kann es liegen, daß für x nur solche Werte in Betracht kommen, die einer gewissen Spanne, einem sogenannten *Intervall*, angehören. (Im 10. Beispiele, S. 97, war x auf die Werte zwischen 0 und $2\frac{1}{2}$ beschränkt.) Dies bedeutet dann, daß wir nur ein Stück der Kurve, wie z. B. in Fig. 73 das von A bis B, ins Auge zu fassen haben. An den Grenzen A und B dieses Stückes treten dann Werte y auf, die nur mit denjenigen unmittelbar benachbarten Werten zu vergleichen sind, die innerhalb des Intervalles liegen, so in A nur mit den weiter rechts, in B nur mit den weiter links liegenden Werten. An diesen Grenzen bezeichnen wir daher y als ein Maximum, wenn die unmittelbar daneben, aber im Intervalle liegenden y kleiner sind, dagegen als ein Minimum, wenn sie größer sind. Danach tritt in Fig. 73 in A ein Minimum und in B

ein Maximum von y ein. Derartige Maxima und Minima nennen wir Grenzmaxima und Grenzminima. Zusammengefaßt:

Satz 8: Ist $y = f(x)$ eine differentiierbare Funktion von x, so kann sie nur da ein Maximum oder Minimum haben, **wo der Differentialquotient gleich Null ist.** Daselbst tritt wirklich ein **Maximum** auf, wenn der Differentialquotient unmittelbar vorher positiv und unmittelbar nachher negativ ist, wenn er also beim Durchschreiten der Stelle **abnimmt.** Dagegen tritt daselbst ein **Minimum** auf, wenn der Differentialquotient unmittelbar vorher negativ und unmittelbar nachher positiv ist, wenn er also beim Durchschreiten der Stelle **zunimmt.** In allen anderen Fällen tritt an der Stelle weder ein Maximum noch ein Minimum auf. Ist x auf ein Intervall beschränkt, so kann es außerdem an den Grenzen des Intervalls **Grenzmaxima** oder **Grenzminima** geben.

Hat man den Satz völlig erfaßt, so wird man die zeichnerische Darstellung nicht mehr nötig haben, um bei einer vorgelegten Aufgabe die Maxima und Minima zu finden, sondern geradezu die Werte von x suchen für die der Differentialquotient gleich Null ist.

1. Beispiel: In eine Wand ist eine Blechplatte wagerecht eingelassen, so daß ein Rechteck vorsteht, dessen Breite von der Wand bis vorn 9 cm beträgt, während es 48 cm Länge hat. Schneidet man an den beiden freien Ecken kleine gleichgroße Quadrate aus und kippt man die Ränder nach oben um, so entsteht ein längs der Wand laufender offener Behälter. Wie hoch muß der Rand oder, was dasselbe ist, die Quadratseite gewählt werden, damit der Behälter einen möglichst großen Inhalt faßt? Diese Aufgabe erinnert an das 10. Beispiel auf S. 96. Ist x die Quadratseite in Zentimetern, so ist der Inhalt y in Kubikzentimetern:

$$y = (48 - 2x)(9 - x)\,x.$$

Der Unterschied gegenüber jenem Beispiel liegt, abgesehen von den Zahlenwerten, darin, daß der zweite Faktor $-x$ und nicht $-2x$ enthält. Hier ist. wie man berechnen möge:

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 132x + 432.$$

Die Quadratseite x kann höchstens gleich 9 gewählt werden. Denken wir uns y für die Werte von x zwischen 0 und 9 berechnet und in ein Achsenkreuz eingetragen, so bekommen wir dadurch eine Kurve, die vom Nullpunkt ausgeht und die x-Achse wieder an der Stelle $x = 9$ trifft, denn y ist gleich Null für $x = 9$. Dazwischen ist y überall positiv. Zu Anfang ist die Steigung gleich 432, an der Stelle $x = 9$ gleich -270, d. h. zuerst steigt die Kurve, zuletzt fällt sie. Sie muß deshalb einen Gipfel haben, d. h. irgendwo zwischen $x = 0$ und $x = 9$ hat y sicher ein Maximum. Dies wird gesucht. An der gesuchten Stelle muß die Steigung gleich Null sein; also haben wir einen Wert von x zwischen 0 und 9 zu suchen, für den

$$6x^2 - 132x + 432 = 0$$

ist. Dies ist eine quadratische Gleichung für die Unbekannte (jetzt nicht Veränderliche) x. Um die Lösungen der Gleichung zu finden, verfahren wir so: Zuerst schaffen wir das konstante Glied auf die rechte Seite, und dann dividieren wir beide Seiten mit 6, so daß wir bekommen:

$$x^2 - 22\,x = -72.$$

Jetzt ergänzen wir $x^2 - 22x$ zum Quadrat, wie man sich ausdrückt, d. h. wir erinnern uns daran, daß $(x-a)^2 = x^2 - 2\,a\,x + a^2$ ist, und sehen, daß die Gleichung links zwei Glieder $x^2 - 2 \,.\, 11\,x$ hat, die als Anfang dieses Quadrats gebraucht werden können. Offenbar müssen wir $a = 11$ nehmen. Dann ist $(x-11)^2 = x^2 - 22\,x + 121$. Dieses vollständige Quadrat $(x-11)^2$ wird in der Gleichung links stehen, wenn links noch der Summand 121 vorkommt. Den dürfen wir hinsetzen, sobald wir es auch rechts tun. Also schreiben wir:

$$x^2 - 22\,x + 121 = -72 + 121$$

oder

$$(x-11)^2 = 49 = 7^2.$$

Ziehen wir nun die Quadratwurzeln aus, so folgt, daß entweder:

$$x - 11 = 7, \text{ also } x = 18$$

oder

$$x - 11 = -7, \text{ also } x = 4$$

sein muß. Da x zwischen 0 und 9 liegt, ist nur $x = 4$ zu gebrauchen. Weil, wie gesagt, zwischen $x = 0$ und $x = 9$ ein Maximum vorkommt, muß es also für $x = 4$ eintreten. Man wird mithin 4 cm des Randes der Blechplatte umknicken und erhält dadurch, wie man berechnen möge, einen Behälter von 800 ccm Inhalt. Nützlich es ist, die Bildkurve der Funktion y von $x = 0$ bis $x = 9$ zu zeichnen. Wir haben es nicht getan, um zu zeigen, daß die nur gedachte Bildkurve für die Lösung der Aufgabe ausreicht.

2. Beispiel: Unter allen oben offenen zylindrischen Gefäßen von derselben vorgeschriebenen Oberfläche (gleich Mantel plus Grundfläche) soll dasjenige herausgefunden werden, das den größten Inhalt hat. Wird der Radius des Grundkreises groß gewählt, so bleibt für den Mantel wenig Material übrig. Das Gefäß wird also sehr flach und wenig Inhalt haben. Wählt man andererseits den Radius der Grundfläche klein, so bleibt zwar für den Mantel viel Material übrig, das Gefäß wird sehr hoch, röhrenförmig, hat aber wegen der geringen Weite nur geringen Inhalt. Zwischen beiden Möglichkeiten wird die gewünschte Form liegen. Die gegebene Gesamtfläche des Mantels und Bodens betrage F qcm. Beliebig wählen können wir zunächst den Radius der Bodenfläche, allerdings offenbar nicht negativ und nicht über alle Grenzen groß. Wir setzen ihn gleich x cm. Wie groß ist dann der Inhalt y? Die Grundfläche hat $\pi\,x^2$ qcm; also bleiben für den Mantel $(F - \pi\,x^2)$ qcm. Er wird auseinandergebreitet ein Rechteck, dessen Grundlinie gleich dem Umfange $2\,\pi\,x$ des Bodens ist. Daher ist die Höhe h gleich der zur Verfügung stehenden Fläche $F - \pi\,x^2$, dividiert mit $2\,\pi\,x$, d. h.

$$h = \frac{F - \pi\,x^2}{2\,\pi\,x}.$$

Da der Rauminhalt gleich Grundfläche $\pi\,x^2$ mal Höhe h ist, hat er, ausgedrückt in Kubikzentimetern, den Wert

$$y = \pi\,x^2 \cdot \frac{F - \pi\,x^2}{2\,\pi\,x} = \tfrac{1}{2}\,F\,x - \tfrac{1}{2}\,\pi\,x^3.$$

Hier ist:

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}F - \tfrac{3}{2}\pi x^2.$$

Dies ist gleich Null für

$$\tfrac{3}{2}\pi x^2 = \tfrac{1}{2}F, \quad \text{also } x^2 = \frac{F}{3\pi},$$

d. h. für

$$x = \sqrt{\frac{F}{3\pi}}.$$

Die Wurzel muß positiv gewählt werden. Wir sahen, daß ein Maximum von y vorhanden sein muß. Da sich andererseits nur dieser eine Wert von x ergibt, für den y überhaupt ein Maximum haben kann, tritt sicher für diesen Wert von x das Maximum ein. Alsdann ergibt sich als Gefäßhöhe:

$$h = \frac{F - \pi\frac{F}{3\pi}}{2\pi\sqrt{\frac{F}{3\pi}}} = \frac{F}{3\pi\sqrt{\frac{F}{3\pi}}} = \sqrt{\frac{F}{3\pi}}.$$

Dies ist derselbe Wert wie der von x. Das Gefäß wird mithin den größten Inhalt haben, wenn seine Höhe gleich dem Radius des Grundkreises ist.

3. Beispiel: Man behandle ebenso die Aufgabe: Unter allen oben geschlossenen zylindrischen Gefäßen von derselben vorgeschriebenen Oberfläche (gleich Mantel plus Bodenfläche plus Deckelfläche) soll dasjenige herausgefunden werden, das den größten Inhalt hat.

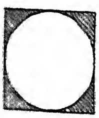


Fig. 74.

4. Beispiel: Wie stellen sich die Lösungen der beiden letzten Aufgaben dar, wenn man annimmt, daß das Stück, das beim Herausschneiden der kreisförmigen Bodenfläche (oder des Deckels) von dem umschriebenen Quadrat übrig bleibt (siehe Fig. 74), als Abfall nicht benutzt wird? Wir wollen dies nur für den Fall des offenen Gefäßes kurz andeuten. Ist x der Radius, so wird durch die Herstellung der Grundfläche nicht πx^2, sondern $4x^2$, die Quadratfläche, verbraucht. Also bleibt für den Mantel nur $F - 4x^2$ übrig, so daß die Höhe gleich $(F - 4x^2) : 2\pi x$ ist, usw.

5. Beispiel: Aus einem Stück Blech soll ein viereckiger geschlossener Kasten hergestellt werden, dessen Grundfläche ein Quadrat ist. Welche Form muß man dem Kasten geben, damit er möglichst großes Volumen bekommt, vorausgesetzt, daß die ganze Fläche (Grundfläche, Deckel und vier Seitenflächen) zusammen einen vorgeschriebenen Flächeninhalt haben? Diese Aufgabe ist wie das 2. Beispiel zu behandeln.

6. Beispiel: Dieselbe Aufgabe löse man für den Fall, wo der Kasten keinen Deckel haben soll.

§ 3. Auflösung von Gleichungen.

Wie am Ende des § 1 angekündigt wurde, beschäftigen wir uns jetzt mit der Auflösung von Gleichungen. Daß wir es gerade hier tun, hat seinen Grund darin, daß man nach Satz 8, S. 106, zur Bestimmung der

Maxima und Minima einer Funktion die Lösungen einer Gleichung braucht. Man weiß, daß die Auflösung von Gleichungen überhaupt eine recht wichtige Sache ist. Wir wollen uns damit keineswegs so beschäftigen, wie es im Schulunterricht geschieht, vielmehr vom Standpunkte der Anwendungen aus. Einige allgemeine Bemerkungen schicken wir voraus:

Zunächst sei noch einmal an den Unterschied zwischen einer beliebig veränderlichen Größe x und einer Lösung x einer Gleichung, also einer bestimmten, aber vorerst noch unbekannten Größe x erinnert. Darauf machten wir schon auf S. 23 aufmerksam. Im Schulunterricht wird gezeigt, daß man die Lösungen von Gleichungen bis zum vierten Grad, d. h. bis zu solchen von der Form

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + gx + h = 0,$$

worin die Koeffizienten a, b, c, g, h gegebene Konstanten bedeuten, mit Hilfe von Wurzelzeichen durch Formeln darstellen kann. Wegen dieser Darstellung hat sich bei den Mathematikern die Gewohnheit eingebürgert, die Lösungen einer Gleichung die Wurzeln der Gleichung zu nennen. Lehrer, auch Hochschullehrer gibt es, die diesen Ausdruck gebrauchen, ohne zu ahnen, welche Verwirrung sie dadurch in manchen Köpfen anrichten. Um Verwechslungen mit dem eigentlichen Wurzelbegriffe zu vermeiden, hüten wir uns davor; wir sprechen also immer von den Lösungen einer Gleichung. Nur damit der Leser nicht stutzig werde, wenn er gelegentlich anderswo von Wurzeln einer Gleichung reden hört, erwähnen wir diesen Umstand.

Die Lösungen einer allgemeinen Gleichung von höherem als viertem Grad kann man nicht mittels der Zeichen der Arithmetik, insbesondere mittels der Wurzelzeichen darstellen. Man „kann" es nicht, aber die Schuld liegt nicht an den Mathematikern, sondern sozusagen an den Gleichungen selbst. Denn es läßt sich geradezu beweisen, daß es unmöglich ist, daß man sich also vergeblich anstrengt, wenn man es zu tun versucht, ebenso vergeblich wie die Erfindung des Perpetuum mobile. Solange der Beweis noch fehlte, hat man viele vergebliche Versuche gemacht. Wir verdanken dem jung verstorbenen großen norwegischen Mathematiker Abel (1802—1829) den Nachweis der Unmöglichkeit der Auflösung von allgemeinen Gleichungen höheren als vierten Grades mittels der Zeichen der Arithmetik. Wir können auf den Beweis nicht eingehen, denn er ist nicht einfach. Er hat aber auch für unsere Zwecke keine sonderliche Bedeutung. Man darf nämlich nun nicht folgern, daß es unmöglich wäre, die Lösungen einer Gleichung höheren Grades zu bestimmen; man muß nur die Frage richtig stellen. In der Mathematik kommt es oft genug vor, daß man ein

Größe nicht vollständig genau angeben kann, obwohl man weiß, daß sie einen ganz bestimmten Wert hat. Dies gilt z. B. von der berühmten Zahl $\pi = 3{,}14159\ldots$. Aber in allen derartigen Fällen genügt es, ein Verfahren zu ermitteln, mittels dessen man einen Wert finden kann, der vom gesuchten um weniger abweicht, als man nur immer vorschreiben mag. Man schreibe z. B. vor, die gesuchte Zahl soll bis auf so und so viele Dezimalstellen abgerundet richtig sein; der Mathematiker soll diese Forderung erfüllen, z. B. für die Zahl π. Der Mathematiker steht überhaupt auf dem Standpunkte: Sobald er ein Verfahren hat, mittels dessen eine gesuchte Größe mit jedem beliebigen Grad der Genauigkeit gefunden werden kann, ist diese Größe nicht mehr unbekannt; vielmehr heißt sie dann bekannt. Uns kommt es nur auf die praktischen Anwendungen an, und man wird zugeben müssen, daß auch da dieser Standpunkt durchaus berechtigt ist. Denn bei allen praktischen Anwendungen handelt es sich um Näherungswerte, weil schon das bloße Abmessen von wirklich vorkommenden Größen mit unvermeidlichen Ungenauigkeiten belastet ist (vgl. S. 3). Freilich wäre es recht unvollkommen, wenn wir eine gesuchte Größe z. B. nur bis auf 1% genau finden könnten, denn es ist möglich, ja wahrscheinlich, daß man beim beständigen Vervollkommnen der menschlichen Arbeit eine weiter gehende Genauigkeit für diese Größe braucht. Solcher Vervollkommnung kann der Mathematiker in Ruhe harren, sobald er nur herausgebracht hat, wie man die Größe mit jedem gewünschten Grade der Genauigkeit ermitteln kann.

Ja selbst, wenn man die Lösungen einer Gleichung durch Formeln darstellen kann, bedeuten die Formeln doch in Wahrheit meistens nur Näherungsverfahren. In der Tat, man beweist auf der Schule, daß die quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

die Lösungen hat:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{2}$$

und hier tritt eine Quadratwurzel auf, die man doch nur in seltenen Fällen vollkommen ausrechnen kann, denn z. B. $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$ läßt sich nur angenähert berechnen, aber allerdings mit jedem gewünschten Grad der Genauigkeit.

Weshalb diese lange Auseinandersetzung? Die Mathematik ist wegen ihres eigenartigen Wesens mehr als jede andere Wissenschaft der Gefahr ausgesetzt, von Laien falsch verstanden zu werden. Man kann sagen, daß eigentlich jeder Ausspruch, der außerhalb des engeren Kreises der Mathematiker über ihre Wissenschaft geläufig ist, falsch

verstanden wird, so die Nichtauflösbarkeit von Gleichungen höheren als vierten Grades, so auch die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises, von der wir später (im § 5 des Kap. 10) gelegentlich reden werden, usw. Deshalb muß man uns schon die vorstehende lange Auseinandersetzung gestatten.

Unser Ziel ist also dies: Liegt eine bestimmte Gleichung vor, so wollen wir ein Verfahren ermitteln, mittels dessen man ihre Lösungen mit jedem gewünschten Grad der Genauigkeit finden kann.

Bevor wir daran gehen, wollen wir noch einiges in betreff der Formel (2) sagen. Der Leser wird ja bemerkt haben, daß wir nur bescheidene Anlehen von dem machen, was er noch von der Schule her weiß; und deshalb soll auch diese Formel (2) hier von neuem abgeleitet werden, und zwar, schon um den Kenner nicht zu langweilen, auf einem anderen Wege:

Vorgelegt sei also eine quadratische Gleichung (1), in der man sich unter der Konstanten a, b, c bestimmte Zahlen denke. Insbesondere soll $a \neq 0$ sein, weil sonst ja nur eine lineare Gleichung vorläge. Handelt es sich nun z. B. um die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}x^2 - x - \tfrac{3}{2} = 0,$$

so könnte man mit irgendeinem Werte x probieren, ob er eine Lösung ist. Wählt man hier z. B. $x = 3$, so wird die Gleichung erfüllt, aber das ist ein besonderer Glücksfall. Im allgemeinen wird, wenn eine Gleichung (1) vorliegt und für x irgendein bestimmter Wert eingesetzt wird, der Ausdruck $ax^2 + bx + c$ nicht den Wert Null bekommen. Wir bezeichnen daher den Wert, der sich ergibt, mit y:

$$y = ax^2 + bx + c. \tag{3}$$

Jetzt liegt etwas andres als in (1) vor: Da x irgendwie gewählt wurde, ist x hier eine beliebige Veränderliche und y eine quadratische Funktion von x. Die Aufgabe, die quadratische Gleichung (1) zu lösen, läßt sich daher so aussprechen: Gesucht werden diejenigen Werte von x, für die sich als Wert der Funktion y die Null ergibt. Deuten wir dies geometrisch! Nach S. 95 ist das Bild der Funktion (3) eine Parabel, deren Achse zur y-Achse parallel ist. Also suchen wir die Abszissen x derjenigen Parabelpunkte, deren Ordinaten $y = 0$ sind, d. h. die Abszissen der Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse. Nach S. 95 hat die Parabel für $a > 0$ die Form eines Tals, für $a < 0$ die eines Berges, und die tiefste Talstelle oder der Berggipfel, d. h. der Scheitel der Parabel, hat die Abszisse $x = -b : 2a$. Die Ordinate des Scheitels ergibt sich durch Einsetzen dieses Wertes in (3)

und ist $y = -(b^2 - 4ac) : 4a$. Das Produkt von a mit dieser Ordinate ist $-\frac{1}{4}(b^2 - 4ac)$. Wenn also a und die Scheitelordinate dasselbe Vorzeichen haben, ist $b^2 - 4ac$ negativ, wenn sie verschiedene Vorzeichen haben, ist $b^2 - 4ac$ positiv. Hiervon machen wir sogleich Gebrauch. Das Achsenkreuz denken wir uns in der gewöhnlichen Lage. Dann können folgende Fälle vorkommen:

I. $\left.\begin{cases} a > 0, \text{ Tal, Scheitel unterhalb der } x\text{-Achse (Fig. 75)} \\ a < 0, \text{ Berg, Scheitel oberhalb der } x\text{-Achse (Fig. 76)} \end{cases}\right\} b^2 - 4ac > 0.$

II. $\left.\begin{cases} a > 0, \text{ Tal, Scheitel auf der } x\text{-Achse (Fig. 77)} \\ a < 0, \text{ Berg, Scheitel auf der } x\text{-Achse (Fig. 78)} \end{cases}\right\} b^2 - 4ac = 0.$

III. $\left.\begin{cases} a > 0, \text{ Tal, Scheitel oberhalb der } x\text{-Achse (Fig. 79)} \\ a < 0, \text{ Berg, Scheitel unterhalb der } x\text{-Achse (Fig. 80)} \end{cases}\right\} b^2 - 4ac < 0.$

In den Fällen I hat die Parabel zwei verschiedene Punkte mit der x-Achse gemein, in den Fällen II nur einen, in den Fällen III gar keinen. Nun muß man bedenken: Wenn wir von Punkten der x-Achse reden, handelt es sich um Punkte, deren Abszissen x reelle Größen sind. Demnach hat sich ergeben:

Die quadratische Gleichung (1) hat in den Fällen I zwei verschiedene reelle Lösungen, in den Fällen II nur eine, in den Fällen III gar keine.

Beachtet man das Vorzeichen von $b^2 - 4ac$, so folgt:

Die quadratische Gleichung (1) hat zwei verschiedene reelle Lösungen oder nur eine oder gar keine reelle Lösung, je nachdem $b^2 - 4ac$ positiv, gleich Null oder negativ ist.

Deshalb heißt $b^2 - 4ac$ die Diskriminante der quadratischen Gleichung (1), nach dem lateinischen discriminare, trennen oder absondern.

Unsere Figuren 75—80 beziehen sich übrigens auf folgende Parabeln:

I. $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ (Fig. 75), $\quad y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$ (Fig. 76),

II. $y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$ (Fig. 77), $\quad y = -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}$ (Fig. 78),

III. $y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2}$ (Fig. 79), $\quad y = -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{5}{2}$ (Fig. 80),

d. h. auf die folgenden quadratischen Gleichungen:

I. $\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = 0, \quad -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} = 0,$

II. $\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} = 0, \quad -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} = 0,$

III. $\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2} = 0, \quad -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{5}{2} = 0,$

die wir möglichst einfach, nämlich so gewählt haben, daß die reellen Lösungen im Fall I die Zahlen -1 und 3 sind und im Fall II die

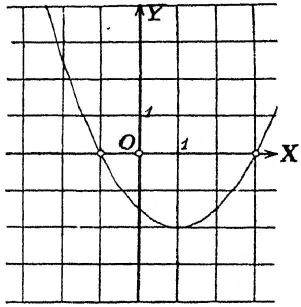


Fig. 75.

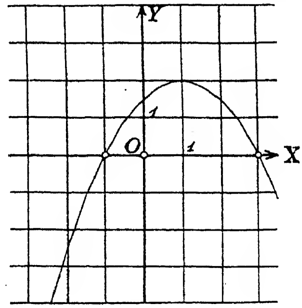


Fig. 76.

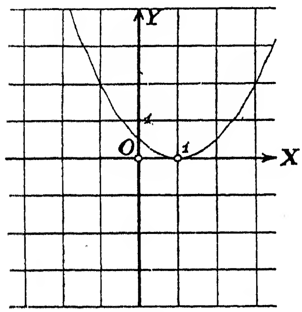


Fig. 77.

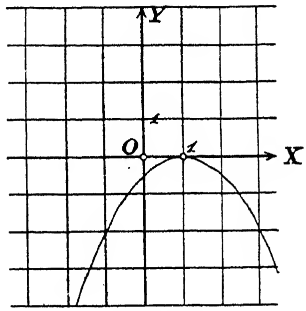


Fig. 78.

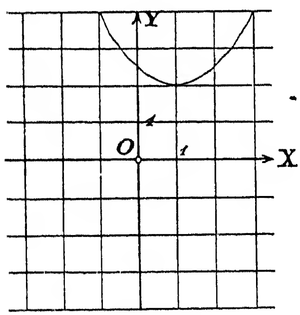


Fig. 79.

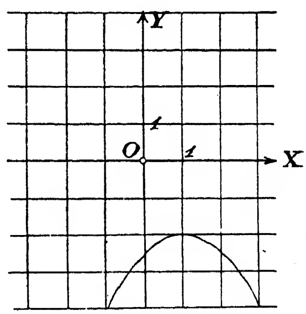


Fig. 80.

einzige reelle Lösung 1 ist. Man sieht außerdem, daß die Parabeln in den sechs Figuren kongruent sind. Dies ist nach S. 95 klar.

Die Parabelachse ist Symmetriegerade der Parabel und geht durch den Scheitel. Wenn also die Parabel die x-Achse in zwei verschiedenen Punkten schneidet (Fall I), müssen diese Punkte gleich weit rechts

und links von der Parabelachse liegen. Weil diese die Abszisse $-b:2a$ hat, muß es also dann eine Größe u derart geben, daß

(4) $$x = -\frac{b}{2a} + u \quad \text{und} \quad x = -\frac{b}{2a} - u$$

die Abszissen der beiden Schnittpunkte, d. h. die Lösungen der quadratischen Gleichung (1) sind. Dies bestätigen wir nun rechnerisch, indem wir die Werte (4) in (1) einsetzen und das Bestehen dieser Gleichung verlangen. Wir setzen also an:

$$a\left(-\frac{b}{2a} \pm u\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a} \pm u\right) + c = 0$$

und zwar gleichgültig, ob bei u das Plus- oder das Minuszeichen steht. Ausrechnen der Klammern gibt:

$$\frac{b^2}{4a} \mp bu + au^2 - \frac{b^2}{2a} \pm bu + c = 0.$$

Hier heben sich die Glieder $\mp bu$ und $\pm bu$ fort, und es bleibt:

$$-\frac{b^2}{4a} + au^2 + c = 0$$

als einzige Bedingung für u. Danach muß

$$u^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}, \quad \text{also} \quad u = \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$$

sein. Einsetzen in (4) liefert mithin die Lösungen der quadratischen Gleichung in der Form:

(5) $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dies stimmt mit (3) überein. So kommen wir also auf einem neuen Weg zu dem bekannten Ergebnisse. Allerdings bezog sich unsere letzte Schlußfolgerung bloß auf den Fall reeller Lösungen, in dem $b^2 - 4ac > 0$ ist. Aber (5) stellt auch sonst die Lösungen der Gleichung dar.

Nützlich ist eine kleine Bemerkung, die man oft anwenden kann: Bildet man die Summe der beiden Lösungen (5), so hebt sich die Wurzel fort, und man findet, daß die Summe der beiden Lösungen der quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

den Wert $-b:a$ hat. Leicht erkennt man auch, daß das Produkt der Lösungen den Wert $c:a$ hat.

Vor der Auflösung pflegt man die quadratische Gleichung durch

Division mit dem Koeffizienten a auf diejenige Form zu bringen, in der x^2 den Koeffizienten Eins hat:

$$x^2 + px + q = 0. \tag{6}$$

Hier ist $a = 1$, $b = p$, $c = q$, die Lösungen (5) sind also jetzt:

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2}p)^2 - q}\,, \tag{7}$$

und in dieser Form lassen sie sich leicht dem Gedächtnis einprägen, was nützlich ist, wenn man öfters quadratische Gleichungen aufzulösen hat: Man bildet den halben Koeffizienten von x, aber mit dem entgegengesetzten Vorzeichen wie in der Gleichung (6) selbst, und addiert dazu die positive oder negative Quadratwurzel aus dem um das konstante Glied q verminderten Quadrat dieses halben Koeffizienten. —

Endlich wenden wir uns zur Auflösung beliebiger Gleichungen:

$$f(x) = 0. \tag{8}$$

Hier soll unter der linken Seite $f(x)$ irgendein gegebener Ausdruck verstanden werden, in dem die Größe x auftritt. Die Gleichung (8) fordert alsdann, diejenigen Werte von x zu ermitteln, für die dieser Ausdruck gleich Null wird. Wenn man für x einen irgendwie gewählten Wert annimmt, wird die linke Seite nur in ganz besonderen Glücksfällen wirklich gleich Null. Im allgemeinen bekommt sie einen von Null verschiedenen Wert, und dieser Wert wird sich ändern, wenn man für x andere Werte wählt, d. h. der Wert von $f(x)$ hängt ganz von der Wahl von x ab, er ist eben eine Funktion von x, und wir bezeichnen ihn daher mit y:

$$y = f(x). \tag{9}$$

Würden wir behaupten, ein für x angenommener Wert, für den die linke Seite von (8) nicht gleich Null, sondern gleich einer zu Null verschiedenen Größe y wird, sei eine Lösung der vorgelegten Gleichung (8), so würden wir einen Fehler begehen, und zwar wäre der Fehler um so größer, je mehr das Ergebnis y von Null abweicht. Aus diesem Grunde nennt man die Funktion y von x die zur Gleichung (8) zugehörige Fehlerfunktion. Wie auseinandergesetzt wurde, gehen wir nun darauf aus, die Lösungen x der vorgelegten Gleichung (8) durch Annäherung zu bestimmen. Deshalb suchen wir solche Werte von x, für die der Fehler möglichst gering wird, d. h. für die y möglichst wenig von Null abweicht. Je weniger y von Null abweicht, um so näher liegt x bei einer Lösung der Gleichung (8).

Wir wollen die so umschriebene Aufgabe graphisch auffassen, indem wir das Bild der Funktion (9) benutzen. Dies Bild wird eine Kurve sein, die als die Fehlerkurve zu bezeichnen ist. Die Lösungen x der Gleichung

(8) sind die Abszissen derjenigen Punkte der Fehlerkurve, deren Ordinaten $y = 0$ sind, d. h. sie sind die Abszissen derjenigen Stellen, an denen die Fehlerkurve die x-Achse schneidet. Wir suchen also die Schnittpunkte der Fehlerkurve mit der x-Achse so genau wie möglich zu bestimmen. Von dieser Kurve können wir beliebig viele einzelne Punkte ermitteln, indem wir für x irgendwelche Werte einsetzen und dann nach (9) das zugehörige y berechnen. Wenn wir auch den Differentialquotienten der Funktion (9) berechnen können, benutzen wir ihn, um über das Steigen und Fallen der Fehlerkurve Auskunft zu erhalten. So werden wir uns bei einer bestimmt vorliegenden Gleichung (8) eine allgemeine Vorstellung vom Verlaufe der Fehlerkurve machen können.

Nun wollen wir insbesondere annehmen, wir hätten ein Intervall von Abszissen x festgestellt, in dem die Kurve stetig ist. In diesem Intervalle seien A und B zwei Punkte der Fehlerkurve, die auf verschiedenen Seiten der x-Achse liegen. Dann muß die Kurve die x-Achse zwischen A und B durchschneiden, siehe Fig. 81 und 82. Hat A die Abszisse a und B die Abszisse b, so muß also zwischen a und b eine Lösung x der Gleichung (8) liegen. Mithin gilt der

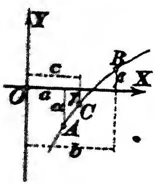


Fig. 81.

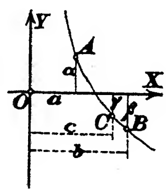


Fig. 82.

Satz 9: Eine **Gleichung**

$$f(x) = 0$$

hat zwischen zwei Werten a und b mindestens eine Lösung, sobald die Funktion

$$y = f(x)$$

von $x = a$ bis $x = b$ stetig ist und für $x = a$ und $x = b$ verschiedene Vorzeichen hat.

Wir nehmen an, es wäre gelungen, zwei Werte $x = a$ und $x = b$ zu ermitteln, für die y Werte α und β mit verschiedenen Vorzeichen hat. Um dann einer zwischen a und b gelegenen Lösung näher zu kommen, kann man verschiedene Wege einschlagen:

Solange das Intervall von a bis b noch groß ist, wird man es durch Probieren kleiner machen d. h. man wird zwischen a und b für x einen Zahlenwert c wählen und das zugehörige $y = \gamma$ berechnen. Wir kommen so zu einer Zahl γ, die entweder dasselbe Vorzeichen wie α oder dasselbe wie β hat, d. h. zu einem Punkt $(c\,;\gamma)$ oder C, der entweder auf derselben Seite der x-Achse wie A oder auf derselben

Seite der x-Achse wie B liegt. Im ersten Fall (Fig. 81) ist eine Lösung der Gleichung zwischen c und b, im zweiten (Fig. 82) zwischen a und c gelegen. In beiden Fällen ist das Intervall kleiner geworden. So kann man das Intervall, in dem eine Lösung liegt, immer kleiner machen.

Daher dürfen wir jetzt annehmen, x_1 und x_2 seien zwei nahe beieinander gelegene Werte von x, für die y solche Werte y_1 und y_2 hat, die nur wenig von Null abweichen und verschiedene Vorzeichen haben. Geometrisch ausgedrückt: Wir wollen annehmen, daß wir zwei Stellen P_1 und P_2 oder $(x_1; y_1)$ und $(x_2; x_2)$ der Fehlerkurve kennen, die nahe beieinander, aber auf verschiedenen Seiten der x-Achse liegen. (Siehe Fig. 83 für $y_1 > 0$ und $y_2 < 0$ und Fig. 84 für $y_1 < 0$ und $y_2 > 0$.) Wenn nun die Funktion $y = f(x)$, wie wir annehmen wollen, differentiiert werden kann, wissen wir: Je kürzer das Kurvenstück $P_1 P_2$ ist, um so mehr nähert es sich einer geraden Linie. Die Gerade P_1 P_2 wird daher die x-Achse an einer Stelle Q treffen, die von dem Schnittpunkte S der Fehlerkurve mit der x-Achse vermutlich nur noch wenig abweicht, d. h. die zu Q gehörige Ordinate $Q P_3$ der Fehlerkurve wird besonders klein sein. Für die Abszisse x_3 von Q wird also der Fehler y_3 besonders klein ausfallen.

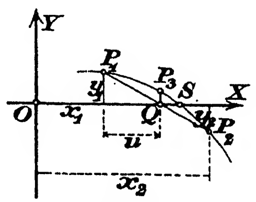


Fig. 83.

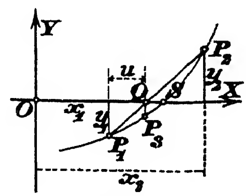


Fig. 84.

Den Wert von x_3 können wir leicht finden. Er sei etwa um u größer als x_1. Gehen wir geradlinig von P_1 nach P_2, so wächst die Abszisse insgesamt um $x_2 - x_1$, während die Ordinate der Geraden um $y_2 - y_1$ zunimmt (wie auch die Vorzeichen sein mögen). Wir wollen aber nur um die noch zu ermittelnde Strecke u bis zur Stelle Q gehen, d. h. bis zu der Stelle, für die die Ordinate der Geraden gleich Null ist, für die sich somit die Ordinate von y_1 bis 0 geändert, also um $-y_1$ vergrößert hat. Mithin gilt, weil längs der Geraden die Zunahmen von x und y zueinander proportional sind (vgl. S. 26), die Proportion

$$\frac{u}{-y_1} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1},$$

woraus sich der Wert von u ergibt:

$$u = -y_1 \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}.$$

Da $x_3 = x_1 + u$ ist, kommt also:

$$x_3 = x_1 - y_1 \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}. \tag{10}$$

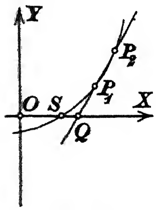


Fig. 85.

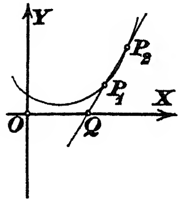


Fig. 86.

Dieses Näherungsverfahren, das man die Regula falsi oder die Fehlerregel nennt, kann man wiederholt anwenden, wodurch man sich mehr und mehr dem gesuchten Wert, nämlich der Abszisse des Punktes S, nähert. Übrigens gibt die Gleichung (10) auch dann, wenn y_1 und y_2 dasselbe Vorzeichen haben, die Abszisse des Schnittpunktes Q der Geraden P_1P_2 mit der x-Achse (siehe Fig. 85). Doch kann man in diesem Fall nicht sicher sein, daß die Fehlerkurve überhaupt in der Nähe von P_1 und P_2 die x-Achse schneidet. Sie könnte ja wie in Fig. 86 verlaufen.

1. Beispiel: Wie lang ist die Kante eines Würfels, dessen Inhalt 10 Liter beträgt? Ist x die Kantenlänge in Zentimetern, so ist der Inhalt x^3 ccm. Jedes Liter enthält 1000 ccm. Also wird gefordert, es soll

$$x^3 - 10\,000 = 0$$

sein, d. h. es wird der Wert von $\sqrt[3]{10\,000}$ gesucht. Hier ist:

$$y = x^3 - 10\,000$$

die Fehlerfunktion. Das gesuchte x liegt zwischen 21 und 22, denn es kommt:

x	y
21	-739
22	$+648$

Da die Werte y ungefähr gleichgroß mit verschiedenen Vorzeichen sind, vermuten wir, daß das gesuchte x ziemlich in der Mitte zwischen 21 und 22 liegt. Für $x = 21{,}5$ ist abgerundet $y = -62$, also negativ wie für $x = 21$. Daher wählen wir noch $x = 21{,}6$. Es kommt abgerundet:

x	y
21,5	-62
21,6	$+78$

Hier gilt ähnliches wie vorher. Daher berechnen wir:

x	y
21,54	$-6{,}1$
21,55	$+7{,}8$

wobei natürlich abgekürzte Multiplikation angewandt wird. Diese beiden Wertepaare liegen hinreichend nahe beieinander. Wir benutzen sie als die Wertepaare x_1, y_1 und x_2, y_2. Nach (10) ergibt sich nun der neue Näherungswert

$$x_3 = 21{,}54 + 6{,}1\,\frac{0{,}01}{13{,}9},$$

den wir nur bis auf vier Dezimalstellen berechnen. Wir kommen so zu dem Wert 21,5444. Für dies x ergibt sich der Fehler y, auf ebenfalls vier Dezimalstellen ab-

gerundet, gleich $+ 0{,}0745$. Da er positiv ist vermuten wir, daß ein kleineres x einen negativen Fehler geben wird. Demnach berechnen wir:

x	y
21,5443	$-0{,}06$
21,5444	$+0{,}07$

Benutzen wir nunmehr diese Wertepaare als x_1, y_1 und x_2, y_2, so liefert die Formel (10) den neuen Näherungswert:

$$21{,}5443 + 0{,}06\,\frac{0{,}0001}{0{,}13}$$

oder, auf sechs Dezimalstellen abgerundet:

$$21{,}544\,346\,.$$

Hier ist $y = -0{,}0013$, abgerundet auf vier Dezimalstellen. Daher vermuten wir, daß der wahre Wert von x etwas größer als 21,544 346 ist. Wir berechnen deshalb:

x	y
21,544 346	$-0{,}001\,3$
21,544 347	$+0{,}000\,1$

Die Formel (10) liefert nunmehr den Näherungswert:

$$21{,}544\,346 + 0{,}001\,3\,\frac{0{,}000\,001}{0{,}001\,4} \quad \text{oder} \quad 21{,}544\,346\,9.$$

Da der wahre Wert zwischen 21,544 346 und 21,544 347 liegt, ist das Ergebnis mindestens bis auf sechs Dezimalstellen genau, und es ist sehr wahrscheinlich, daß auch die siebente stimmt.

In diesem Beispiele haben wir eine Kubikwurzel berechnet. Der eine oder andere Leser hat wohl auf der Schule ein anderes Verfahren dafür kennengelernt und — höchst wahrscheinlich — wieder vergessen. Es ist auch bei weitem nicht so einfach wie dieses, das sich dadurch auszeichnet, daß man es überhaupt kaum vergessen kann.

Bei der Anwendung des auf Satz 9 beruhenden Näherungsverfahrens soll man die Fehler immer nur auf so viele Stellen berechnen, daß man das ungefähre Verhältnis der beiden Fehler y_1 und y_2 erkennt. Denn bei der Anwendung der Fehlerregel tritt nur das Verhältnis $y_2 : y_1$ auf, da sich (10) so schreiben läßt:

$$x_3 = x_1 - \frac{x_2 - x_1}{\dfrac{y_2}{y_1} - 1}\,.$$

Die beim Rechnen nötige Voraussicht erlangt man besser durch Übung als durch lehrhafte Auseinandersetzungen.

Bei der Anwendung des Näherungsverfahrens muß man ferner berücksichtigen, wie weit überhaupt die Angaben der Aufgabe eine größere Genauigkeit gestatten. Dies erläutert das

und $-2{,}5$, d. h. der Fehler innerhalb der zulässigen Grenzen. Also ist das Gesamtergebnis: Die Lösungen der Gleichung

$$x^3 - 30x^2 + 1682{,}5 = 0$$

sind hinreichend genau:

$$8{,}94, \quad 27{,}828, \quad -6{,}765,$$

und zwar lassen sie sich nicht genauer bestimmen als so, weil die Zahl 1682,5 der Natur der Aufgabe nach mit der Unsicherheit $\pm 2{,}5$ behaftet ist.

In unseren beiden Beispielen wußten wir von vornherein, wie groß ungefähr das gesuchte x sein wird, und so verhält es sich meistens bei Aufgaben, die in den Anwendungen der Mathematik auftreten. Deshalb kann man sich auf die Gegend der Fehlerkurve beschränken, der das gesuchte x angehört, während man sonst erst die Fehlerkurve in ihrem gesamten Verlaufe feststellen müßte, um zu finden, wo sie ungefähr die Abszissenachse durchsetzen wird.

Die Ableitung neuer Näherungswerte aus alten wurde auf Grund der Gleichung (10) geleistet. Aber man kann diese kleinen Rechnungen durch schnelle Skizzen auf kariertem Papier ersetzen. Bei der Aufgabe über die in Quecksilber schwimmende Eisenkugel kamen z. B. die Wertepaare vor:

x	y
8	$+274{,}5$
9	$-18{,}5$

Zeichnen wir die zugehörigen Punkte P_1 und P_2 bei geeignet gewählten Maßstäben in Fig. 88 ein, wobei wir von der x-Achse nur das Intervall von 8 bis 9 gebrauchen, so gibt der Schnittpunkt Q der Geraden P_1P_2 mit der Abszissenachse hinreichend genau den Wert $x = 8{,}94$ als besseren Näherungswert.

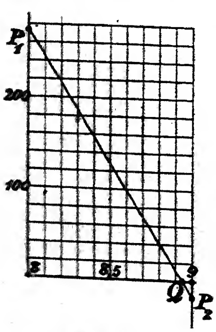


Fig. 88.

Wie es namentlich das erste Beispiel lehrt, sollte man das Näherungsverfahren so ausüben, daß man abwechselnd zuerst nahe beieinanderliegende Punkte der Fehlerkurve bestimmt, darauf nach der Formel (10) einen besseren Näherungswert berechnet, nun wieder, indem man einen Wert dicht daneben benutzt, zwei noch näher beieinanderliegende Punkte der Fehlerkurve feststellt, dann wieder (10) anwendet, usw.

Wir geben noch ein Beispiel, dessen vollständige Ausrechnung dem Leser überlassen bleibe:

3. Beispiel: Ein Pfeiler von 5 m Höhe soll architektonisch gegliedert werden; das schon festgestellte unterste Stück sei 2 m hoch. Nun soll der Rest noch in

drei Glieder geteilt werden, so daß der ganze Pfeiler aus vier Gliedern besteht. Um eine gute Wirkung zu erzielen, wünscht man, daß sich das 1. zum 2. wie das 2. zum 3. und wie das 3. zum 4. Glied verhalte. Wie muß man teilen? Das zweite Glied sei x m lang. Da das erste (unterste) 2 m Länge hat, ist dann das zweite das $\frac{1}{2}x$fache des ersten. Das dritte soll daher das $\frac{1}{2}x$fache des zweiten, also gleich $\frac{1}{2}x^2$ m sein, das vierte das $\frac{1}{2}x$fache des dritten, also gleich $\frac{1}{4}x^3$ m. Das zweite, dritte und vierte Glied zusammen machen 3 m aus. Demnach wird gefordert:

$$x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4}x^3 = 3$$

oder

$$x^3 + 2x^2 + 4x - 12 = 0.$$

Der gesuchte Wert x wird kleiner als 2, aber größer als 1 sein. Man bestimme ihn durch Annäherung. Auf zwei Dezimalen abgerundet ergeben sich die Glieder in den Längen 2 m + 1,38 m + 0,95 m + 0,66 m, so daß nur 1 cm fehlt.

§ 4. Die Kettenregel.

Wir wenden uns jetzt zum Differentiieren zurück. Mittels der auf S. 84, 85 aufgestellten Regeln können wir jede vorgelegte ganze Funktion differentiieren, wie es auf S. 98 geschah. Aber das ist doch manchmal recht mühselig. So z. B. ist doch $(2x - 5)^7$ eine ganze Funktion siebenten Grades von x. Wollen wir sie nach den Regeln differentiieren, so müssen wir zuerst die siebente Potenz von $2x - 5$ ausrechnen. Das ist umständlich, aber immerhin noch erträglich. Man betrachte nun aber die ganze Funktion:

$$y = (a + bx + cx^2 + gx^3)^{100}. \tag{1}$$

Sie ist vom Grad 300, und theoretisch können wir sie nach unseren Regeln differentiieren. Aber welche Schwierigkeiten bieten sich praktisch dar! Die 100te Potenz von einer viergliedrigen Summe kann man zwar immer ausmultiplizieren, wenn man viel Zeit dazu hat; es wäre aber schade um die Zeit, und wie oft würde man sich dabei verrechnen!

Unsere einfachen Differentiationsregeln lassen uns also hier tatsächlich im Stich. Trotzdem können wir die vorgelegte Funktion y ziemlich schnell und fehlerlos differentiieren. Aber dazu bedarf es einer neuen Überlegung:

Zunächst ist y durch (1) als 100te Potenz eines Ausdruckes gegeben. Dieser Ausdruck ist eine ganze Funktion dritten Grades von x. Also ist y nicht geradezu als ganze Funktion 300ten Grades von x gegeben, sondern durch Vermittlung dieser Funktion dritten Grades. Geben wir dieser Funktion dritten Grades $a + bx + cx^2 + gx^3$ auch eine Bezeichnung, etwa z, so ist

$$\left\{\begin{array}{l} y = z^{100} \\ \text{und dabei} \\ z = a + bx + cx^2 + gx^3. \end{array}\right. \tag{2}$$

Diese beiden Formeln sagen zusammen dasselbe aus wie die eine Formel (1). Die zweite Formel nämlich sagt, was z bedeutet, und die erste weiterhin, daß y die 100$^{\text{te}}$ Potenz von eben diesem z ist. Haben wir also jetzt statt einer Formel (1) deren zwei, so steht dieser Vermehrung doch auch eine Erleichterung gegenüber: Jede einzelne der beiden Formeln (2) ist einfacher gebaut als (1).

Ein Gleichnis liegt nahe: Wir sehen vor uns eine Maschine und bemerken, daß, sobald wir ein Rädchen x drehen, ein anderer Teil y der Maschine eine gewisse Bewegung vollführt. Der Zusammenhang ist uns jedoch zu verwickelt. Wir blicken daher in den inneren Bau der Maschine hinein und sehen, daß da ein Teil z eingeschaltet ist, so daß, wenn wir das Rädchen x drehen, dieser Teil z eine leicht verständliche Bewegung ausführen muß, und sehen ferner, daß, wenn wir den Teil z bewegen, auch der Teil y eine daraus auf einfachem Weg folgende Tätigkeit ausübt. Nun haben wir über den Bau der Maschine Klarheit gewonnen. Ursprünglich betrachteten wir nur die Ursache x und ihr Endergebnis y. Jetzt haben wir bemerkt, daß die Ursache x eine Folge z hat und daß z als Ursache eine Folge y hat.

So auch in unserer mathematischen Aufgabe: y ist eine Funktion von x. Wir haben eine dritte Veränderliche z eingeführt. Aber unter den drei Größen x, y, z ist nur eine willkürlich veränderlich, nämlich x. Die Änderung von x bewirkt eine Änderung von z, — nach der zweiten Gleichung (2) ist ja z eine von x abhängige Veränderliche. Wenn sich z ändert, ändert sich nun auch y, — nach der ersten Gleichung (2) ist ja y eine von z abhängige Veränderliche.

Hiernach ist y als eine Funktion von z und ferner z als eine Funktion von x aufzufassen.

Lassen wir x um irgendeinen Betrag Δx wachsen, so nimmt z als Funktion von x um eine gewisse Größe Δz zu. Da nun y von z abhängt, bewirkt das Wachsen von z um Δz auch eine gewisse Zunahme Δy von y. Nach Satz 1, S. 90, ist sowohl z eine stetige Funktion von x als auch y eine stetige Funktion von z, d. h.: wählt man den absoluten Betrag von Δx hinreichend klein, so wird auch $|\Delta z|$ so klein, wie man nur will, und wählt man $|\Delta z|$ hinreichend klein, so wird auch $|\Delta y|$ so klein, wie man nur will. Dies bedeutet:

Satz 10: Ist y eine stetige Funktion von z und ferner z eine stetige Funktion von x, so ist y auch als eine stetige Funktion von x aufzufassen.

Denn es leuchtet ein, daß die soeben gemachte Schlußfolgerung nicht nur für die Funktionen (2) gilt, sondern allgemein, sobald an die Stelle von (2) irgend zwei stetige Funktionen

(3) $$y = F(z) \quad \text{und} \quad z = f(x)$$

treten, da wir soeben nur die Stetigkeit benutzt haben.

Jetzt brauchen wir die augenscheinlich richtige Formel:

(4) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

Nach (2) haben die beiden Funktionen y von z und z von x die Differentialquotienten:

(5) $$\frac{dy}{dz} = 100\,z^{99} \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dx} = b + 2cx + 3gx^2.$$

Diese Differentialquotienten sind die Grenzwerte der Brüche

$$\frac{\Delta y}{\Delta z} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

für den Fall, wo Δz bzw. Δx nach Null strebt. Wir wissen aber, daß, falls Δx nach Null strebt, dasselbe von Δz gilt. Deshalb haben wir, sobald Δx unendlich klein wird:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta z} = \frac{dy}{dz}, \qquad \lim \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{dz}{dx}.$$

Aus (4) folgt also nach Satz 10, S. 65: Wenn Δx nach Null strebt, wird

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Links steht der Differentialquotient der vorgelegten Funktion y von x, nämlich der Funktion (1). Also ergibt sich:

(6) $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Da nun die Differentialquotienten, die hier rechts auftreten, die Werte (5) haben, liefert das Einsetzen dieser Werte in (6):

$$\frac{dy}{dx} = 100\,z^{99}\,(b + 2cx + 3gx^2).$$

Schließlich haben wir noch zu beachten, daß die Bezeichnung z in der gegebenen Funktion (1) gar nicht vorkommt. Wir erinnern uns deshalb daran, daß z den unter (2) in der zweiten Formel angegebenen Wert hat. Also kommt:

$$\frac{dy}{dx} = 100\,(a + bx + cx^2 + gx^3)^{99}\,(b + 2cx + 3gx^2),$$

und damit ist die Aufgabe, die Funktion (1) zu differentiieren, gelöst.

Die Schlußfolgerungen, die im vorhergehenden gemacht wurden, gelten immer, wenn wie in (3) irgendzwei stetige Funktionen vor-

liegen. Nehmen wir also an, daß irgendeine stetige Funktion z von x und ferner irgendeine stetige Funktion y von z gegeben sei:

$$z = f(x), \quad y = F(z), \tag{7}$$

so ist die in der zweiten Formel vorkommende Veränderliche z auf Grund der ersten Formel als eine Funktion von x, daher auch y als eine Funktion von x aufzufassen. Man kann sie so ausdrücken:

$$y = F(f(x)). \tag{8}$$

Nach Satz 10 liegt hier eine stetige Funktion y von x vor. Die Aufgabe ist: Unter der Voraussetzung, daß die beiden gegebenen Funktionen (7) Differentialquotienten haben, soll bewiesen werden, daß auch die Funktion (8) einen Differentialquotienten hat; überdies soll er berechnet werden. Aus der augenscheinlich richtigen Formel (4) gewinnen wir wie vorhin die Formel (6), die besagt:

Satz 11: Ist y eine stetige Funktion von z und weiterhin z eine stetige Funktion von x:

$$y = F(z) \quad \text{und} \quad z = f(x),$$

und haben beide Funktionen Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dz} \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dx},$$

so kann man y auch als eine Funktion von x auffassen:

$$y = F(f(x)).$$

Diese Funktion ist ebenfalls stetig und hat den Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx},$$

das Produkt der beiden erwähnten Differentialquotienten.

Die Formel (6) lehrt, daß man Differentiale gerade so wie endliche Zahlen gegeneinander heben darf, sobald dieselben Differentiale im Zähler und Nenner auftreten. Denn die linke Seite von (6) geht aus der rechten hervor, wenn man rechts dz im zweiten Zähler gegen dz im ersten Nenner hebt.

Der Satz 11 wird meistens nicht unmittelbar so angewandt, wie er ausgesprochen worden ist, sondern so, wie es das zuerst besprochene Beispiel lehrt. Meistens nämlich ist nicht von vornherein y als Funktion von z und z als Funktion von x gegeben, sondern es liegt eine umständliche Funktion y von x vor. Erst dadurch, daß man eine darin auftretende einfachere Funktion von x als eine neue Hilfs-

veränderliche z einführt, zerlegt man die verwickelte Funktion y von x in zweckmäßiger Weise. Für die Differentiation von umständlichen Funktionen gilt also die folgende Regel, die die Kettenregel heißen möge, weil man eine Kette von x über z nach y bildet, und die wir als sechste Regel zu den fünf in § 5 des zweiten Kapitels zusammengestellten Vorschriften für die Differentiation hinzufügen:

6. Regel (Kettenregel): Ist y eine umständliche Funktion von x, so führt man eine darin auftretende einfachere Funktion von x als Hilfsveränderliche z ein, so daß y eine einfachere Funktion von z und z eine einfachere Funktion von x wird. Kann man diese beiden Funktionen differentiieren, so geht der Differentialquotient der vorgelegten Funktion y von x auf Grund der Formel hervor:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Ein zweites Beispiel: Vorgelegt sei

$$y = \frac{a}{(b+x)^n}. \tag{9}$$

Dies ist ein Bruch, dessen Nenner eine n^{te} Potenz ist; also schreiben wir, indem wir die Basis der Potenz mit z bezeichnen:

$$y = \frac{a}{z^n}, \qquad z = b + x. \tag{10}$$

Die erste Formel (10) sagt aus, daß y eine Funktion von z, die zweite, daß z eine Funktion von x ist. Wir können auch so schreiben:

$$y = az^{-n}, \qquad z = b + x.$$

Hiernach ist:

$$\frac{dy}{dz} = -naz^{-n-1}, \qquad \frac{dz}{dx} = 1.$$

Multiplizieren wir beide Gleichungen miteinander, so kommt, da sich dann links dz forthebt:

$$\frac{dy}{dx} = -naz^{-n-1} = -\frac{na}{z^{n+1}}.$$

Da z die in der zweiten Formel (10) angegebene Bedeutung hat, geht schließlich als Differentialquotient der Funktion (9) hervor:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{na}{(b+x)^{n+1}}.$$

Man kann sich genötigt sehen, mehrere Hilfsveränderliche in die Kette, die von x zu y führt, einzuschalten. So z. B. ist die Funktion

$$y = [(a + bx)^n + c]^m \tag{11}$$

zunächst eine m^{te} Potenz:

$$y = z^m.$$

Dabei bedeutet z die Funktion von x:

$$z = (a + bx)^n + c.$$

Sie ist noch nicht einfach, hat aber die Form:

$$z = t^n + c,$$

wo t die Funktion von x bedeutet:

$$t = a + bx.$$

Anstatt der ursprünglichen Funktion (11) haben wir hier d r e i Funktionen:

$$y = z^m, \quad z = t^n + c, \quad t = a + bx.$$

Die letzte zeigt, daß t von x abhängt, die mittlere, daß z von t abhängt, und die erste, daß y von x abhängt. Differentiation gibt nach den bekannten Regeln:

$$\frac{dy}{dz} = m z^{m-1}, \quad \frac{dz}{dt} = n t^{n-1}, \quad \frac{dt}{dx} = b.$$

Multiplizieren wir diese drei Gleichungen miteinander, so kommt:

$$\frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = mnb\, z^{m-1} t^{n-1}.$$

Links hebt sich dz und dt fort, rechts schreiben wir für t seinen Wert $a + bx$ und für z seinen Wert $t^n + c$, d. h. $(a + bx)^n + c$, so daß wir finden:

$$\frac{dy}{dx} = mnb\left[(a + bx)^n + c\right]^{m-1} (a + bx)^{n-1}.$$

Hiermit ist die Funktion (11) differentiiert.

Wir geben jetzt ein Beispiel ohne Worte mit dem für die Ausrechnung praktischen Rechenschema:

$$y = \{2 + [a + b(x + 3)^3]^n\}^2.$$

$y = z^2$	$\frac{dy}{dz} = 2z$
$z = 2 + t^n$	$\frac{dz}{dt} = n t^{n-1}$
$t = a + bw^3$	$\frac{dt}{dw} = 3bw^2$
$w = x + 3$	$\frac{dw}{dx} = 1$
	$\frac{dy}{dx} = 6nbz t^{n-1} w^2$

$$\frac{dy}{dx} = 6nb\{2 + [a + b(x+3)^3]^n\}\{a + b(x+3)^3\}^{n-1}\{x+3\}^2.$$

Da man auch mittels der Summen-, Produkt- und Bruchregel häufig die Differentiation einer schwierigeren Funktion auf die einfacherer Funktionen zurückführen kann, verwendet man oft auch diese Regeln zusammen mit der Kettenregel. So wird die Funktion

$$y = (\alpha + \gamma x^2)^p + (l + mx)^q$$

in eine Summe $y = u + v$ zerlegt, wo

$$u = (\alpha + \gamma x^2)^p, \qquad v = (l + mx)^q$$

ist. Aber u und v sind noch umständlich. Wir setzen daher:

$$u = s^p, \qquad v = t^q,$$

wo

$$s = \alpha + \gamma x^2, \qquad t = l + mx$$

ist. Hier ist also die Kette diese:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & s \arrow[r, dash] & u \arrow[dr, dash] & \\ x \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & & y, \\ & t \arrow[r, dash] & v \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$$

d. h. s und t hängen von x ab, u hängt von s, v von t ab, y hängt von u und v ab. Da y die Summe von u und v ist, brauchen wir nach der Summenregel nur $du : dx$ und $dv : dx$ zu berechnen, um dann durch ihre Addition $dy : dx$ zu finden. Das Schema ist jetzt also doppelt:

$$\begin{array}{l|l||l|l} u = s^p & \dfrac{du}{ds} = p s^{p-1} & v = t^q & \dfrac{dv}{dt} = q t^{q-1} \\[2ex] s = \alpha + \gamma x^2 & \dfrac{ds}{dx} = 2\gamma x & t = l + mx & \dfrac{dt}{dx} = m \\[1ex] \cline{2-2} \cline{4-4} & \dfrac{du}{dx} = 2p\gamma s^{p-1} x & & \dfrac{dv}{dx} = q m t^{q-1} \end{array}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2p\gamma s^{p-1} x + q m t^{q-1} = 2p\gamma(\alpha + \gamma x^2)^{p-1} x + qm(l + mx)^{q-1}.$$

Hier sind außer x und y noch s, t, u, v veränderlich, aber doch ist x die einzige unabhängige Veränderliche. Außerdem treten die Zeichen $\alpha, \gamma, l, m, p, q$ auf, die Konstanten darstellen. Damit man sogleich übersieht, was veränderlich und was konstant ist, pflegt man die Veränderlichen, wenn möglich, mit solchen Buchstaben zu bezeichnen, die dem Ende des Alphabets angehören, wie s, t, u, v, w, x, y, z. Das ist aber nicht immer bei Anwendungen durchzuführen. Man bezeichnet z. B. gern die elektromotorische Kraft eines Stromes mit E, auch wenn sie veränderlich ist.

§ 5. Gebrochene Funktionen.

Brüche aus zwei ganzen Funktionen von x, z. B.

$$\frac{3x^2-7x+5}{x-3} \quad \text{oder} \quad \frac{x^2+8x-7}{9x^3-28x^2+4x-2},$$

liefern Funktionen, die **gebrochene Funktionen** heißen. Auf diese Form läßt sich jede Funktion bringen, die aus x und einer Anzahl von Konstanten vermöge Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division gebildet werden kann.

Ist z. B.

$$y = x + \cfrac{1}{x - \cfrac{1}{x + \cfrac{3}{x}}},$$

so können wir hierfür schreiben:

$$y = x + \cfrac{1}{x - \cfrac{x}{x^2+3}} = x + \frac{x^2+3}{x^3+2x} = \frac{x^4+3x^2+3}{x^3+2x}.$$

Ist

$$y = \frac{1}{(a+bx)^2} - \frac{c+gx}{h+kx},$$

so bringen wir beide Brüche auf denselben Nenner:

$$y = \frac{h+kx-(c+gx)(a+bx)^2}{(a+bx)^2(h+kx)}.$$

Die allgemeine Gestalt einer gebrochenen Funktion y von x ist:

$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0}$$

wo n und m ganze positive Zahlen sind und $a_n, a_{n-1} \ldots a_2, a_1, a_0$ sowie $b_m, b_{m-1} \ldots b_2, b_1, b_0$ Konstanten bedeuten. Diese Funktion läßt sich in der Form

$$y = \frac{u}{v}$$

schreiben, wenn man unter u und v die ganzen Funktionen versteht:

$$u = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$
$$v = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0.$$

Wie verhält es sich mit der Stetigkeit der gebrochenen Funktionen? Zunächst sind u und v nach Satz 1, S. 90, stetige Funktionen von x. Daher ist nach Satz 20, S. 81, auch $y = u : v$ stetig für alle Werte von x, für die der Nenner v nicht gleich Null ist.

Daher fragt sich nur noch, wie sich die Funktion y für Werte von x verhält, für die der Nenner v gleich Null ist. Wenn für einen derartigen Wert $x = h$ der Zähler u nicht auch gleich Null ist, wird y für $\lim x = h$ nach einem positiv oder negativ unendlich großen Wert streben, vgl. S. 65, die Funktion y also unstetig sein. Für $x = h$ rückt dann der Bildpunkt ins Unendlichferne, indem die Ordinate y über alle Grenzen wächst.

Aber es kann vorkommen, daß für einen Wert h von x, für den der Nenner v gleich Null ist, auch der Zähler u gleich Null wird. Nach Satz 5, S. 102, läßt sich dann sowohl vom Zähler als auch vom Nenner der Faktor $x - h$ absondern. Die gebrochene Funktion z. B.

$$y = \frac{x^3 - 9x + 10}{x^2 + 2x - 8},$$

wo also

$$u = x^3 - 9x + 10, \quad v = x^2 + 2x - 8$$

ist, hat die Eigenschaft, daß für $x = 2$ sowohl der Zähler u als auch der Nenner v gleich Null wird. Daraus schließen wir, daß sich von u und von v der Faktor $x - 2$ absondern läßt. Wir bewerkstelligen dies durch Partialdivision:

$$\begin{array}{l}
(x^3 \quad . \quad - 9x + 10) : (x - 2) = x^2 + 2x - 5, \\
\underline{x^3 - 2x^2} \\
\quad 2x^2 - 9x \\
\quad \underline{2x^2 - 4x} \\
\qquad - 5x + 10 \\
\qquad \underline{- 5x + 10} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
(x^2 + 2x - 8) : (x - 2) = x + 4. \\
\underline{x^2 - 2x} \\
\qquad 4x - 8 \\
\qquad \underline{4x - 8} \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

Mithin ist:

$$y = \frac{u}{v} = \frac{(x^2 + 2x - 5)(x - 2)}{(x + 4)(x - 2)}.$$

Demnach tritt der Faktor $x - 2$, dessen Vorhandensein bewirkt, daß Zähler und Nenner für $x = 2$ zu Null werden, nur s c h e i n b a r auf, da er sich fortheben läßt. Tatsächlich hat die vorgelegte Funktion y die einfachere Form:

$$y = \frac{x^2 + 2x - 5}{x + 4}.$$

Jetzt ist weder der Zähler noch der Nenner für $x = 2$ gleich Null. Also ist diese Funktion y auch für $x = 2$ stetig. Dagegen nicht für $x = -4$, denn für $x = -4$ wird der Nenner gleich Null, während der Zähler gleich 3, also y unendlich groß wird.

Der Fall, wo Zähler und Nenner für denselben Wert $x = h$ zu Null

werden, also den Faktor $x-h$ gemein haben, kann aber auch zu einem anderen Ergebnisse führen. Betrachten wir das Beispiel:

$$y=\frac{x^3+4x^2+4x+3}{x^3+5x^2+3x-9}.$$

Man überzeuge sich davon, daß Zähler und Nenner gleich Null werden, wenn $x=-3$ wird. Daraus schließen wir zunächst wieder, daß sich aus Zähler und Nenner der Faktor $x-(-3)$ oder $x+3$ absondern läßt. In der Tat ist:

$$\begin{array}{l}(x^3+4x^2+4x+3):(x+3)=x^2+x+1,\\ \underline{x^3+3x^2}\\ \quad\quad x^2+4x\\ \quad\quad \underline{x^2+3x}\\ \quad\quad\quad\quad x+3\\ \quad\quad\quad\quad \underline{x+3}\\ \quad\quad\quad\quad\quad\ 0\end{array}$$

$$\begin{array}{l}(x^3+5x^2+3x-9):(x+3)=x^2+2x-3,\\ \underline{x^3+3x^2}\\ \quad\quad 2x^2+3x\\ \quad\quad \underline{2x^2+6x}\\ \quad\quad\quad\quad -3x-9\\ \quad\quad\quad\quad \underline{-3x-9}\\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad 0\end{array}$$

also:

$$x^3+4x^2+4x+3=(x^2+x+1)(x+3)$$

und

$$x^3+5x^2+3x-9=(x^2+2x-3)(x+3).$$

Daher läßt sich y so darstellen:

$$y=\frac{(x^2+x+1)(x+3)}{(x^2+2x-3)(x+3)},$$

so daß sich der Faktor $x+3$, dessen Auftreten bewirkt, daß Zähler und Nenner für $x=-3$ gleich Null werden, forthebt und y die einfachere Form hat:

$$y=\frac{x^2+x+1}{x^2+2x-3}.$$

Aber wenn wir jetzt für x wieder den Wert -3 einsetzen, bemerken wir, daß immer noch der Nenner zu Null wird, während der Zähler gleich 7 wird, also der Bruch y für $x=-3$ nach ∞ strebt. Mithin ist die Funktion y für $x=-3$ unstetig. Der Grund liegt darin, daß der ursprüngliche Nenner

$$x^3+5x^2+3x-9$$

nicht nur einmal den Faktor $x+3$ hat, indem er sich auf die Form

$$(x^2+2x-3)(x+3)$$

bringen läßt, sondern zweimal. In der Tat ergibt nochmalige Partialdivision mit $x+3$:

$$x^2+2x-3=(x-1)(x+3).$$

Also hat y zunächst diese Form:

$$y=\frac{(x^2+x+1)(x+3)}{(x-1)(x+3)^2}.$$

Heben wir nun einmal den Faktor $x+3$ im Zähler und Nenner fort, so bleibt er immer noch einmal im Nenner, während der übrigbleibende Zähler x^2+x+1 den Faktor $x+3$ nicht hat. Infolgedessen wird y unendlich groß für $x=-3$.

Um also die Frage zu entscheiden, ob eine vorgelegte gebrochene Funktion $y=u:v$ für einen oder einige Werte h von x unstetig wird, haben wir zu untersuchen, wie viele gemeinsame Faktoren $x-h$ Zähler und Nenner haben und wie sich diese ermitteln und dann fortheben lassen.

Am Schluß des § 1, S. 104, wurde nun darauf hingewiesen, daß die Aufgabe, einen Faktor $x-h$ zu ermitteln, der in einer ganzen Funktion $f(x)$ enthalten ist, nichts anderes als die Aufgabe ist, eine Lösung h der Gleichung $f(x)=0$ zu ermitteln. Man sollte also zunächst vermuten, daß man die gemeinsamen Faktoren $x-h$ zweier ganzer Funktionen auch nicht ohne Lösung von Gleichungen bestimmen könnte. Aber es geht doch ohne dies, und zwar wendet man dabei ein Verfahren an, das demjenigen nachgebildet ist, mittels dessen man entscheidet, ob zwei ganze Zahlen einen gemeinsamen Faktor haben oder nicht. Will man feststellen, ob z. B. die beiden Zahlen 572 und 351 einen gemeinsamen Teiler haben, d. h. ob sich der Bruch 572 : 351 kürzen läßt, so rechnet man zunächst aus:

$$\frac{572}{351}=1+\frac{221}{351}.$$

Die Frage ist daher auf die zurückgeführt, ob sich 221 : 351 kürzen läßt. Dies geht, wenn sich der umgekehrte oder reziproke Bruch 351 : 221 kürzen läßt. Das weitere Verfahren ist wie vorher, indem wir jedesmal den Restbruch umkehren und dann die Ganzen herausziehen:

$$\frac{351}{221}=1+\frac{130}{221};\quad \frac{221}{130}=1+\frac{91}{130},\quad \frac{130}{91}=1+\frac{39}{91},\ \frac{91}{39}=2+\frac{13}{39},\ \frac{39}{13}=3.$$

Die letzte Division geht auf, d. h. der Bruch 572 : 351 läßt sich mit 13 kürzen.

Ebenso schließen wir hier: Liegt eine gebrochene Funktion $y=u:v$ vor und ist u nicht von niedrigerem Grad als v, so wenden wir Partialdivision an, um den Zähler auf einen niedrigeren Grad als den Nenner zu bringen. Ist z. B.:

$$y = \frac{x^4 - x^3 - 2x^2 + 7x - 2}{x^2 + x - 2},$$

so gibt die Partialdivision:

$$(x^4 - x^3 - 2x^2 + 7x - 2) : (x^2 + x - 2) = x^2 - 2x + 2 + \frac{x+2}{x^2 + x - 2}.$$

$$\begin{array}{l}
\underline{x^4 + x^3 - 2x^2} \\
\quad -2x^3 \qquad + 7x \\
\quad \underline{-2x^3 - 2x^2 + 4x} \\
\qquad\qquad 2x^2 + 3x - 2 \\
\qquad\qquad \underline{2x^2 + 2x - 4} \\
\qquad\qquad\qquad x + 2
\end{array}$$

Nun fragt sich nur noch, ob der Restbruch

$$\frac{x+2}{x^2 + x - 2}$$

zu kürzen ist. Läßt er sich kürzen, so muß dasselbe von seinem reziproken Wert gelten, der sich weiterhin durch Partialdivision behandeln läßt:

$$(x^2 + x - 2) : (x + 2) = x - 1.$$

$$\begin{array}{l}
\underline{x^2 + 2x} \\
\quad - x - 2 \\
\quad \underline{- x - 2} \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

Da die Partialdivision aufgeht, folgt, daß sich der vorgelegte Bruch y mit $x + 2$ und sonst mit keinem Ausdruck von der Form $x - h$ kürzen läßt. Hiernach ist nämlich:

$$\frac{x+2}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{x-1},$$

also:

$$y = x^2 - 2x + 2 + \frac{x+2}{x^2 + x - 2} = x^2 - 2x + 2 + \frac{1}{x-1}.$$

Wir haben so die gebrochene Funktion y in eine Summe zerlegt, die aus einer ganzen Funktion und einer gebrochenen Funktion besteht, und diese letzte gebrochene Funktion läßt sich nicht weiter kürzen.

Wenn y als Bruch $u : v$ von ganzen Funktionen gegeben ist, wobei der Zähler von niedrigerem Grad als der Nenner ist, dreht man den Bruch um und dividiert. Liegt z. B.

$$y = \frac{x^3 - 7x + 6}{x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 5x - 6}$$

vor, so dividieren wir:

$$+ 2x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 5x - 6) : (x^3 - 7x + 6) = x^2 + 2x + 3 + \frac{4x^2 + 4x - 24}{x^3 - 7x + 6}.$$

$$\begin{array}{rrrrr}
. & -7x^3 & +\ 6x^2 & & \\
\hline
2x^4 & +\ 3x^3 & -10x^2 & -\ 5x & \\
2x^4 & . & -14x^2 & +\ 12x & \\
\hline
& 3x^3 & +\ 4x^2 & -17x & -\ 6 \\
& 3x^3 & . & -21x & +\ 18 \\
\hline
& & 4x^2 & +\ 4x & -\ 24
\end{array}$$

erner rechnen wir aus:

$$(x^3 \quad . \quad -7x + 6) : (4x^2 + 4x - 24) = \tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{4}.$$

$$\begin{array}{rrr}
x^3 + x^2 & -\ 6x & \\
\hline
-x^2 & -\ x & +\ 6 \\
-x^2 & -\ x & +\ 6 \\
\hline
& & 0
\end{array}$$

lso können wir mit $4x^2 + 4x - 24$ kürzen. Nämlich umgekehrt ist:

$$\frac{4x^2 + 4x - 24}{x^3 - 7x + 6} = \frac{4}{x - 1},$$

aher:

$$\frac{1}{y} = x^2 + 2x + 3 + \frac{4}{x - 1},$$

lso:

$$y = \frac{x - 1}{(x^2 + 2x + 3)(x - 1) + 4} = \frac{x - 1}{x^3 + x^2 + x + 1},$$

nd weitere Kürzungen sind unmöglich.

In jedem Fall also können wir eine gebrochene Funktion $u : v$ so veit vereinfachen, daß keine weiteren Kürzungen möglich sind. Ist nsbesondere u nicht von niedrigerem Grad als v, so können wir $u : v$ auf lie Form einer Summe aus einer ganzen Funktion und einer gebrochenen 'unktion bringen, wobei die gebrochene Funktion keine Kürzungen nehr gestattet. Ist dagegen u von niedrigerem Grad als v, so bekommt $\iota : v$ die Form einer gebrochenen Funktion, die keine Kürzungen mehr rlaubt. Zusammengefaßt besagt alles dies der

Satz 12: Jede gebrochene Funktion $u:v$ von x läßt sich lurch Partialdivision auf eine Form bringen:

$$\frac{u}{v} = w + \frac{u_1}{v_1},$$

vo w, u_1, v_1 ganze Funktionen von x sind, der Bruch $u_1 : v_1$ sich nicht kürzen läßt und u_1 von niedrigerem Grad als v_1 ist.

Nachdem wir die gebrochene Funktion auf diese neue Form

$$y = w + \frac{u_1}{v_1}$$

gebracht haben, ist es klar, daß für diejenigen Werte h von x, für die v_1 gleich Null ist, u_1 von Null verschieden wird, da sonst u_1 und v_1 doch noch beide mit $x-h$ teilbar wären, nach Satz 6, S. 103. Für diejenigen Werte h von x also, für die $v_1 = 0$ ist, wird y unstetig, nämlich unendlich groß. Demnach haben wir den

Satz 13: Will man feststellen, für welche (endliche) Werte von x eine vorgelegte gebrochene Funktion

$$y = \frac{u}{v}$$

unstetig, nämlich unendlich groß wird, so bringt man sie durch Partialdivision auf eine Form

$$y = w + \frac{u_1}{v_1},$$

wo w, u_1, v_1 ganze Funktionen von x sind, u_1 von niedrigerem Grad als v_1 ist und $u_1 : v_1$ sich nicht weiter kürzen läßt. Nur für diejenigen (endlichen) Werte von x wird y unendlich groß, für die v_1 gleich Null ist.

Hiernach kommt die Frage nach denjenigen Werten von x, für die eine gebrochene Funktion y von x unstetig wird, auf die Frage zurück, für welche Werte von x eine gewisse ganze Funktion v_1 von x gleich Null ist. In Betracht kommen dabei für uns nur die reellen Werte. Im vorigen Paragraphen aber haben wir gesehen, daß man die reellen Lösungen der Gleichung $v_1 = 0$ angenähert bestimmen kann.

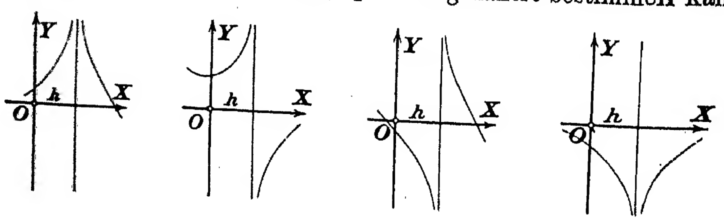


Fig 89.

Wenn die gebrochene Funktion y für $x = h$ unendlich groß wird, hat ihre Bildkurve folgende Eigenschaft: Je näher x an h kommt, um so größer wird $|y|$, während y positiv oder negativ sein kann. Dies heißt: Ziehen wir die Gerade, für deren Punkte $x = h$ ist, also die Parallele zur y-Achse mit der Abszisse $x = h$, so wird die Kurve rechts und links dieser Geraden immer näher kommen, sie aber im Endlichen nicht mehr erreichen. Je nach der Art des Vorzeichens von y können dabei vier Fälle eintreten, die in Fig. 89 veranschaulicht sind.

Man sieht hieraus, daß die gebrochenen Funktionen Bildkurven haben, die in mehrere Zweige zerfallen können, die sich im Unendlichen in Paaren je einer Geraden anschmiegen, die zur y-Achse parallel ist. Aber es kann auch anders sein. Denn es ist sehr wohl möglich, daß die Funktion v_1, die in

$$y = w + \frac{u_1}{v_1}$$

im Nenner vorkommt, für keinen reellen Wert von x gleich Null wird. Dies tritt z. B. bei der Funktion

$$y = x - \frac{1}{x^2 + 1}$$

ein. Ihre Bildkurve zerfällt nicht in einzelne Zweige, sie bleibt für alle endlichen x im Endlichen (siehe Fig. 90).

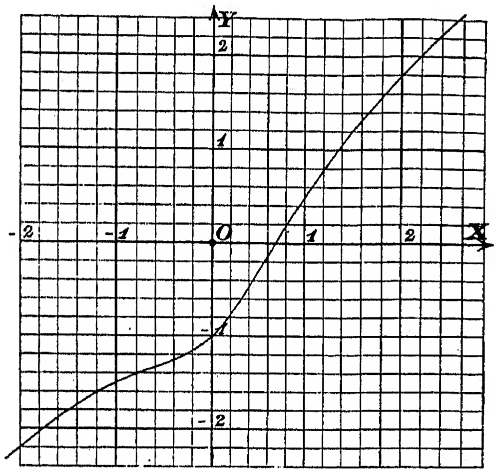


Fig. 90.

Um die Natur der Bildkurve einer gebrochenen Funktion y von x vollständig zu erkennen, müssen wir außerdem noch fragen, welchem Wert y zustrebt, wenn x selbst dem Werte $+\infty$ oder $-\infty$ zustrebt, wie also — ungenau ausgedrückt — die Bildkurve rechts oder links weit draußen verläuft. Daß hierbei alle Möglichkeiten wirklich vorkommen können, erkennt man am besten, wenn man die Bildkurven einiger gebrochener Funktionen von bestimmter Art genau untersucht. Dies soll nachher geschehen. Man wird erkennen, daß man die angeregte Frage in jedem Falle beantworten kann.

Jetzt sprechen wir über den Differentialquotienten einer gebrochenen Funktion y. Sehen wir von denjenigen Stellen ab, wo die Funktion unstetig, nämlich unendlich groß wird, so gehört zu jedem unendlich kleinen Zuwachs dx von x ein ebenfalls unendlich kleiner Zuwachs dy von y, und der Bruch aus beiden ist der Differentialquotient $dy : dx$. Berechnet wird er, da wir die im Bruch

$$y = \frac{u}{v}$$

vorkommenden ganzen Funktionen u und v zu differentiieren imstande sind, nach der Bruchregel:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}, \tag{1}$$

Ist z. B.

$$y = \frac{x^2 - 1}{2x^3 + 4x - 2},$$

so kommt:

$$u = x^2 - 1 \qquad v = 2x^3 + 4x - 2,$$

also:

$$\frac{du}{dx} = 2x, \qquad \frac{dv}{dx} = 6x^2 + 4,$$

daher nach (1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x^3 + 4x - 2)\,2x - (x^2 - 1)(6x^2 + 4)}{(2x^3 + 4x - 2)^2}$$

oder, wenn man den Zähler ausmultipliziert und ordnet:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x^4 + 10x^2 - 4x + 4}{(2x^3 + 4x - 2)^2}.$$

Ohne weiteres leuchtet hiernach ein:

Satz 14: Der Differentialquotient einer gebrochenen Funktion ist ebenfalls eine gebrochene Funktion.

Übrigens braucht man eine gebrochene Funktion, die nicht schon als ein einziger Bruch gegeben ist, gar nicht erst auf diese Form zu bringen, um sie zu differentiieren. Wenn z. B.

$$y = \frac{1}{x} \quad \frac{a + bx}{1 - x}$$

gegeben ist, wird man hier die Summenregel anwenden, d. h. $1 : x$ für sich und $(a + bx) : (1 - x)$ für sich differentiieren, nämlich den ersten Ausdruck $1 : x$ oder x^{-1} nach der Regel für x^n und den zweiten Ausdruck nach der Bruchregel:

$$\frac{dy}{dx} = -x^{-2} - \frac{(1 - x)b - (a + bx).(-1)}{(1 - x)^2} = -\frac{1}{x^2} - \frac{a + b}{(1 - x)^2}.$$

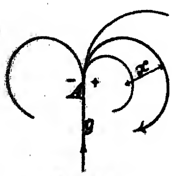


Fig. 91.

Nach diesen allgemeinen Erläuterungen wenden wir uns zu Beispielen, die alles, was noch fraglich sein sollte, genügend klären werden.

1. Beispiel: Wir betrachten eine kreisförmige Bahn (Fig. 91), die im Punkt A von der Geraden g abgeht. Je größer der Radius des Kreises ist, um so schwächer ist der Kreis gekrümmt. Man bezeichnet daher den reziproken

Wert des Radius als die Krümmung der Bahn. Beträgt der Radius x m, so ist also die Krümmung:

$$y = \frac{1}{x}.$$

Je kleiner x ist, um so stärker wird die Krümmung. Ist x negativ, so kann man dies so deuten: Wir betrachten eine Kreisbahn, die vom Punkt A nach der anderen Seite von g hin gekrümmt ist. Den dort liegenden Kreisen schreiben wir also negative Krümmung zu. Wollen wir die Krümmung graphisch als Funktion des Radius darstellen, so haben wir die Bildkurve der einfachsten gebrochenen Funktion

$$y = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

zu zeichnen. Der Differentialquotient ist nach der Potenzregel:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2},$$

also stets negativ. Nach Satz 7, S. 104, fällt daher die Kurve beständig. Sie ist unstetig für $x = 0$, nämlich dort wird $y = \infty$. Ist x sehr nahe bei Null und positiv, so wird y sehr groß positiv. Ist dagegen x sehr nahe bei Null und negativ, so wird der absolute Betrag von y sehr groß, aber y selbst negativ. Links schmiegt sich die Kurve daher der negativen, rechts der positiven y-Achse im Unendlichfernen an. Ist der absolute Betrag von x sehr groß, so liegt y sehr nahe bei Null. Für positives x ist y auch positiv, für negatives x negativ. Die Kurve zerfällt also in zwei Zweige im 1. und 3. Quadranten. Die Fig. 92 ist leicht mittels einiger Punkte ($x = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ $\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}$) der Kurve und der zugehörigen Steigungen der Tangenten zu zeichnen. Diese Kurve gehört zu Linien, die wir später untersuchen werden und die Hyperbeln heißen. Der Leser überlege, warum die eine Kurvenhälfte in die andere übergeht, sobald man die Halbebene um eine der beiden Geraden herumklappt, von denen die rechten Winkel der Achsen in gleiche Teile zerlegt werden.

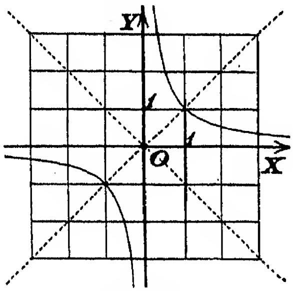


Fig. 92.

2. Beispiel: In O sei eine Wärmequelle. Auf einer von O ausgehenden Geraden sei eine kleine, senkrecht gestellte Scheibe beweglich, die von O in der Zeiteinheit eine gewisse Wärmemenge erhält. Die Wärmemenge, die O der Scheibe in der Zeiteinheit und in der Einheit der Entfernung erteilt, werde als Wärmeeinheit benutzt. Hat die Scheibe die Entfernung x von O, so bestrahlt dasjenige Bündel von Wärmestrahlen, das in der Entfernung 1 die Scheibe treffen würde, eine Fläche von anderer Größe. Ist die Scheibe z. B. ein kleines Quadrat von der Seitenlänge a, so ist jene Fläche in der Entfernung x ein Quadrat von der Seitenlänge ax. Das Strahlenbündel bestrahlt also in der Entfernung x eine Fläche von der Größe a^2x^2, die x^2-mal die Fläche a^2 der Scheibe enthält, so daß diese Scheibe in der Entfernung x nur die Wärmemenge

$$y = \frac{1}{x^2}$$

erhält. Diese Wärmemenge ist also umgekehrt proportional zum Quadrat der Entfernung x. Fig. 93 gibt die Bildkurve. Man möge sie selbst zeichnen,

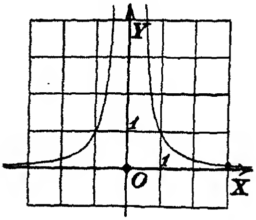


Fig. 93.

indem man den Differentialquotienten zur Bestimmung der Steigung benutze. Für $\lim x = \pm\infty$ strebt y offenbar nach Null. Warum steigt die Kurve für $x < 0$ und fällt sie für $x > 0$? Warum ist die y-Achse eine Symmetriegerade? Warum verläuft die Kurve nur im 1. und 2. Quadranten?

3. Beispiel: In O und in U seien Wärmequellen. Auf der Geraden, die durch O und U geht, sei wieder eine kleine Scheibe senkrecht befestigt. Hat sie von O die Entfernung 1, so soll die Wärmemenge, die die Scheibe von O in der Zeiteinheit erfährt, wieder als Wärmeeinheit gewählt sein. Wenn die Scheibe von U die Entfernung 1 hat, erhalte sie in der Zeiteinheit die Wärmemenge 8, d. h. die Wärmequelle U bestehe aus 8 Wärmequellen von der Stärke der Wärmequelle O. Der Abstand von O bis U sei gleich 10 Längeneinheiten. Wie hängt die Wärmemenge, die der Scheibe in der Zeiteinheit von beiden Wärmequellen zusammen zukommt, von der Lage der Scheibe auf der Geraden OU ab? Diese Wärmemenge ist die abhängige Veränderliche y. Die unabhängige Veränderliche ist eine die Lage der Scheibe bestimmende Größe. Wenn wir die Gerade OU von O in der Richtung nach U als positive x-Achse benutzen, wird diese unabhängige Veränderliche die Entfernung x der Scheibe vom Anfangspunkt O sein. Die Scheibe hat dann von U die Entfernung $x - 10$ und zwar auch, wenn x kleiner als 10 oder negativ ist. Sie erhält von O in der Zeiteinheit die Wärmemenge $1 : x^2$. Da U achtmal so stark, aber in der Entfernung $x - 10$ ist, erhält die Scheibe von U die Wärmemenge $8 : (x - 10)^2$. Mithin ist die gesamte Wärmemenge:

$$y = \frac{1}{x^2} + \frac{8}{(x-10)^2}.$$

Vorausgesetzt wird dabei, daß keine der beiden Wärmequellen die andere an der Wärmestrahlung hindert, falls sich beide auf derselben Seite der Scheibe befinden. Hier liegt eine stets positiv gebrochene Funktion y von x vor, die für $x = 0$ und $x = 10$ unendlich groß wird, für $\lim x = \pm\infty$ dagegen nach Null strebt. Daher zerfällt die Bildkurve in drei Zweige. Sie schmiegen sich der x-Achse, der y-Achse und der Parallelen zur y-Achse durch U im Unendlichfernen an. Siehe Fig. 94. Der Differentialquotient von $1 : x^2$ ergibt sich nach der Potenzregel. Der des zweiten Summanden wird nach der Kettenregel gefunden. Bezeichnen wir nämlich diesen Summanden mit z, so ist

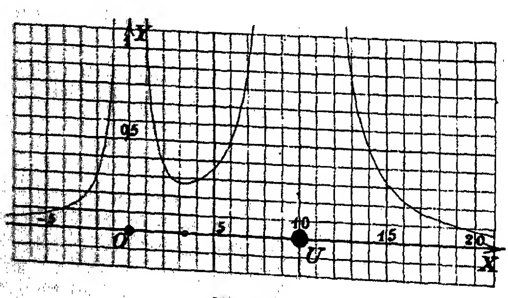


Fig. 94.

$$z = \frac{8}{t^2}, \quad t = x - 10,$$

also

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{16}{t^3}, \quad \frac{dt}{dx} = 1, \text{ d. h. } \frac{dz}{dx} = -\frac{16}{t^3} = -\frac{16}{(x-10)^3}.$$

Folglich wird

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^3} - \frac{16}{(x-10)^3}.$$

Ist x negativ, so sind x^3 und $(x-10)^3$ als ungerade Potenzen auch negativ, d. h. dann ist $dy:dx$ positiv, woraus nach Satz 7, S. 104, folgt, daß der linke Zweig der Bildkurve beständig steigt, wenn wie immer die Kurve im Sinn der positiven x-Achse durchlaufen wird. Ist $x > 10$, so sind x^3 und $(x-10)^3$ beide positiv, d. h. der rechte Zweig der Bildkurve fällt beständig. Wenn dagegen x zwischen 0 und 10, die Scheibe also zwischen O und U liegt, ist x^3 positiv und $(x-10)^3$ negativ. Der Differentialquotient ist dann also eine Differenz. Einmal wird er gleich Null, nämlich für denjenigen Wert von x, für den

$$\frac{2}{x^3} = -\frac{16}{(x-10)^3}$$

oder also

$$(x-10)^3 = -8x^3,$$

d. h.

$$x-10 = -2x, \quad x = 3\tfrac{1}{3}$$

ist. Hier liegt nach Satz 8, S. 106, die einzige Stelle, wo ein endliches Maximum oder Minimum eintreten kann. Da nun, wenn x positiv sehr klein wird, x^3 sehr klein gegenüber dem absoluten Betrage von $(x-10)^3$ wird, ist die Steigung des mittleren Kurvenzweiges in der Nähe der y-Achse negativ. Dagegen zeigt sich, daß sie nahe vor der Geraden $x = 10$ durch U positiv ist. Jene Stelle gehört daher zu einem Minimum. Zwischen beiden Wärmequellen erfährt die Scheibe an der Stelle $x = 3\frac{1}{3}$ die geringste Erwärmung. Wie groß ist dort die Wärmemenge?

4. **Beispiel:** Entsprechende Überlegungen stelle man an, wenn OU die Länge a hat und sich die Wärmequellen O und U in ihren Stärken nicht wie $1:8$, sondern allgemein wie $\alpha:\beta$ zueinander verhalten, und bestimme die kühlste Stelle zwischen O und U.

5. **Beispiel:** Drei gleich starke Wärmequellen V, O, U mögen auf einer Geraden so liegen, daß sie in der Längeneinheit aufeinander folgen. Alsdann ist die Wärmemenge, wenn sie wie im 2. und 3. Beispiel gemessen wird, gegeben durch die Funktion:

$$y = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Man berechne den Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{(x+1)^3} - \frac{2}{x^3} - \frac{2}{(x-1)^3}.$$

Man zeige, daß sich endliche Maxima oder Minima von y nur da ergeben können, wo x eine Lösung der Gleichung sechsten Grades ist:

$$3x^6 + 3x^4 + 3x^2 - 1 = 0.$$

Diese Lösungen findet man leicht mittels der Fehlerregel (S. 118). Denn die Fehlerkurve (vgl. S. 115) hat für $x = 0$ ihre tiefste Stelle mit der Ordinate -1. Vorher fällt sie beständig, nachher steigt sie beständig, da $3x^6 + 3x^4 + 3x^2 - 1$ den Differentialquotienten $18x^5 + 12x^3 + 6x$ oder $x(18x^4 + 12x^2 + 6)$ hat und der Inhalt der Klammer stets positiv bleibt. Die Fehlerkurve ist außerdem zur y-Achse symmetrisch, da sich $3x^6 + 3x^4 + 3x^2 - 1$ nicht ändert, wenn x durch $-x$ ersetzt wird

(vgl. S. 42). Deshalb hat die Gleichung sechsten Grades nur zwei reelle entgegengesetzt gleiche Lösungen, nämlich, wie man berechnen möge: $x = \pm 0{,}50307$. Man beweise, daß y für diese Werte von x Minima hat.

6. Beispiel: Die Anziehungskraft, die ein materielles Teilchen auf ein anderes nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz ausübt, ist einerseits proportional zu den Massen beider Teilchen, andererseits — ebenso wie die Wärmemenge in den vorhergehenden Beispielen — umgekehrt proportional zum Quadrat der Entfernung. Liegen zwei homogene Kugeln vor, deren Massen m und μ sind und in den Kugelmittelpunkten vereinigt angenommen werden dürfen, so daß die Kugeln durch ihre Mittelpunkte ersetzbar sind, und ist a die Entfernung beider Mittelpunkte voneinander, so ist also die Anziehungskraft zwischen beiden gleich

$$\frac{km\mu}{a^2},$$

wo k eine Konstante bedeutet, die von der Wahl der Einheiten abhängt. Nun seien in zwei Punkten O und U Massen m und M fest angebracht. Auf der Geraden durch O und U sei eine dritte Masse μ beweglich. Hat sie von O den Abstand a, von U den Abstand b, so sind die Anziehungskräfte, die sie von O und U erfährt, gleich

$$\frac{km\mu}{a^2} \quad \text{und} \quad \frac{kM\mu}{b^2}.$$

Die Kräfte werden ausgeübt in den Richtungen nach O und U. Beide Kräfte addieren sich also, wenn μ nicht zwischen O und U liegt, anderenfalls heben sie sich zum Teil auf. Wir benutzen die Gerade OU als x-Achse, O als Anfangspunkt, die Strecke OU als Längeneinheit, so daß U die Abszisse $+1$ hat. Hat nun der bewegliche Massenpunkt die Abszisse x, so sind

$$\frac{km\mu}{x^2} \quad \text{und} \quad \frac{kM\mu}{(x-1)^2}$$

die beiden Kräfte. Die Gesamtkraft sei mit y bezeichnet. Dabei rechnen wir y positiv, wenn μ eine Anziehung in der Richtung der positiven x-Achse erfährt. Ist x negativ, so tritt dies ein, und dann sind beide Einzelkräfte gleich gerichtet. Für negatives x ist also:

$$y = \frac{km\mu}{x^2} + \frac{kM\mu}{(x-1)^2}.$$

Ist x positiv und größer als 1, so sind beide Einzelkräfte negativ, für $x > 1$ ist daher:

$$y = -\frac{km\mu}{x^2} - \frac{kM\mu}{(x-1)^2}.$$

Ist x zwischen 0 und 1 gelegen, d. h. liegt die Masse μ zwischen den Massen m und M, so ist die erste Kraft negativ, die zweite positiv. Für $0 < x < 1$ hat man also:

$$y = -\frac{km\mu}{x^2} + \frac{kM\mu}{(x-1)^2}.$$

Hier liegt somit ein Fall vor, wo sich für verschiedene Intervalle des x verschiedene Funktionen y ergeben. Man möge die drei Funktionen, jede in ihrem Intervalle, für die besonderen Annahmen

$$km\mu = 2, \qquad kM\mu = 1,$$

wobei also $m : M = 2 : 1$ ist, bildlich wiedergeben. Siehe Fig. 95. Die mittlere Kurve

könnte man nach der Zeichnung für eine Gerade halten, aber sie kann keine Gerade sein, weil sie ja keine ganze lineare Funktion vorstellt (vgl. Satz 4, S. 31). Die Täuschung entsteht daraus, daß die y-Einheit nicht klein genug gewählt worden ist. In Fig. 96 haben wir die Bildkurve der in Rede stehenden Funktion

$$y = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

im Intervalle von $x = 0$ bis $x = 1$ unter der Annahme gezeichnet, daß die y-Einheit nur der hunderte Teil der x-Einheit ist. Das in Fig. 95 fast geradlinig erscheinende Stück tritt auch in Fig. 96 deutlich auf, hier aber in schrägerer Lage. Wir haben hier eine Gerade eingezeichnet, der sich die Kurve auffallend stark anschmiegt, und zwar von verschiedenen Seiten her. Später werden wir Gelegenheit haben, zu zeigen, wie man die Lage einer derartigen Wendetangente für eine Stelle der Kurve berechnen

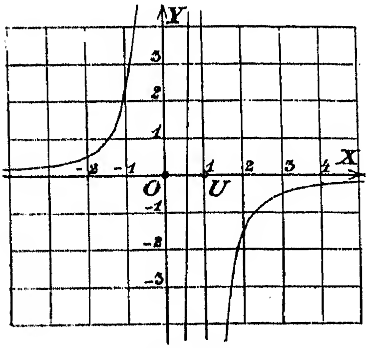


Fig. 95.

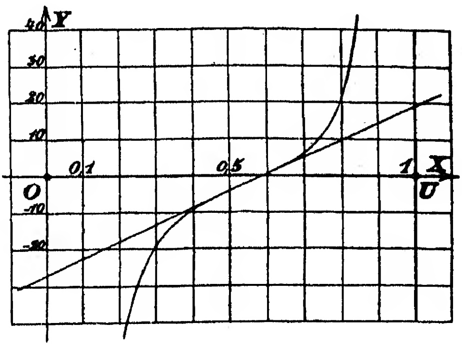


Fig. 96.

kann, an der sie einen sogenannten Wendepunkt hat, und werden dann auf dieses Beispiel zurückkommen. Die Feststellung des Verlaufs der drei Kurven ist mit Hilfe der Differentialquotienten zu leisten, die über die Steigung Auskunft geben. Keine der drei Kurven hat eine Stelle mit wagerechter Tangente (außer für $\lim x = \pm\infty$). Die Gesamtkraft hat also im Endlichen nirgends ein Maximum oder Minimum von endlicher Größe. Aber sie wird einmal gleich Null. Die mittlere Kurve nämlich schneidet die x-Achse an derjenigen Stelle, für die

$$\frac{2}{x^2} = \frac{1}{(x-1)^2}, \qquad \text{d. h.} \qquad \frac{x}{x-1} = \sqrt{2},$$

also

$$x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}\,(\sqrt{2}+1) = 2 + \sqrt{2}$$

ist. Da $0 < x < 1$ sein muß, ist die Wurzel negativ zu nehmen, also

$$x = 2 - \sqrt{2} = 0{,}585.$$

An dieser Stelle heben die beiden auf μ von rechts und links wirkenden Anziehungskräfte einander auf.

7. Beispiel: Ein aus einem Stockwerk bestehendes Haus mit drei Räumen, dessen Grundriß die Form in Fig. 97 hat, wird so geplant, daß die rechteckige Grund-

fläche vorgeschriebene Größe hat und daß AB gerade $\frac{2}{5}$ der Frontlänge AC beträgt. Die inneren Mauern BG und DE sollen dünner als die äußeren sein, so daß das laufende Meter der inneren Mauern nur $\frac{2}{3}$ soviel koste wie das laufende Meter der äußeren Mauern. Was läßt sich über die Art sagen, wie verschiedene Ausmessungen auf den Kostenbetrag einwirken werden? Die vorgeschriebene Grundfläche betrage F qm. Das laufende Meter der äußeren Mauern koste k Mark. Die Frontlänge AC kann beliebig, gleich x Metern, gewählt werden. Die Tiefe AI des Hauses ist dann gleich $F : x$ Metern. Nun sind die Kosten für die Herstellung aller Mauern in Mark:

$$y = k[AC + IH + AI + CH + \tfrac{2}{3}DE + \tfrac{2}{3}BG].$$

Hierin ist $AC = IH = x$, $DE = \frac{2}{5}x$ und $AI = CH = BG = F : x$, also:

$$y = k\left[2x + 2\frac{F}{x} + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}x + \frac{F}{x}\right)\right]$$

oder

$$y = k\left(\frac{34}{15}x + \frac{8}{3}\frac{F}{x}\right).$$

y ist demnach eine gebrochene Funktion von x. Negative Werte von x haben keine Bedeutung. Für $x = 0$ wird y unendlich groß. Für positives x ist y stets positiv, die Kosten y nehmen aber zunächst ab, da der Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = k\left(\frac{34}{15} - \frac{8}{3}\frac{F}{x^2}\right)$$

für kleine positive Werte von x negativ wird, weil dann $1 : x^2$ sehr groß ist. Wächst aber x weiter, so wird $1 : x^2$ immer kleiner. Für ein gewisses x wird der Differentialquotient gleich Null, nämlich wenn

$$\frac{F}{x^2} = \frac{17}{20}$$

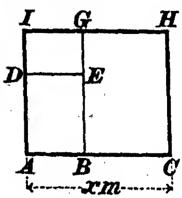


Fig. 97.

ist. Wird x noch größer, so wird der Differentialquotient positiv, d. h. die Kosten y wachsen. Für $\lim x = +\infty$ schließlich wird y wieder unendlich groß. Am günstigsten ist es also, x so zu wählen, daß $F : x^2 = \frac{17}{20}$ wird. Dann ist die Tiefe des Hauses, nämlich $F : x$, gleich $\frac{17}{20}x$. Man wird also den Grundriß so machen, daß sich die Frontlänge zur Tiefe wie 20 zu 17 verhält. Fig. 97 zeigt dies Verhältnis.

8. Beispiel: Ist E die elektromotorische Kraft eines galvanischen Elementes, W sein innerer Widerstand und w der Widerstand im äußeren Stromkreise, so ist die Stromstärke nach dem Ohmschen Gesetze gleich:

$$\frac{E}{W+w} \quad \text{oder} \quad \frac{E}{W}\cdot\frac{1}{1+\frac{w}{W}}.$$

Schaltet man zwei gleiche derartige Elemente hintereinander, so ist ihre elektromotorische Kraft $2E$ und ihr innerer Widerstand $2W$, während der äußere Stromkreis der alte bleiben möge, also wieder den Widerstand w habe, so daß die Kette der beiden Elemente einen Strom erzeugt von der Stärke:

$$\frac{2E}{2W+w} \quad \text{oder} \quad \frac{E}{W}\cdot\frac{2}{2+\frac{w}{W}}.$$

Bei einer Kette von x hintereinander geschalteten ebensolchen Elementen ergibt sich entsprechend die Stromstärke:

$$(2) \qquad y = \frac{Ex}{Wx + w} = \frac{E}{W} \cdot \frac{x}{x + \frac{w}{W}}.$$

Als Anzahl der Elemente ist x eigentlich eine positive ganze Zahl. Sehen wir davon ab und verstehen wir unter x eine beliebige Veränderliche, so ist die Stromstärke y eine gebrochene Funktion von x. Sie wird nur für $x = -w : W$, also für einen negativen Wert von x, unendlich groß. Wird x selbst $\pm \infty$, so wird y zu $E : W$, was man sofort einsieht, wenn man y so umformt:

$$y = \frac{E}{W} \cdot \frac{1}{1 + \frac{w}{W} \cdot \frac{1}{x}},$$

da $1 : x$ für $\lim x = \pm \infty$ unendlich klein wird. Bei einer sehr großen Anzahl von Elementen ist daher die Stromstärke fast gleich $E : W$. Der Differentialquotient von y ergibt sich aus (2) ohne weiteres nach der Faktorregel und Bruchregel:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{wE}{W^2} \cdot \frac{1}{\left(x + \frac{w}{W}\right)^2}.$$

Er ist beständig positiv, d. h. y wächst mit wachsendem x. Obgleich x als die Anzahl der Elemente eine ganze positive Zahl ist, wollen wir die Bildkurve der Funktion y für beliebige, auch negative Werte von x betrachten. Da y nur für den einen endlichen Wert $x = -w : W$ unendlich groß wird, zerfällt die Kurve in zwei Zweige, von denen jeder beständig steigt. Der linke Zweig verläuft völlig im zweiten Quadranten; er kommt aus dem Unendlichfernen, wo er sich derjenigen Geraden parallel zur x-Achse anschmiegt, die die Ordinate $E : W$ hat; er wird für $x = -w : W$ unendlich hoch. Der rechte Zweig kommt vom Unendlichfernen unten, indem er sich der Geraden $x = -w : W$ anschmiegt, geht durch den Anfangspunkt O und schmiegt sich für $x = +\infty$ der Geraden an, die die Höhe $y = E : W$ über der x-Achse hat. Siehe Fig. 98, in der wir den Teil, für den x negativ ist, punktiert haben, da er keine Bedeutung für die eigentliche Aufgabe hat. In dieser Figur sind zwar $E : W$ und $w : W$ durch gleichlange Strecken OB und AO wiedergegeben. Doch dient die Figur zur Veranschaulichung für jeden Fall, wie auch $E : W$ und $w : W$ gegeben sein mögen. Ist z. B. $w : W = 10$, so ist die Einheit der x-Achse der zehnte Teil der Strecke AO, so daß sich beispielsweise für $x = 20$, d. h. für 20 Elemente, die Stromstärke ergibt, die durch QP dargestellt wird. Dabei ist die Länge von QP mit der von $E : W$ oder OB zu vergleichen. Ist z. B. $E : W = 8$, so verhält sich die Stromstärke zu 8 wie QP zu OB. Die Bildkurve ist übrigens eine der sogenannten Hyperbeln (vgl. S. 139).

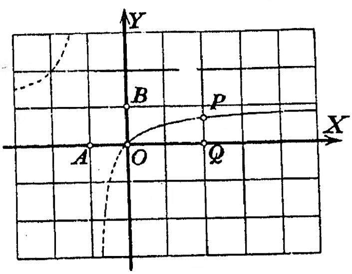


Fig. 98.

9. Beispiel: Nunmehr wollen wir annehmen, eine größere Anzahl von galvanischen Elementen, etwa n, sei zu einer Batterie zu vereinigen. Jedes einzelne habe die elektromotorische Kraft E und den inneren Widerstand W. Der Widerstand des äußeren Stromkreises sei wieder w. Wir wollen jetzt aber nicht alle n Elemente hintereinander schalten, sondern je x von ihnen nebeneinander, indem wir also bei je x Elementen jedesmal die gleichen Pole verbinden. Aus je x Elementen wird dann ein Element von derselben elektromotorischen Kraft, aber von der x-fachen Oberfläche, d. h. vom Widerstand $W : x$. Wir wollen annehmen, x gehe in n auf (z. B. seien 60 Elemente zu je 5 nebeneinander geschaltet). Alsdann liegen $n : x$ Elemente vor, von denen jedes die elektromotorische Kraft E und den inneren Widerstand $W : x$ hat. Diese $n : x$ Elemente schalten wir nun hintereinander. Die Stromstärke y berechnet sich nach dem Ohmschen Gesetze wie im vorigen Beispiele, aber an die Stelle von x tritt $n : x$, an die Stelle von W tritt $W : x$. Also kommt nach (2):

$$y = \frac{E \cdot \frac{n}{x}}{\frac{W}{x} \cdot \frac{n}{x} + w} = \frac{E}{W} \cdot \frac{nx}{n + \frac{w}{W} x^2}\,.$$

Dies ist eine gebrochene Funktion der Zahl x derjenigen Elemente, die wir durch Nebeneinanderschalten zusammenfügten, d. h. x bedeutet eigentlich eine der positiven ganzen Zahlen, die in n, der Anzahl aller zur Verfügung stehenden Elemente, aufgehen. Lassen wir aber zunächst x irgendwelche positive Werte haben. Dann ist auch y stets positiv. Für $\lim x = +\infty$ wird y zu Null, wie man aus der ersten Form von y sieht. Da y auch für $x = 0$ zu Null wird, erreicht y für wenigstens ein positives x ein Maximum. Der Differentialquotient ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{E}{W} \cdot \frac{n^2 - n\frac{w}{W} x^2}{\left(n + \frac{w}{W} x^2\right)^2}.$$

Nach Satz 8, S. 106, muß also das Maximum eintreten, wenn

$$x = \sqrt{n \cdot \frac{W}{w}}$$

wird. Für alle anderen positiven Werte von x wird y kleiner als für diesen Wert, denn wenn x von 0 bis zu diesem Werte zunimmt, bleibt $dy : dx$ positiv, wenn x größer als dieser Wert ist, wird $dy : dx$ negativ. (Vgl. Satz 7, S. 104). Daher wird man die zur Verfügung stehenden n Elemente so in Reihen von je x Elementen nebeneinander schalten, daß x dem Werte der Quadratwurzel möglichst nah kommt. Wenn x nicht in n aufgeht, d. h. wenn beim Nebeneinanderschalten von je x Elementen schließlich einige Elemente, nämlich weniger als x, übrigbleiben, die man alsdann für sich nebeneinander schaltet, wird man ebenfalls die zweckmäßigste Anordnung erzielen, sobald man x nahe bei dem Werte jener Quadratwurzel wählt.

10. Beispiel: Die Wärmemenge, die nötig ist, um 1 cbm trockener Luft beim konstanten Druck von 760 mm Barometerstand von x^0 C auf 100^0 C zu erwärmen, ist:

$$y = \frac{0{,}307}{1 + \frac{x}{273}}(100 - x)\,,$$

ausgedrückt in Kalorien oder Wärmeeinheiten. Für $x > 100$ wird sie natürlich frei. Rückt x nahe an -273, den Nullpunkt der sogenannten absoluten Temperatur,

so gilt die Formel nicht mehr. Man zeichne die Bildkurve, die nur für $x > -273$ in Betracht kommt. Siehe Fig. 99. Die Kurve ist übrigens zusammen mit dem nichtdargestellten Zweige, der sich für $x < -273$ ergibt, eine Hyperbel (vgl. S. 139).

Die meisten bisher gebrachten Beispiele sind der Physik entnommen. Dasselbe gilt von dem folgenden, das jedoch von etwas anderer Art ist, sich nämlich auf ein in Wahrheit noch nicht vollkommen ergründetes Naturgesetz bezieht. In solchen Fällen bildet man Näherungsformeln, nämlich möglichst einfach gebaute Formeln, die

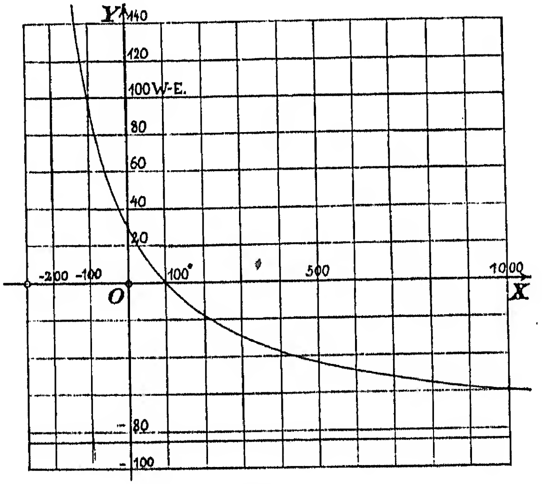


Fig. 99.

sich hinreichend genau an die Beobachtungen anschließen. Bei derartigen Näherungsformeln muß man untersuchen, in welchen Bereichen sie mit der Wirklichkeit einigermaßen im Einklange stehen. Selbst wenn man von vornherein nicht weiß, daß eine Formel nur näherungsweise gilt, deckt ihre mathematische Untersuchung ihre schwache Seite auf.

11. Beispiel: Bei t^0 C. übt ein Kilogramm Kohlensäure, dessen Volumen x Kubikmeter beträgt, auf ein Quadratmeter der Wand des Gefäßes einen Druck aus, der in Kilogrammen gemessen den Betrag hat:

$$y = \frac{0{,}003\,688\,(273 + t)}{x - 0{,}000\,843} - \frac{2{,}093\,5}{(273 + t)\,(x + 0{,}000\,977)^2}.$$

Bei 15° C. z. B. ergibt sich hieraus:

$$(3) \qquad y = \frac{1{,}062}{x - 0{,}000\,843} - \frac{0{,}007\,269}{(x + 0{,}000\,977)^2}$$

Denn man hat hier 0,003 688 und 2,0935 mit 288 zu multiplizieren und dividieren und darf, da die Zahlen abgerundet sind, die Ergebnisse nur so weit benutzen, als sie sich für die Zahlen 0,0036875 und 0,003 688 5, sowie für die Zahlen 2,093 45 und 2,093 55 nicht voneinander unterscheiden.

Nach (3) ist y eine gebrochene Funktion von x. Wir bilden ihren Differentialquotienten. Der des ersten Bruches wird nach der Bruchregel berechnet, der des zweiten Bruches nach der Kettenregel. Man bekommt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1{,}062}{(x-0{,}000\,843)^2} + \frac{0{,}014\,538}{(x+0{,}000\,977)^2}.$$

Wir nehmen x positiv an, weil negative Werte für die vorliegende Aufgabe keinen Sinn haben. Für sehr große Werte von x sind die Nenner angenähert gleich x^2 und x^3, so daß dann der Differentialquotient angenähert gleich

$$\frac{-1{,}062\,x + 0{,}015}{x^3},$$

d. h. negativ wird. In der Tat: wird das Volumen x recht groß, so wird die Spannung y recht klein werden; die Bildkurve fällt für große Werte von x, vgl. Satz 7, S. 104. Fragen wir uns, für welches x sie wagerecht verläuft, d. h. der Differentialquotient gleich Null wird. Zu fordern ist:

$$1{,}062\,(x+0{,}000\,977)^3 = 0{,}014\,538\,(x-0{,}000\,843)^2.$$

Dies ist eine Gleichung dritten Grades für x. Rechnet man die Potenzen aus, indem man natürlich immer abgekürzte Multiplikation entsprechend den gegebenen Dezimalstellen anwendet, so findet man, daß sich die von x freien Glieder, nämlich $1{,}062 \cdot 0{,}000\,977^3$ und $0{,}014\,538 \cdot 0{,}000\,843^2$, hinreichend genau fortheben, so daß bleibt:

$$1{,}062\,x^3 - 0{,}011\,425\,x^2 + 0{,}000\,027\,x = 0.$$

Offenbar wird dieser Gleichung durch $x = 0$ genügt. Nach Absondern des Faktors x verbleibt die quadratische Gleichung:

$$1{,}062\,x^2 - 0{,}011\,425\,x + 0{,}000\,027 = 0.$$

Nach S. 110 sind ihre Lösungen ungefähr gleich 0,0035 und 0,0073, d. h. an den Stellen $x = 0$, $x = 0{,}0035$, $x = 0{,}0073$ hat die Bildkurve wagerechte Tangenten. Ferner sieht man aus den Nennern in (3), daß y nur für einen positiven Wert von x, nämlich für $x = 0{,}000\,843$, unendlich groß wird, und dieser Wert von x ist kleiner als 0,0035. Die Parallele $x = 0{,}000\,843$ zur y-Achse wird also von der Kurve im Unendlichen erstrebt. Ist x wenig größer als diese Zahl, so wird in y das erste Glied sehr groß positiv, d. h. dann wird auch y sehr groß positiv. Der rechte Zweig der Kurve kommt somit aus dem Positiv-Unendlichen, sich dort der Geraden $x = 0{,}000\,843$ anschmiegend, und fällt bis $x = 0{,}0035$, hebt sich dann bis $x = 0{,}0073$ und fällt weiterhin beständig, um sich für $x = +\infty$ der x-Achse anzuschmiegen. Siehe Fig. 100. Für x zwischen 0 und 0,000 843 dagegen ist das erste Glied in (3) und daher auch y selbst negativ. Dies aber ist für den physikalischen Vorgang sinnlos, da y die Spannung bedeutet. Hierdurch tritt zutage, daß die Formel dem Wesen der Sache nicht entspricht und künstlich aufgebaut ist.

Wir fügen noch zwei Beispiele hinzu, die der Leser selbst durchführen möge.

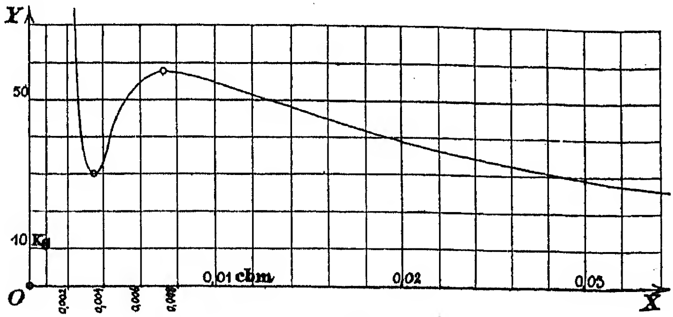


Fig. 100.

12. **Beispiel:** Ein verschlossenes zylindrisches Litergefäß soll so hergestellt werden, daß für die gesamte Fläche (Mantel plus Bodenfläche plus Deckelfläche) möglichst wenig Material verbraucht wird. Beliebig zu wählen ist zunächst der Radius des Bodens; er betrage x cm. Wie groß ist dann die Grundfläche? Wie groß also die Höhe? Wie groß folglich die gesamte Fläche y in qcm? y ist eine gebrochene Funktion von x, deren Minimum gesucht wird. Vgl. das 3. Beispiel, S. 108.

13. **Beispiel:** Ein Rohr von 30 qcm Querschnitt soll hergestellt werden. Der Querschnitt soll aus einem Rechteck mit einem aufgesetzten Halbkreise bestehen. Wie wird man die Dimensionen wählen, damit der Umfang des Querschnittes möglichst gering wird? Um festzustellen, welche Größe hier die unabhängige Veränderliche x ist, überlege man sich, wie man irgendeinen Querschnitt von der vorgeschriebenen Form zu zeichnen anfangen wird; offenbar mit dem Halbkreise. Welche Länge wählt man also beliebig? Welche Größe ist die abhängige Veränderliche, usw.? Man vergleiche das Ergebnis mit dem im 6. Beispiel, S. 57.

§ 6. Die Umkehrregel.

Wenn wir von einer Funktion $y = f(x)$ festgestellt haben, daß sie in einem Intervalle von $x = a$ bis $x = b$ stetig ist und differentiiert werden kann, wird sie dort durch einen Kurvenzug AB, siehe Fig. 101, dargestellt, der überall lückenlos oder stetig ist und Tangenten hat. Wie immer lassen wir einen Punkt P diesen Kurvenzug im Sinn wachsender Abszissen durchlaufen (S. 32), d. h. der Fußpunkt Q des Lotes von P auf die x-Achse soll sich im positiven Sinn längs der x-Achse bewegen. Mit R bezeichnen wir den Fußpunkt des Lotes von P auf die y-Achse. Dieser Punkt R wird nun eine Strecke auf der y-Achse beschreiben, braucht es aber nicht immer ebenso eintönig wie Q zu tun: Während P von A bis B geht,

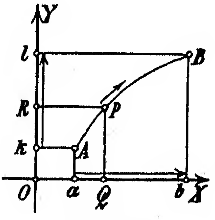


Fig. 101.

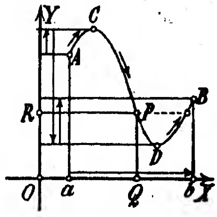


Fig. 102.

kann sich R auf der y-Achse teils im positiven und teils im negativen Sinn bewegen. Man sieht dies in Fig. 102. Wir wollen uns aber in einem derartigen Falle stets auf ein Stück des Kurvenzuges beschränken, zu dem eine eintönige Bewegung von R, sei es im positiven Sinn, sei es im negativen Sinn, längs der y-Achse gehört. In Fig. 102 werden wir also etwa nur das Kurvenstück von C bis D ins Auge fassen. In der vorhergehenden Fig. 101 ist die Bewegung von R im ganzen Intervalle von A bis B eintönig, nämlich durchweg positiv.

Wir wollen uns also auf ein Intervall AB beschränken, innerhalb dessen sich R längs der y-Achse nur im positiven oder aber nur im negativen Sinn bewegt, falls sich Q längs der x-Achse im positiven Sinn bewegt, siehe Fig. 101 und Fig. 103. (In Fig. 103 findet die Bewegung von R im negativen Sinn statt.) Bei dieser Beschränkung leuchtet ein, daß die Ordinate $y = f(x)$ während der Bewegung entweder beständig wächst (Fig. 101) oder beständig abnimmt (Fig. 103), d. h. daß die Steigung entweder beständig positiv oder beständig negativ ist. Nach Satz 7, S. 104, setzen wir somit voraus, daß der Differentialquotient im Intervall entweder überall positiv oder überall negativ sei. Wir wollen dabei auch die Möglichkeit ausschließen, daß der Differentialquotient irgendwo gleich Null, d. h. die Kurventangente zur x-Achse parallel werde. Während Q das Intervall von $x = a$ bis $x = b$ durchläuft, möge R das Intervall von $y = k$ bis $y = l$ zurücklegen.

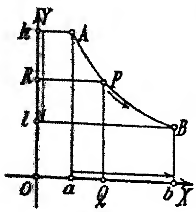


Fig. 103.

Unter diesen Voraussetzungen gilt folgendes: Zu jedem Wert von y im Intervall von $y = k$ bis $y = l$ gehört ein und nur ein Punkt R der y-Achse, ferner ein und nur ein Punkt P des Kurvenzuges AB und also ein und nur ein Punkt Q des Intervalles von $x = a$ bis $x = b$ auf der x-Achse, d. h. ein und nur ein Wert von x. Mithin können wir sagen: Im Intervalle von $y = k$ bis $y = l$ ist x eine Funktion von y. Die Rollen von x und y können also vertauscht werden. Beispiele hierzu gibt es in Menge: Der Rauminhalt einer Kugel ist eine Funktion des Radius, der Kugelradius richtet sich aber auch nach dem Rauminhalte der Kugel, d. h. man kann auch den Radius als Funktion des Inhaltes auffassen. Bei konstanter Temperatur ist die Spannung eines Gases abhängig von seinem Volumen, aber man kann auch die Spannung beliebig wählen, und dann wird sich das Volumen als Funktion der Spannung ergeben.

Diese Umkehrung der Auffassung nennt man die Umkehrung

oder **Inversion der Funktion** $y = f(x)$. Die neue Funktion, d. h. x aufgefaßt als Funktion von y, heißt die zur ursprünglichen Funktion **inverse Funktion**, nach dem lateinischen invertere, umkehren. Ein einfaches rechnerisches Beispiel: Wenn

$$y = \frac{x}{1+x} \tag{1}$$

vorliegt, ergibt sich, daß umgekehrt

$$x = \frac{y}{1-y} \tag{2}$$

ist. Liegt eine Funktion $y = f(x)$ vor, so kann man allerdings nicht immer so leicht wie in diesem Beispiele die inverse Funktion finden. Man muß ja die Gleichung $y = f(x)$ auf eine neue Form bringen, in der links nur x und rechts ein Ausdruck in y allein steht, also auf eine Form, die sich in allgemeinen Zeichen so darstellt: $x = F(y)$. Diese Umformung von $y = f(x)$ in eine Gleichung $x = F(y)$ nennt man auch die Auflösung der Gleichung hinsichtlich x. In unserm Beispiel (1) war dies leicht zu leisten, oft aber ist es schwer, ja meistens können wir es überhaupt rechnerisch nicht tun. Aber auch dann gibt es die inverse Funktion; sie läßt sich bloß nicht durch die in der Arithmetik zu Verfügung stehenden Zeichen ausdrücken.

Die inverse Funktion hat genau dasselbe Bild wie die ursprüngliche. Nur muß man jetzt die y-Achse als die Achse der unabhängigen Koordinate auffassen, so daß die inverse Funktion dem Intervalle von $y = k$ bis $y = l$ angehört. Aber wir sind gewöhnt, die unabhängige Veränderliche x und nicht y zu nennen. Wollen wir dies auch im Fall der inversen Funktion tun, so müssen wir nachträglich noch die Bezeichnungen vertauschen, d. h. y statt x und x statt y schreiben. Die zur Funktion (1) inverse Funktion (2) z. B. schreiben wir dann so:

$$y = \frac{x}{1-x} \tag{3}$$

Was die bildliche Darstellung betrifft, so kommt der Wechsel in den Bezeichnungen darauf hinaus, daß man die Fig. 101 oder 103 um diejenige Gerade, die den Winkel der positiven Achsen in gleiche Teile zerlegt, herumlegt, bis die x-Achse und y-Achse ihre Plätze gewechselt haben. Statt Fig. 101 und 103 ergeben sich dann Fig. 104 und 105. Kaum brauchen wir darauf

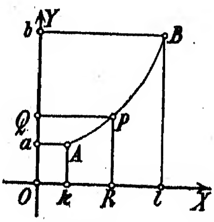


Fig. 104.

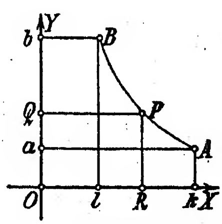


Fig. 105.

hinzuweisen, daß die Einheitsstrecken, mit denen die Koordinaten gemessen werden, die Vertauschung mitmachen.

Wir wollen aber **nicht**, wie es soeben geschah, nachträglich auch die Bezeichnungen x und y vertauschen, wir wollen also die zu $y = f(x)$ inverse Funktion $x = F(y)$ **nicht** in der Form $y = F(x)$ schreiben. Denn das kann allzuleicht zu Verwirrungen führen.

Oben haben wir in bezug auf das Intervall, in dem wir die zu einer Funktion inverse Funktion betrachteten, bestimmte Einschränkungen gemacht. Man sieht leicht, daß ohne sie die Umkehrung der Funktion an einer verhängnisvollen Unklarheit leiden würde. Nehmen wir nämlich z. B. an, daß der Kurvenzug von A bis B nicht, wie verlangt, beständig steige oder beständig falle, sondern wie in Fig. 102 auf S. 149 verlaufe. Wählen wir dann einen Wert y, also einen Punkt R auf der y-Achse, so können zu ihm sehr wohl mehrere Punkte P der Kurve, hier z. B. zwei, gehören, da die Parallele zur x-Achse durch R den Kurvenzug zweimal schneidet. Mithin bleibt man im Zweifel, welche Abszisse x gewählt werden soll, d. h. die zu $y = f(x)$ inverse Funktion $x = F(y)$ erfüllt hier **nicht** die sonst von uns immer gemachte Voraussetzung, daß zu einem bestimmten Wert der unabhängigen Veränderlichen (jetzt y) **ein und nur ein** Wert der abhängigen Veränderlichen (jetzt x) gehört. Wir kommen also zu einem allgemeineren Funktionsbegriffe, zu den sogenannten **mehrwertigen** oder **mehrdeutigen Funktionen**. Wenn z. B. $y = x^2$ vorliegt, ergibt die Umkehrung $x = \sqrt{y}$, und dies ist eine **zweiwertige** Funktion, weil ja $\sqrt{y}$ mit dem einen oder dem anderen Vorzeichen versehen werden darf. Das führt aber zu einer Unsicherheit; wir wollen uns immer nur mit **einwertigen** Funktionen beschäftigen, und deshalb haben wir bei der Einführung des Begriffes der inversen Funktion in bezug auf das Intervall oben besondere Einschränkungen gemacht. Allerdings werden wir bei den Anwendungen nicht umhin können, gelegentlich mehrwertige Funktionen zu betrachten wie z. B. die Quadratwurzel aus der unabhängigen Veränderlichen, aber dann werden wir immer zuerst untersuchen, welcher der verschiedenen Werte in Betracht kommt, die diese Funktion haben kann, d. h. wir werden die notwendigen Einschränkungen machen, um jede Unsicherheit zu vermeiden.

Da, wie gesagt, die inverse Funktion $x = F(y)$ genau dieselbe Bildkurve (Fig. 101 oder 103) wie die ursprüngliche Funktion $y = f(x)$ hat, und diese Bildkurve stetig ist, leuchtet ein, daß sich auch die inverse Funktion im Intervalle von $y = k$ bis $y = l$ stetig verhält. Da ferner der Kurvenzug überall eine Tangente hat, kommt auch der inversen Funktion ein Differentialquotient zu. Dabei ist zu beachten, daß der Differentialquotient, weil er die Steigung der Tangente angibt, im

Fall der inversen Funktion die Steigung gegenüber der y-Achse, nicht der x-Achse bedeutet, woraus man schließt, daß er den reziproken Wert des Differentialquotienten der ursprünglichen Funktion hat. Dies ist auch durch Rechnung leicht klarzumachen: Der Differentialquotient von $y = f(x)$ wird erklärt als der Grenzwert

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

wo Δx und Δy zusammengehörige Zunahmen von x und y bedeuten, die nach Null streben. Der Differentialquotient der inversen Funktion $x = F(y)$ wird entsprechend erklärt als der Grenzwert

$$\frac{dx}{dy} = \lim \frac{\Delta x}{\Delta y},$$

weil x und y ihre Bedeutung vertauschen. Nun ist aber

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

und nach Satz 10, S. 65,

$$\lim \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}}, \tag{4}$$

d. h.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}. \tag{5}$$

In der Tat ist mithin der Differentialquotient der inversen Funktion der reziproke Wert des Differentialquotienten der ursprünglichen Funktion. Hierbei ist nach Satz 10, S. 65, von dem Fall abzusehen, wo der im Nenner von (4) stehende Grenzwert gleich Null ist, d. h. wo der Differentialquotient $dy : dx$ der ursprünglichen Funktion gleich Null ist, also die Tangente zur x-Achse parallel liegt. Dies ist der Grund, weshalb wir oben ausdrücklich vorausgesetzt haben, daß auf dem Kurvenzuge AB kein Punkt liege, dessen Tangente zur x-Achse parallel ist. Die Steigung einer derartigen Tangente gegenüber der y-Achse wäre ja unendlich groß.

Zusammengefaßt gilt also der

Satz 15: Wenn $y = f(x)$ eine Funktion von x ist, die sich im Intervalle von $x = a$ bis $x = b$ überall stetig verhält und einen bestimmten endlichen Differentialquotienten hat, der nirgends gleich Null wird und entweder überall positiv oder überall negativ ist, und wenn y, während x von a bis b

geht, die Werte von k bis l annimmt, gibt es eine zu $y = f(x)$ inverse Funktion $x = F(y)$, die sich im Intervalle von $y = k$ bis $y = l$ überall stetig verhält und überall einen bestimmten endlichen Differentialquotienten hat. Der Differentialquotient ist der reziproke Wert des Differentialquotienten der ursprünglichen Funktion, in Formel:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Auf S. 126 ergab sich, daß man die Differentiale wie endliche Zahlen gegeneinander heben darf, wenn dieselben Differentiale im Zähler und Nenner vorkommen. Dies sowie die letzte Formel zeigt, daß man Brüche aus Differentialen überhaupt wie gewöhnliche Brüche umformen darf.

1. Beispiel: Vorgelegt sei die Funktion $y = x^2$. Ihre Bildkurve ist eine Parabel (S. 95), deren tiefste Stelle der Anfangspunkt ist und die zur y-Achse symmetrisch verläuft, siehe Fig. 36 und 37, S. 48, 49. Die Bedingungen des Satzes 15 sind hier erfüllt, wenn man nur positive Werte von x ins Auge faßt, da die Kurve für $x > 0$ beständig steigt. Bei der Beschränkung auf nur positive Werte von x gibt es also eine bestimmte inverse Funktion, nämlich $x = \sqrt{y}$. Sie gilt für alle positiven Werte von y; die Quadratwurzel ist daher positiv zu nehmen. Da $dy : dx = 2x$ ist, ergibt sich $dx : dy = 1 : 2x$ oder $1 : 2\sqrt{y}$. Mithin hat die Funktion $\sqrt{y}$ von y den Differentialquotienten $1 : 2\sqrt{y}$, falls $\sqrt{y}$ positiv gewählt wird. Die Bedingungen des Satzes 15 gelten aber auch, wenn x alle negativen Werte durchläuft, denn wenn x vom Negativ-Unendlichen bis Null geht, nimmt $y = x^2$ beständig ab. Mithin gibt es auch eine zweite inverse Funktion $x = \sqrt{y}$, bei der die Wurzel negativ zu nehmen ist. Ihr Differentialquotient hat wie vorher den Wert $1 : 2\sqrt{y}$, aber hierin ist jetzt die Wurzel negativ. Aus $y = x^2$ gehen demnach zwei verschiedene inverse Funktionen $x = \sqrt{y}$ hervor, bei der einen ist $\sqrt{y}$ positiv, bei der andern negativ, und bei beiden ist $1 : 2\sqrt{y}$ der Differentialquotient.

Wenn wir die Bezeichnungen der Veränderlichen vertauschen, kommen wir also zu zwei Funktionen $y = \sqrt{x}$, die sich nur dadurch unterscheiden, daß bei der einen die Wurzel positiv, bei der andern negativ zu nehmen ist. Beide haben den Differentialquotienten $1 : 2\sqrt{x}$, wo in bezug auf die Wurzel dasselbe gilt. Die Bilder dieser beiden Funktionen gehen aus dem Bild von $y = x^2$ in Fig. 36, S. 48, hervor, indem man diese so umlegt, daß die x- und y-Achse den Ort wechseln, d. h. sie sind die beiden Teile der in Fig. 106 dargestellten Parabel, deren Scheitel der Anfangspunkt und deren Achse die x-Achse ist. Für $x = 4$ z. B. ergibt sich bei der einen Funktion $y = \sqrt{4} = 2$, bei der andern $y = -\sqrt{4} = -2$. Das sind die beiden in Fig. 106 hervorgehobenen Punkte. Der Differentialquotient $1 : 2\sqrt{x}$ hat für den ersten Punkt den Wert $\frac{1}{4}$, für den zweiten den Wert $-\frac{1}{4}$, d. h. die Steigung

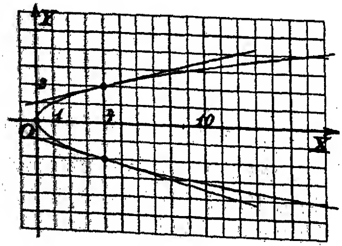


Fig. 106.

der Tangente für den ersten Punkt ist $\frac{1}{4}$, die für den zweiten $-\frac{1}{4}$, was die in Fig. 106 gezeichneten Tangenten liefert.

Die beiden durch die Umkehrung erhaltenen Funktionen $y = \sqrt{x}$ und $y = -\sqrt{x}$ haben noch eine besondere Eigenschaft: Sie sind überhaupt nur für positive Werte von x vorhanden, für negatives x ergibt sich kein reelles y.

Das soeben besprochene einfache Beispiel zeigt, daß wir jetzt auch in der Lage sind, die Funktion

$$(6) \qquad y = \sqrt{x}$$

zu differentiieren, denn es ergab sich

$$(7) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

und zwar sowohl, wenn $\sqrt{x}$ positiv ist, als auch, wenn $\sqrt{x}$ negativ ist.

Der Satz 15, den wir auf $y = x^2$ angewandt hatten, um den Differentialquotienten von $y = \sqrt{x}$ zu bestimmen, liefert überhaupt eine nützliche neue Differentiationsregel, die als die Umkehrregel bezeichnet werden kann. Sie reiht sich als siebente an die fünf Regeln auf S. 84, 85 und an die sechste Regel, die Kettenregel, auf S. 127 an:

7. Regel (Umkehrregel): Der Differentialquotient der inversen Funktion einer Funktion ist der reziproke Wert des Differentialquotienten der ursprünglichen Funktion:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Daß sich dies leicht dem Gedächtnis einprägen läßt, wird man nicht bestreiten.

Jetzt erinnern wir daran, daß man bekanntlich die Wurzeln als Potenzen mit gebrochenen Exponenten schreibt:

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}, \quad \sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}} \quad \text{usw.}$$

Dies geschieht deshalb, weil dann die Regeln für das Potenzrechnen

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \qquad (a^m)^n = a^{mn}$$

ohne weiteres die Regeln für das Wurzelrechnen liefern:

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{m}} \cdot a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}, \quad \left(\sqrt[m]{a}\right)^n = a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}.$$

Statt (6) schreiben wir also auch

$$(8) \qquad y = x^{\frac{1}{2}},$$

und (7) liefert:

$$(9) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\, x^{-\frac{1}{2}}$$

als zugehörigen Differentialquotienten. Die Funktion (8) ist eine Potenz von x, nämlich x^n, wenn $n = \frac{1}{2}$ ist. Nach der Potenzregel hat x^n den Differentialquotienten $n x^{n-1}$, und das gibt hier $\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$, also wirklich den Differentialquotienten (9). Aber man muß bedenken, daß wir die Potenzregel nur für den Fall bewiesen haben, wo der konstante Exponent n eine positive oder negative ganze Zahl ist (S. 83). Mithin hat sich hier etwas Neues ergeben: Die Potenzregel ist auch für $n = \frac{1}{2}$ richtig.

Dies läßt sich verallgemeinern:

Unter m sei eine ganze positive Zahl verstanden. Dann wissen wir, daß die Potenz

$$y = x^m$$

den Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = m x^{m-1}$$

hat. Zu $y = x^m$ ist aber invers die Funktion

$$x = y^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{y}\,.$$

Also hat sie nach der Umkehrregel den Differentialquotienten:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{m x^{m-1}} = \frac{1}{m} x^{-m+1} = \frac{1}{m} x^{1-m}.$$

Wenn wir jetzt x statt y und y statt x schreiben, folgt: Die Funktion

$$y = x^{\frac{1}{m}} \tag{10}$$

hat den Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{m} y^{1-m}. \tag{11}$$

In (11) dürfen wir für y den Wert (10) einsetzen. Also hat die Funktion (10) den Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{m}\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{1-m} = \frac{1}{m} x^{\frac{1-m}{m}}$$

oder:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1}. \tag{12}$$

Vergleichen wir dies Ergebnis damit, daß

$$y = x^n$$

den Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = n x^{n-1} \tag{13}$$

hat, falls n eine ganze Zahl bedeutet. Nehmen wir uns die Freiheit, für n die gebrochene Zahl

$$n = \frac{1}{m}$$

zu setzen, so ist

$$n - 1 = \frac{1}{m} - 1,$$

so daß (13) gerade den Wert (12) liefert. Also dürfen wir die Potenzregel in der Tat auch für den gebrochenen Exponenten $1:m$ anwenden.

Somit ist bewiesen, daß die Potenzregel für die Differentiation von x^n nicht nur dann gilt, wenn n eine ganze Zahl ist, sondern auch dann, wenn n der reziproke Wert einer ganzen positiven Zahl ist.

Nunmehr können wir auch den letzten Schritt der Verallgemeinerung tun. Wir wollen die Funktion

$$y = x^{\frac{p}{q}} \tag{14}$$

differentiieren; darin soll der Exponent eine gebrochene Zahl sein. Ein Bruch $p:q$ läßt sich auch dann, wenn er negativ ist, so schreiben, daß sein Nenner positiv ist. Deshalb dürfen wir voraussetzen: p und q sollen ganze Zahlen sein und insbesondere soll q positiv sein. Jetzt wenden wir die Kettenregel an. Nach (14) ist

$$y = z^p, \tag{15}$$

wo

$$z = x^{\frac{1}{q}} \tag{16}$$

ist. Da p eine ganze Zahl ist, hat die Funktion (15) nach der Potenzregel den Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dz} = p\,z^{p-1}$$

Da q in (16) eine positive ganze Zahl wie vorhin m in (10) ist, wissen wir nach (12), daß die Funktion (16) den Differentialquotienten

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{q}\,x^{\frac{1}{q}-1}$$

hat. Nach der Kettenregel ergibt sich nun der Differentialquotient der vorgelegten Funktion (14) durch Multiplikation der beiden letzten Formeln, indem sich dann dz forthebt:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{p}{q} z^{p-1} x^{\frac{1}{q}-1}.$$

Für die Hilfsveränderliche z aber haben wir ihren Wert (16) einzusetzen. Also kommt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q} x^{\frac{p-1}{q}} x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p-1+1-q}{q}}$$

oder:

(17) $$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$$

Daß die Funktion (14) diesen Differentialquotienten (17) hat, steht wieder vollkommen im Einklange damit, daß x^n den Differentialquotienten nx^{n-1} hat. Hier kommt aber statt der ganzen Zahl n eine gebrochene Zahl $p:q$ vor. Unser Ergebnis ist mithin der

Satz 16: Der Satz, wonach die Funktion

$$y = x^n$$

den Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

hat, gilt überhaupt, wenn n irgendeine ganze oder gebrochene, positive oder negative Konstante bedeutet.

Da Potenzen mit gebrochenen Exponenten Wurzeln sind, kann man mithin auf Grund dieses Satzes ohne weiteres Wurzeln differentiieren. Man muß nur immer die Umformung machen:

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}.$$

Ist z. B. vorgelegt

$$y = \sqrt{\frac{x^2-2}{x^3+3}},$$

so wenden wir zuerst die Kettenregel an:

$$y = \sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}}, \qquad z = \frac{x^2-2}{x^3+3}.$$

Aus der ersten Formel berechnen wir $dy:dz$ mittels der Regel für x^n, aus der zweiten $dz:dx$ mittels der Bruchregel:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{z}},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{(x^3+3)\,2x - (x^2-2)\,3x^2}{(x^3+3)^2} = \frac{-x^4+6x^2+6x}{(x^3+3)^2}.$$

Wir suchen $dy:dx$. Dies ergibt sich, wenn wir die erste Formel mit der zweiten multiplizieren, da sich dann dz forthebt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot \frac{-x^4+6x^2+6x}{(x^3+3)^2},$$

Aber z ist der Bruch $(x^2-2):(x^3+3)$. Also kommt schließlich:

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{x^3+3}{x^2-2}} \cdot \frac{-x^4+6x^2+6x}{(x^3+3)^2}.$$

Die Funktion

(18) $$y = (\sqrt[3]{x}+x)^2 + \frac{1}{1+\sqrt{x}}$$

ist eine Summe:

$$y = z + t.$$

Dabei ist:

$$z = (\sqrt[3]{x}+x)^2, \quad t = \frac{1}{1+\sqrt{x}}.$$

Kennen wir die Differentialquotienten von z und t, so kennen wir auch den von y, da nach der Summenregel

(19) $$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dt}{dx}$$

ist. Also sind z und t einzeln zu behandeln, und zwar nach der Kettenregel. Das Schema für z ist dieses:

$$\begin{array}{l|l}
z = u^2 & \dfrac{dz}{du} = 2u \\[2ex]
u = \sqrt[3]{x} + x = x^{\frac{1}{3}} + x & \dfrac{du}{dx} = \tfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} + 1 = \tfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 1 \\
\hline
 & \dfrac{dz}{dx} = 2u\left(\tfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 1\right).
\end{array}$$

Also kommt:

$$\frac{dz}{dx} = 2(\sqrt[3]{x}+x)\left(\tfrac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}^{2}} + 1\right).$$

Das Schema für t ist dieses:

$$\begin{array}{l|l}
t = \dfrac{1}{v} = v^{-1} & \dfrac{dt}{dv} = -v^{-2} = -\dfrac{1}{v^2} \\[2ex]
v = 1 + \sqrt{x} = 1 + x^{\frac{1}{2}} & \dfrac{dv}{dx} = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\
\hline
 & \dfrac{dt}{dx} = -\dfrac{1}{2v^2\sqrt{x}}.
\end{array}$$

Folglich kommt:

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{2(1+\sqrt{x})^2\sqrt{x}}.$$

Nachdem wir so $dz:dx$ und $dt:dx$ gefunden haben, ergibt sich nach (19):

$$\frac{dy}{dx} = 2(\sqrt[3]{x} + x)\left(\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1\right) - \frac{1}{2(1+\sqrt{x})^2\sqrt{x}}$$

als Differentialquotient der Funktion (18).

Auch wenn unter einem Wurzelzeichen noch ein Wurzelzeichen vorkommt, sind wir imstande, die Differentiation auszuführen. Ist z. B.

$$y = \sqrt[3]{1+\sqrt{x}},$$

so setzen wir

$$y = \sqrt[3]{z} = z^{\frac{1}{3}}, \qquad z = 1 + \sqrt{x} = 1 + x^{\frac{1}{2}}.$$

Hier ist

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{3} z^{-\frac{2}{3}}, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}},$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{6} z^{-\frac{2}{3}} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{6 z^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{2}}}.$$

Hierin ist noch $z = 1 + \sqrt{x}$ einzusetzen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{6(1+\sqrt{x})^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{6\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}^{\,2}\sqrt{x}}.$$

Wir sind jetzt überhaupt imstande, alle sogenannten **algebraischen Ausdrücke** in x zu differentiieren, nämlich diejenigen Funktionen von x, die mit Hilfe der Zeichen der Algebra, d. h. der Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzen und Wurzeln gebildet werden können und in denen nur konstante Exponenten vorkommen. Solche Ausdrücke nennt man auch **entwickelte algebraische Funktionen** von x.

Dagegen heißt y eine **unentwickelte algebraische Funktion** von x, wenn irgendeine **Gleichung** zwischen x und y vorgeschrieben wird, in der ebenfalls nur die Zeichen der Algebra vorkommen und konstante Exponenten auftreten, wie z. B.:

$$y^5 + xy^4 - x^2y + 2x^3 - 3 = 0.$$

Geben wir hier dem x irgendeinen bestimmten Wert, so liegt eine Gleichung fünften Grades für y vor, deren Lösungen man mittels der Fehlerregel (S. 118) bestimmen könnte. Aber wenn x anders gewählt wird, ändert sich auch die Gleichung für y, d. h. für verschiedene Werte x werden sich auf Grund der Gleichung im allgemeinen auch verschiedene Werte von y ergeben. Deshalb ist hier y eine gewisse Funktion von x, aber sie ist nicht in der gewohnten **entwickelten** Form $y = f(x)$ geschrieben; und es wird dem Leser auch gar nicht möglich sein, sie auf diese Form zu bringen. Diese

Funktion von x wie überhaupt die unentwickelten algebraischen Funktionen werden wir erst später differentiieren.

Ferner ist

$$y = x^x \cdot$$

zwar eine entwickelte Funktion, weil links y und rechts ein Ausdruck in x allein steht; aber rechts steht eine Potenz von x, deren Exponent keine Konstante ist. Ein grober Fehler wäre es, wollten wir x^x nach der Regel für x^n behandeln und also schließen, daß diese Funktion den Differentialquotienten $x \,.\, x^{x-1}$ oder x^x hätte. Denn diese Regel setzt voraus, daß der Exponent von x konstant sei. Die Funktion $y = x^x$ gehört zu der unübersehbaren Reihe derjenigen Funktionen, die man transzendent nennt. Auch diese Funktion werden wir erst später differentiieren.

Wir wollen weiter keine Beispiele nennen, denn sonst bekommt der Leser ein Angstgefühl wegen alles dessen, was er noch nicht weiß. Aber wir können tröstend hinzufügen, daß man bei den Anwendungen der Mathematik meistens nur noch einige wenige transzendente Funktionen braucht, die wir später behandeln werden und die eigentlich viel anziehender sind als die bisher betrachteten Funktionen.

Schließlich noch ein Bekenntnis: Wir gestehen ein, daß wir auf den letzten Seiten etwas leichtsinnig vorgegangen sind, und zwar sogar mit voller Absicht! In Satz 15 hatten wir nämlich diejenigen Beschränkungen angegeben, unter denen inverse Funktionen unzweideutig definiert sind, aber wir haben uns darum bei den vorhergehenden Differentiationsbeispielen gar nicht gekümmert. Das hätten wir tun müssen, weil jede Wurzel als zu einer Potenz invers definiert ist. Wir hätten so, wie es im 1. Beispiele, S. 154, geschah, auch überall vorgehen sollen. Aber uns kam es hier doch nur darauf an, daß man lernt, wie man algebraische Ausdrücke zu differentiieren hat. Das andere, nämlich die Berücksichtigung der in Satz 15 ausgesprochenen Beschränkungen, lernt man besser durch Beispiele, zu denen wir uns jetzt wenden.

2. Beispiel: Eine Wandlampe L beleuchte eine Stelle A des Fußbodens, die gerade vor der Aufhängestelle der Lampe und zwar in der Entfernung $AB = a$ Meter von der Wand ist (siehe Fig. 107). Der Einfluß der Höhe BL der Aufhängestelle auf die Helligkeit der Stelle A soll untersucht werden.

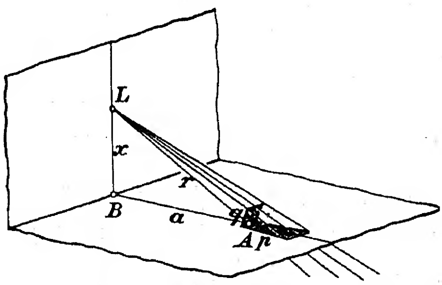


Fig. 107.

Die Helligkeit, die ein Scheibchen in 1 m Entfernung von der Lampe L bei senkrechtem Auffallen der Strahlen erfährt, sei als Einheit der Helligkeit bezeichnet. Nun gilt dasselbe Gesetz wie bei Wärmestrahlen (vgl. 2. Beispiel, S. 139). Wenn $LA = r$ Meter ist, wird das in A senkrecht zu LA gestellte Scheibchen, das wir uns als Quadrat von der Seitenlänge q denken können, die Helligkeit $1 : r^2$ erfahren. Dieselben Strahlen, die diese Scheibe treffen, werden, wenn die Scheibe fortgenommen wird, ein Stück des Fußbodens bei A treffen. Ist jenes Quadrat außerordentlich klein, so sind die Strahlen, die von L nach der Scheibe gehen, nahezu parallel, so daß der Fleck auf dem Fußboden nahezu ein Rechteck ist, dessen eine Seite gleich q und dessen andere Seite länger als q, etwa gleich p ist. Die Helligkeiten des Quadrats und des Rechtecks verhalten sich umgekehrt wie die Flächen beider, da dieselbe Lichtmenge, auf größeren Raum verteilt, weniger wirkt. Also ist

$$\frac{\text{Helligkeit des Rechtecks}}{\text{Helligkeit des Quadrats}} = \frac{q^2}{pq} = \frac{q}{p},$$

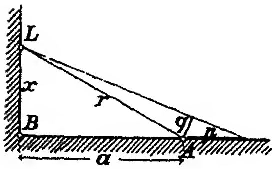


Fig. 108.

so daß die Helligkeit des Rechtecks gleich $q : pr^2$ ist. Streng gilt dies nur dann, wenn das Quadrat unendlich klein wird, d. h. wenn wir nur den Punkt A des Fußbodens ins Auge fassen. Das ist aber gerade unsere Aufgabe. In Fig. 108, wo der Querschnitt LBA der Fig. 107 dargestellt worden ist, sollen also die Lichtstrahlen unendlich nahe beieinander und daher parallel sein, so daß das Dreieck mit den Seiten q und p dem Dreieck LBA mit den Seiten $BL = x$ und $LA = r$ ähnlich wird. Daraus folgt:

$$\frac{q}{p} = \frac{x}{r}.$$

Alle diese Größen sind positiv. In $r = \sqrt{x^2 + a^2}$ nehmen wir also die Quadratwurzel positiv an. Die Helligkeit y der Stelle A des Fußbodens ist hiernach

$$y = \frac{x}{r^3} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}^{\,3}}.$$

Obgleich eine Quadratwurzel vorkommt, liegt eine einwertige Funktion y von x vor, da die Wurzel positiv ist. In unserer Aufgabe kommen nur Aufhängestellen L oberhalb des Fußbodens vor, d. h. negative Werte von x haben keine Bedeutung. Die zu untersuchende Funktion y hat demnach nur positive Werte. Da der Nenner für $x = 0$ den kleinsten Wert a^3 hat, der nicht gleich Null ist, wird y nie unendlich groß; vielmehr ist $y = 0$ für $x = 0$. Physikalisch ist es klar, daß y für $\lim x = \infty$ gleich Null wird. Das erkennt man rechnerisch, wenn man y so schreibt:

$$y = \frac{1}{x^2 \sqrt{1 + \frac{a^2}{x^2}}^{\,3}},$$

denn für $\lim x = \infty$ wird hier die Quadratwurzel gleich Eins. Da demnach y, wenn x von 0 bis $+\infty$ geht, von 0 durch nur positive Werte wieder nach 0 geht, muß es mindestens einen Wert von x geben, für den y am größten wird. Um ihn zu finden, berechnen wir wegen des Satzes 8, S. 106, den Differentialquotienten. Zunächst ist y der Bruch $u : v$ aus $u = x$ und $v = \sqrt{x^2 + a^2}^{\,3}$. Der Differentialquotient von u ist gleich Eins. Der von v ergibt sich nach der Kettenregel und Potenzregel:

$$v = \sqrt{w}^3 = w^{\frac{3}{2}} \qquad \frac{dv}{dw} = \frac{3}{2} w^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{w}$$

$$w = x^2 + a^2 \qquad \frac{dw}{dx} = 2x$$

$$\frac{dv}{dx} = 3x\sqrt{w} = 3x\sqrt{x^2+a^2}.$$

Also kommt nach der Bruchregel

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2+a^2}^3 \cdot 1 - x \cdot 3x\sqrt{x^2+a^3}}{\sqrt{x^2+a^2}^6}$$

oder, da sich die Wurzel einmal forthebt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{x^2+a^2}^5}.$$

Nach Satz 8, S. 106, kann also das Maximum nur für

$$x^2 = \frac{a^2}{2}, \qquad \text{d. h.} \qquad x = \frac{1}{2} a\sqrt{2}$$

eintreten. Da wir wissen, daß es ein Maximum gibt, brauchen wir das Vorzeichen des Differentialquotienten vor und nach der Stelle $x = \frac{1}{2} a \sqrt{2}$ nicht zu untersuchen; das Maximum muß eben für diese einzige Stelle stattfinden. Weil $x = BL$ ist, werden wir die Bildkurve der Funktion y in die Figur dadurch eintragen, daß wir in L senkrecht zur Wand die Ordinate $y = LP$ errichten. Wir brauchen also die Gerade BL nach oben hin als positive x-Achse, die Gerade BA nach A hin als positive y-Achse, so daß die Achsen eine ungewöhnliche Lage haben. Wenn wir die Strecke $a = 1$ setzen, also

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}^3}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{x^2+1}^5},$$

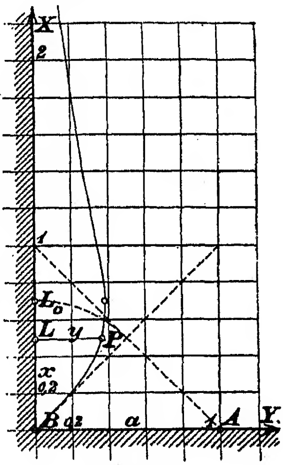


Fig. 109.

so bedeutet dies einfach, daß wir nicht das Meter, sondern die Strecke BA als Längeneinheit benutzen. Einige zusammengehörige Werte sind:

x	y	$\frac{dy}{dx}$
0	0	1
0,5	0,36	0,29
0,71	0,38	0 (Max.)
1,00	0,35	—0,18
2,00	0,18	—0,13

Hiernach kann man die **Helligkeitskurve** in Fig. 109 leicht zeichnen. Darin ist auch die y-Einheit gleich BA gewählt worden. Zu jeder Aufhängestelle L gibt das Lot

LP, gemessen mit der Einheit BA, die Helligkeit der Fußbodenstelle A an. Diejenige Stelle L_0, die A am hellsten beleuchtet, hat als Höhe die halbe Diagonale des über BA errichteten Quadrates.

3. **Beispiel:** Welche Form gibt man einem Trichter, damit er bei möglichst geringem Materialverbrauche möglichst großes Fassungsvermögen habe? Sehen wir vom Abflußrohr ab, so richtet sich der Materialverbrauch nach der Größe des Kegelmantels des Trichters. Unter allen geraden Kegeln (siehe Fig. 110) von gegebener

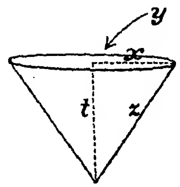


Fig. 110.

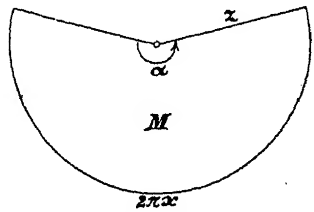


Fig. 111.

Fläche des Kegelmantels wird also derjenige gesucht, der den größten Inhalt hat. Die Mantelfläche betrage M qcm. Würden wir den Radius des Grundkreises und die Seitenlänge des Kegelmantels beliebig annehmen, so wäre die Mantelfläche nicht gerade gleich M. Also darf nur der Radius x beliebig angenommen werden; die Seitenlänge z muß sich daraus berechnen lassen. In der Tat, wickeln wir den Mantel auseinander, siehe Fig. 111, so geht ein Kreisausschnitt hervor, dessen Radius gleich z und dessen Bogen gleich dem Umfange $2\pi x$ des Grundkreises des Kegels ist. Seine Fläche ist die Hälfte des Produktes aus Bogen und Radius. Sie soll gleich M sein. Daher ist:

$$\tfrac{1}{2}\cdot 2\pi x\cdot z = M,$$

also:

$$z = \frac{M}{\pi x}. \tag{20}$$

Die Höhe t des Kegels ergibt sich aus Fig. 110:

$$t = \sqrt{z^2 - x^2} = \sqrt{\frac{M^2}{\pi^2 x^2} - x^2} = \frac{\sqrt{M^2 - \pi^2 x^4}}{\pi x}. \tag{21}$$

Das Volumen y des Trichters ist ein Drittel des Produktes der Kreisfläche πx^2 mit der Höhe t, daher:

$$y = \frac{1}{3}\pi x^2 \frac{\sqrt{M^2 - \pi^2 x^4}}{\pi x} = \frac{1}{3} x \sqrt{M^2 - \pi^2 x^4}, \tag{22}$$

ausgedrückt in ccm. Selbstverständlich ist x und die Wurzel positiv. Da y durch das Produkt von

$$u = \tfrac{1}{3}x \quad \text{und} \quad v = \sqrt{M^2 - \pi^2 x^4}$$

dargestellt wird, berechnen wir den Differentialquotienten $dy : dx$ nach der Produktregel. Der Differentialquotient von v wird nach der Kettenregel bestimmt:

$$v = \sqrt{w} = w^{\frac{1}{2}} \qquad \frac{dv}{dw} = \tfrac{1}{2} w^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{w}}$$

$$w = M^2 - \pi^2 x^4 \qquad \frac{dw}{dx} = -4\pi^2 x^3$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{2\pi^2 x^3}{\sqrt{w}} = -\frac{2\pi^2 x^3}{\sqrt{M^2 - \pi^2 x^4}}.$$

Als Differentialquotient von y ergibt sich demnach:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{M^2 - \pi^2 x^4} \cdot \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} x \cdot \frac{-2\pi^2 x^3}{\sqrt{M^2 - \pi^2 x^4}} = \frac{M^2 - 3\pi^2 x^4}{3\sqrt{M^2 - \pi^2 x^4}}.$$

Die Wurzel ist hier ebenso wie bei y positiv zu nehmen. Für $x = 0$ ist der Differentialquotient gleich $\frac{1}{3}M$, also positiv, d. h. zunächst wächst y mit wachsendem x. Dies dauert so lange, bis der Differentialquotient gleich Null wird, was eintritt, wenn

(23) $$3\pi^2 x^4 = M^2, \quad \text{d. h.} \quad x^4 = \frac{M^2}{3\pi^2}$$

wird. Das ist für nur **einen** positiven Wert von x der Fall. Wird x noch größer, so wird der Differentialquotient negativ, d. h. dann nimmt y wieder ab. Daher erreicht y für den Wert von x, der sich aus (23) ergibt, das Maximum. Dann ist die Höhe t des Trichters nach (21):

$$t = \frac{M}{\pi x}\sqrt{\tfrac{2}{3}},$$

also das Verhältnis

$$\frac{t}{x} = \frac{M}{\pi x^2}\sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

oder, da aus (23) folgt:

(24) $$\pi x^2 = \frac{M}{\sqrt{3}},$$

einfacher:

$$\frac{t}{x} = \sqrt{2}.$$

Man muß daher dem Trichter eine Form geben, bei der sich seine Höhe zum Radius wie $\sqrt{2}:1$ verhält, also wie die Diagonale eines Quadrates zu seiner Kante. In Fig. 110 ist diese Form gezeichnet. Wir wollen noch den Winkel α des Kreisausschnittes in Fig. 111 bestimmen. Sein Bogenmaß ist nach S. 6 gleich $2\pi x : z$, also wegen (20) gleich $2\pi^2 x^2 : M$, d. h. nach (24) gleich $2\pi : \sqrt{3}$ oder $\frac{2}{3}\pi\sqrt{3}$ oder rund 3,628. Nach Tafel I des Anhangs berechnen wir das zugehörige Gradmaß. Zunächst ist das Bogenmaß größer als π, nämlich um 3,628—3,142 = 0,486. Für den Rest 0,486 ergeben sich nach der Tafel fast 28°. Da zu π selbst 180° gehören, ergibt sich das Gradmaß des Winkels gleich rund 208°. Dieser Wert ist in Fig. 111 angenommen worden.

4. **Beispiel:** Zu einem ganz anderen Ergebnisse führt die Aufgabe: Aus einer Kreisscheibe soll durch Aufschneiden längs eines Radius und Zusammendrehen ein **Trichter** von möglichst großem Volumen hergestellt werden. Der in Zentimetern gegebene Radius der Scheibe sei gleich a. Nach dem Zusammendrehen sei der Radius

des Grundkreises des Kegels gleich x cm. Die Seitenlinie des Kegels ist a, also die Kegelhöhe $t = \sqrt{a^2 - x^2}$, daher der Inhalt:

$$y = \tfrac{1}{3}\pi x^2 \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Nach der Produktregel und Kettenregel kommt, wie man berechnen möge:

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{3}\pi x\,\frac{2a^2 - 3x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Man weise nach, daß y das Maximum für $x = a \cdot \sqrt{\tfrac{2}{3}}$ erreicht. Der Grundkreis des Kegels hat dann die Länge $2\pi a \sqrt{\tfrac{2}{3}}$. Wir haben demnach denjenigen Ausschnitt der Scheibe vom Radius a zu benutzen, dessen Bogen gleich $2\pi a \sqrt{\tfrac{2}{3}}$ ist. Siehe Fig. 112. Der zugehörige Zentriwinkel β hat nach S. 6 das Bogenmaß $2\pi\sqrt{\tfrac{2}{3}}$ oder rund 5,130. Er über-

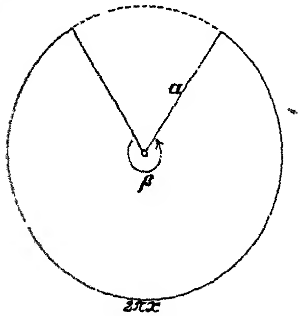


Fig. 112.

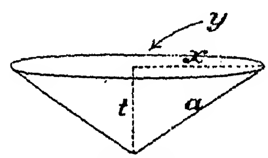


Fig. 113.

trifft also im Bogenmaße π um 1,988. Hierzu gehören nach Tafel I des Anhangs fast 114°, so daß β rund 294° beträgt. Dies ist in Fig. 112 angenommen worden. In Fig. 113 ist die Höhe $t = a : \sqrt{3}$, also das Verhältnis:

$$\frac{t}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Der Trichter hat daher eine Form, bei der sich die Höhe zum Radius des Grundkreises wie die Seite eines Quadrates zur Diagonale verhält; dies Ergebnis ist gerade das Umgekehrte des Ergebnisses im vorigen Beispiel.

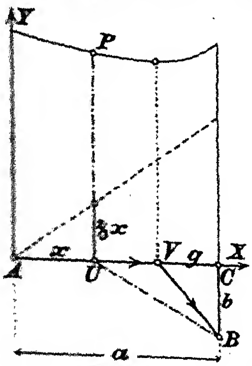


Fig. 114.

5. Beispiel: Jemand geht von A auf der Straße g, siehe Fig. 114, entlang und schwenkt dann aufs Feld ab, um B zu erreichen. Während er auf der Straße in der Sekunde $1\tfrac{1}{2}$ m zurücklegt, kommt er auf dem Feld in der Sekunde nur 1 m vorwärts. Je nach der Stelle U, wo er abschwenkt, wird er verschieden lange Zeit gebrauchen. Wie beeinflußt die Wahl der Stelle U die für den ganzen Weg nötige Zeit? Gegeben ist die gegenseitige Lage von A, g und B. Wir legen sie dadurch fest, daß wir von B das Lot BC auf g fällen; AC und CB seien a und b m lang. Die Abschwenkungsstelle U kann beliebig gewählt werden. Also ist die Länge $AU = x$ m die unabhängige Ver-

änderliche. Der Weg AU wird in $x : 1\frac{1}{2} = \frac{2}{3}x$ Sekunden zurücklegt. Der Weg UB hat in Metern die Länge $\sqrt{(a-x)^2 + b^2}$. Ebensogroß ist in Sekunden die Zeit, die hierfür gebraucht wird. Insgesamt werden also

$$y = \tfrac{2}{3}\, x + \sqrt{(a-x)^2 + b^2}$$

Sekunden gebraucht, wobei die Quadratwurzel positiv zu nehmen ist. Die Bildkurve dieser Funktion können wir Punkt für Punkt leicht zeichnen, wenn wir A als Anfangspunkt und g als x-Achse positiv im Sinn nach C benutzen, also die y-Achse in A senkrecht auf g errichten und den Wert y, der zu $AU = x$ gehört, in U auf g senkrecht auftragen, wodurch wir zu einem Punkte P der Bildkurve kommen. Das Lot UP oder y ist nämlich gleich $\frac{2}{3}$ von AU, vermehrt um UB, wenn wir auf der y-Achse dieselbe Einheit wie auf der x-Achse annehmen. Diese Einheit bedeutet aber für die y-Achse die Sekunde. Nur die Werte zwischen Null und a kommen für x in Betracht. Der Differentialquotient von y läßt sich sofort hinschreiben, wenn wir den der Quadratwurzel kennen. Dieser ergibt sich nach der Kettenregel. Setzen wir nämlich

$$w = \sqrt{(a-x)^2 + b^2},$$

so ist:

$$\begin{array}{c|l}
w = \sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}} & \dfrac{dw}{dt} = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} \\[2ex]
t = z^2 + b^2 & \dfrac{dt}{dz} = 2z \\[2ex]
z = a - x & \dfrac{dz}{dx} = -1 \\[2ex]
\hline
 & \dfrac{dw}{dx} = -\dfrac{z}{\sqrt{t}} = -\dfrac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}}
\end{array}$$

Demnach kommt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} - \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}},$$

und wie bei y ist die Quadratwurzel positiv zu nehmen. Für $x = 0$ hat der Differentialquotient den Wert

$$\frac{2}{3} - \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

und dieser Wert ist bei den in Fig. 114 für a und b gemachten Annahmen negativ. Positiv wäre er nämlich nur dann, wenn $a = AC$ weniger als $\frac{2}{3}$ von AB oder $\sqrt{a^2 + b^2}$ betrüge, was in Fig. 114 nicht der Fall ist. Die Bildkurve wird also zunächst fallen (nach Satz 7, S. 104), bis

$$\frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}} = \frac{2}{3}$$

wird, d. h. bis UC gerade $\frac{2}{3}$ von UB beträgt. Dies tritt ein, wenn U die Lage des Punktes V hat. Wird x noch größer, so wird der Differentialquotient positiv, die Kurve steigt. Daher kommt der Mann in B am schnellsten an, wenn er in V ab-

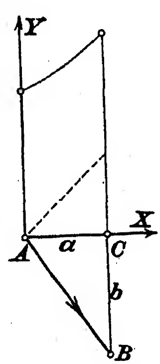


Fig. 115.

schwenkt. Ist dagegen a kleiner als $\frac{2}{3}$ von AB, so steigt die Kurve beständig, siehe Fig. 115. Alsdann tritt nur für $x = 0$ ein Grenzminimum ein (vgl. S. 106). In diesem Fall ist es das Beste, sogleich von A querfeldein den Weg nach B einzuschlagen.

6. Beispiel: Von A nach B soll ein Hauptrohr einer Leitung gelegt werden, von dem unterwegs ein Rohr nach C abgezweigt werden soll. Siehe Fig. 116. Das Rohrstück von A aus sei am stärksten; von ihm koste das Meter α Mark. Da das Zweigrohr nach C die Leitung entlastet, darf der Rest des Rohres bis B schwächer sein. Von ihm koste das Meter β Mark, vom Zweigrohr γ Mark. β und γ seien beide kleiner als α. Wo wird man am besten die Abzweigstelle U wählen? Selbstverständlich nur irgendwo auf der Strecke von A bis zum Fußpunkte D des Lotes von C auf AB. Das Stück DB wird also unter allen Umständen zum Preise von β Mark fürs Meter zu legen sein. Folglich muß man U so wählen, daß die Gesamtkosten der Stücke AU, UD und UC möglichst gering werden. AD sei a m und DC sei c m lang. Ist die Stelle U von D um x m entfernt, so sind $a - x$, x und $\sqrt{x^2 + c^2}$ die Rohrlängen, daher die Kosten in Mark:

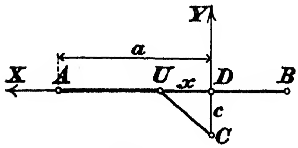


Fig. 116.

$$y = \alpha(a - x) + \beta x + \gamma \sqrt{x^2 + c^2} \tag{25}$$

Die Quadratwurzel ist positiv. Um die Kostenkurve für die verschiedenen Annahmen von U zu zeichnen, hat man in U jedesmal ein Lot gleich dem zugehörigen y zu errichten. Wir brauchen sie jedoch gar nicht darzustellen. Die Steigung der Kostenkurve ist der Differentialquotient:

$$\frac{dy}{dx} = \beta - \alpha + \gamma \frac{x}{\sqrt{x^2 + c^2}}.$$

Da $\beta < \alpha$ sein soll, ist die Steigung für $x = 0$ negativ, d. h. zuerst fällt die Kurve. Zu beachten ist dabei, daß die x-Achse in Fig. 116 nach links hin positiv ist; wir sprechen also hier vom Fallen und Steigen im Sinn des Fortschrittes nach links hin. Wächst x von Null an, so wächst der Bruch

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + c^2}} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{c}{x}\right)^2}},$$

daher auch die Steigung. Weil sie zuerst negativ war, kann sie also irgendwo gleich Null und nachher positiv werden. Das Minimum der Kurve müßte an der Stelle sein, wo

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + c^2}} = \frac{\alpha - \beta}{\gamma}, \quad \text{also} \quad x = c\frac{\alpha - \beta}{\sqrt{\gamma^2 - (\alpha - \beta)^2}} \tag{26}$$

ist. Aber dieser Wert hat für unsere Aufgabe nur dann eine Bedeutung, wenn er reell ist und zwischen 0 und a liegt. Wenn er nicht reell ist (d. h. wenn $\gamma < \alpha - \beta$, also $\beta + \gamma < \alpha$ ist) und nicht zwischen 0 und a liegt, fällt die Kostenkurve beständig, so daß für $x = a$ ein Grenzminimum (vgl. S. 106) eintritt. In diesem Fall wird man überhaupt kein Rohr von der stärksten Sorte, vielmehr von A aus die beiden engeren Rohre nach B und C geradlinig legen. Im anderen Fall dagegen ergibt sich aus (26) die Stelle zwischen D und A, von wo aus man das Rohr nach C abzweigen wird.

7. Beispiel: In einer schmalen Straße von a m Breite soll eine Stange von b m Länge in ein Tor hineingebracht werden, indem man sie zuerst an den jenseitigen Häusern anlehnt und dann am unteren Ende ins Tor hineinzieht. Wie hoch muß das Tor sein, damit sich dies ermöglichen läßt? Siehe Fig. 117, die den Querschnitt der Straße und des Torweges (rechts) darstellt. Wir suchen die geringste Torhöhe, also anscheinend ein Minimum, in Wahrheit jedoch ein Maximum, nämlich das Maximum von allen Strecken BV, die die Stange in ihren verschiedenen Lagen auf der Frontlinie des Hauses bestimmt. In einer beliebigen Lage der Stange sei die Höhe ihres Endes U über dem Pflaster gleich x m. Aus der Proportion $BV : AU = BW : AW$ berechnet man leicht die Länge

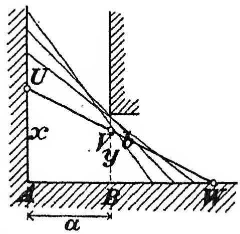


Fig. 117.

$$y = x\,\frac{\sqrt{b^2 - x^2} - a}{\sqrt{b^2 - x^2}}$$

von BV, gemessen in Metern. Dabei ist die Wurzel positiv. Wir fragen also nach dem Maximum der Funktion y für das Intervall von $x = 0$ bis $x = b$. Die Aufgabe zeigt, daß es sicher eines gibt, wenn $b > a$ ist. Da man schreiben kann:

$$y = x - a\,\frac{x}{\sqrt{b^2 - x^2}},$$

ergibt sich:

$$\frac{dy}{dx} = 1 - a\,\frac{b^2}{\sqrt{b^2 - x^2}^3}.$$

Nach Satz 8, S. 106, muß mithin für das gesuchte Maximum von y

$$x = b\sqrt{1 - \sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}}$$

sein. Hierzu gehört als geringste zulässige Torhöhe:

$$y = b\sqrt{1 - \sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}}^{\,3}.$$

Fig. 117 ist für $a = 2$, $b = 5$ entworfen. Dann ist die Torhöhe 1,55 m.

8. Beispiel: Der Querschnitt eines Kanals sei ein gleichschenkliges Trapez, siehe Fig. 118. Die Fläche des Querschnittes betrage F qm, und seine Höhe sei gleich h m. Wie erreicht man, daß die Summe der benetzten Seiten UP, PQ, QV möglichst klein wird? Um irgendein solches Trapez zu zeichnen, wird man zuerst ein Rechteck $ABCD$ vom Inhalte F mit der Höhe h herstellen und dann seine Seiten AC und BD durch gleich geneigte Strecken UP und VQ durch die Seitenmitten ersetzen, wobei UA beliebig lang, gleich x m, gewählt werden kann. Dann ist die Summe der Seitenlängen UP, PQ, QV in Metern:

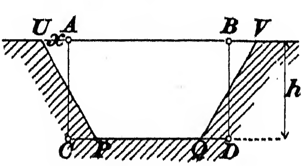


Fig. 118.

$$y = 2\sqrt{4x^2 + h^2} + \frac{F}{h} - 2x,$$

wobei die Wurzel positiv ist. Man berechne, daß die Funktion y für $x = \frac{1}{6} h \sqrt{3}$ ihr Minimum erreicht, und weise nach, daß dann die Seitenwände unter 60° geneigt sind.

9. Beispiel: Wie ist die Lösung derselben Aufgabe, wenn sich die Kosten für 1 qm Seitenfläche zu denen für 1 qm Grundfläche wie $\alpha : \beta$ verhalten und man möglichst billig bauen will?

10. Beispiel: Man soll einen Trichter von gegebenem Volumen herstellen und dabei möglichst sparsam sein, d. h. der Trichter soll so gewählt werden, daß seine Mantelfläche möglichst gering ist. Dies ist eine andere Aufgabe als die im 3. Beispiel. Wie dort sei der zunächst beliebige Radius des Grundkreises gleich x cm gesetzt. Das gegebene Volumen betrage V ccm. Die Höhe t des Kegels ist dann gleich $3V : \pi x^2$. Man berechne nun die Seitenlänge $z = \sqrt{x^2 + t^2}$ und schließlich die Mantelfläche als Ausschnitt eines Kreises vom Radius z und von der Randlänge $2x$. Diese Mantelfläche wird sich als eine Funktion y von x darstellen. Gesucht wird ihr Minimum. Man zeige, daß sich dieselbe Trichterform wie im 3. Beispiel ergibt.

Viertes Kapitel.

Einiges aus der analytischen Geometrie.

---

§ 1. Die Gerade.

Einen Hauptabschnitt der Differentialrechnung haben wir hinter uns; das Nächste wäre nun die Auseinandersetzung der Grundbegriffe der Integralrechnung (vgl. S. 2). Ehe wir daran gehen, schalten wir hier als Zwischenspiel einiges aus der analytischen Geometrie ein. Mit Hilfe der Koordinaten kann man geometrische Untersuchungen durch Rechnungen ersetzen; wir wollen zeigen, wie dies geschieht. Daß man Aufgaben der Geometrie rechnerisch lösen kann (z. B. die Bestimmung des Radius des einem Dreieck eingeschriebenen Kreises und dergleichen), wissen allerdings alle unsere Leser. Aber das Wesen der analytischen Geometrie ist doch noch etwas anders. Das wird man bald sehen; wir erwähnen vorweg, daß man dies Neue im wesentlichen Descartes (latinisiert Cartesius, 1596—1650) verdankt. Wie Leibniz (vgl. S. 70) ist auch Descartes der Allgemeinheit mehr als Philosoph, nicht als Mathematiker bekannt.

In diesem Kapitel handelt es sich um Aufgaben aus der Geometrie der Ebene. Wir nehmen wie in § 4 des 1. Kap. ein rechtwinkliges Achsenkreuz an, bestimmen also einen Punkt P durch seine Koordinaten x und y. Da man nun bei den Längenmessungen in der Ebene eine Längeneinheit benutzt, werden wir hier sowohl die Abszissen x als auch die Ordinaten y mit dieser Einheit messen, d. h.: wir wählen hier grundsätzlich die x-Einheit gerade so groß wie die y-Einheit, und dieselbe Einheit soll zum Messen beliebiger Strecken in der Ebene dienen. Früher, als wir unter x und y Bilder verschiedenartiger Größen, z. B. von Zeiten und Temperaturen, verstanden, durften wir dagegen ihre Einheiten nach eigenem Ermessen verschieden lang annehmen (vgl. S. 24). Übrigens, obgleich wir hier die x- und y-Einheit gleich groß wählen, gelten einige unserer Ergebnisse auch bei verschiedener Wahl der Einheiten; darauf werden wir in Anmerkungen hinweisen.

Wenn zwei Punkte P_1 und P_2 durch ihre Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 gegeben sind, fragt es sich zunächst, wie man ihre Entfernung voneinander berechnen kann. In Fig. 119 ist der Schnittpunkt der Parallelen zur y-Achse durch P_1 mit der Parallelen zur x-Achse durch P_2 mit S bezeichnet. Auf das rechtwinklige Dreieck $P_1 S P_2$ kann der Satz von Pythagoras angewandt werden:

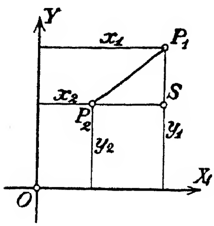


Fig. 119.

$$P_1 P_2^2 = P_1 S^2 + P_2 S^2 .$$

Die Strecke $P_2 S$ ist der Unterschied der Abszissen und die Strecke $P_1 S$ der Unterschied der Ordinaten von P_1 und P_2. Da in der Formel die Quadrate auftreten, kommt es auf die Vorzeichen dieser Unterschiede nicht an. Deshalb ist $P_2 S^2$ gleich $(x_1 - x_2)^2$ und $P_1 S$ gleich $(y_1 - y_2)^2$. Mithin:

Satz 1: Ist die x-Einheit der y-Einheit gleich, so ist das Quadrat der mit derselben Einheit gemessenen Entfernung zwischen den Punkten $(x_1 ; y_1)$ und $(x_2 ; y_2)$ gleich

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Dies ist die Form, in der man in der analytischen Geometrie den Satz des Pythagoras benutzt.

Nach Satz 4, S. 31, ist das Bild einer ganzen linearen Funktion

(1) $$y = cx + k$$

eine Gerade mit der Steigung c. Nehmen wir nun irgendeine in x und y lineare Gleichung

(2) $$Ax + By + C = 0$$

an, in der A, B, C Konstanten sind und B nicht gleich Null sein soll, so folgt daraus durch Auflösung nach y:

(3) $$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

also eine Gleichung von der Form (1). Schreiben wir daher vor, daß x und y zwar veränderlich sein, aber stets zusammen die Gleichung (2) befriedigen sollen, so bedeutet dies, daß alle zugehörigen Punkte $(x ; y)$ auf einer Geraden liegen. Die Vergleichung von (3) mit (1) lehrt, daß diese Gerade die Steigung

(4) $$c = -\frac{A}{B}$$

hat. Wir setzten $B \neq 0$ voraus. Ist $B = 0$, also (2) die Gleichung

(5) $$Ax + C = 0,$$

und ist $A \neq 0$, so folgt $x = -C : A$, während die Gleichung (5) der Ordinate y gar keine Bedingung auferlegt. Dies besagt: Alle Punkte $(x\,;y)$, deren Koordinaten die Gleichung (5) befriedigen, sind diejenigen, denen dieselbe Abszisse $x = -C : A$ zukommt. Sie liegen auf einer zur y-Achse parallelen Geraden. Eine zur y-Achse parallele Gerade kann man auch als eine Gerade mit unendlich großer Steigung bezeichnen. Damit steht im Einklange, daß die Steigung c nach (4) unendlich groß wird, wenn $B = 0$ gewählt wird. Wenn wir schließlich in der vorgelegten Gleichung (2) sowohl $A = 0$ als auch $B = 0$ annehmen, ist sie sinnlos, es sei denn, daß wir auch $C = 0$ annehmen. Dann aber liegt gar keine Gleichung mehr vor.

Anstatt zu sagen, wir betrachten alle Punkte $(x\,;y)$, deren Koordinaten x und y eine vorgelegte lineare Gleichung (2) befriedigen, können wir auch sagen, ein Punkt $(x\,;y)$ sei beweglich, aber der Vorschrift (2) unterworfen. Demnach:

Satz 2: Ein beweglicher Punkt mit den Koordinaten x und y beschreibt dann und nur dann eine gerade Linie in der Ebene, wenn seine Koordinaten einer in x und y linearen Bedingung

$$Ax + By + C = 0$$

mit konstanten Koeffizienten A, B, C unterworfen werden. Die Gerade hat die Steigung $-A : B$ und ist insbesondere im Falle $B = 0$ parallel zur y-Achse.[1]

1. Beispiel: Welcher linearen Gleichung genügen die Koordinaten x, y aller Punkte, die auf der Geraden durch die beiden Punkte $(3\,;2)$ und $(-2\,;1)$ liegen? In Fig. 120 sind diese Punkte mit P_1 und P_2 bezeichnet. Man muß die Koeffizienten A, B, C in (2) so wählen, daß diese Gleichung insbesondere für $x = 3$, $y = 2$ und für $x = -2$, $y = 1$ gilt, d. h. so, daß

$$3A + 2B + C = 0, \quad -2A + B + C = 0$$

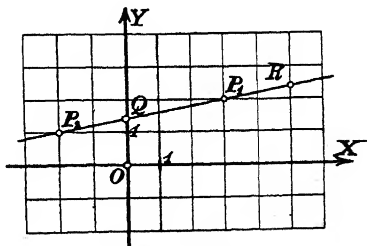


Fig. 120.

ist. Das sind zwei Bedingungen für die drei Konstanten A, B, C. Obgleich es nur zwei sind, reichen sie doch aus. Wenn man nämlich die zweite Bedingung von der ersten abzieht, kommt $5A + B = 0$, d. h. es muß $B = -5A$ sein. Wird dies in die erste Bedingung eingesetzt, so kommt $-7A + C = 0$, d. h. es muß $C = 7A$ sein. Die gesuchte Gleichung (2) ist daher:

$$Ax - 5Ay + 7A = 0,$$

[1] Dieser Satz gilt auch dann, wenn die x-Einheit und die y-Einheit verschieden groß sind.

und da hier A überall als Faktor vorkommt, kann dieser Faktor gestrichen werden. Die gesuchte Gleichung ist also:

$$x - 5y + 7 = 0.$$

Wir machen noch die Proben, um zu sehen, ob wir uns nicht verrechnet haben: Für $x = 3$, $y = 2$ ist die Gleichung richtig, auch für $x = -2$, $y = 1$, d. h. die gegebenen Punkte P_1 und P_2 liegen in der Tat auf der Geraden. Aus der gefundenen Gleichung lassen sich die Koordinaten beliebiger Punkte der Geraden P_1P_2 berechnen. Wählen wir z. B. $x = 0$, so gibt sie $y = 1\frac{2}{5}$; dazu gehört der Punkt Q der y-Achse. Wählen wir $x = 5$, so gibt sie $y = 2\frac{2}{5}$; dazu gehört der Punkt R.

Wir betonten in diesem Beispiele, daß sich zur Bestimmung der drei Koeffizienten A, B, C nur zwei Gleichungen ergeben. Daß bloß zwei Gleichungen ausreichen, liegt rechnerisch einfach daran, daß es ja in der Gleichung (2) nur auf die beiden Verhältnisse $B : A$ und $C : A$ ankommt, denn man kann die Gleichung z. B. mit A dividieren:

$$x + \frac{B}{A} y + \frac{C}{A} = 0\,.$$

Geometrisch steht es damit im Einklange, daß eine Gerade durch zwei Punkte P_1 und P_2 vollständig bestimmt wird.

Aus Satz 2 folgt: Statt die geometrische Forderung zu stellen, daß ein beweglicher Punkt eine bestimmte Gerade beschreiben soll, kann man die rechnerische Forderung stellen, daß die Koordinaten x, y des beweglichen Punktes eine lineare Gleichung

$$Ax + By + C = 0$$

befriedigen sollen. Dadurch wird etwas aus der Sprache der Geometrie in die Sprache der Rechnung oder Analysis übersetzt. Man nennt deshalb die lineare Gleichung geradezu die Gleichung der Geraden.

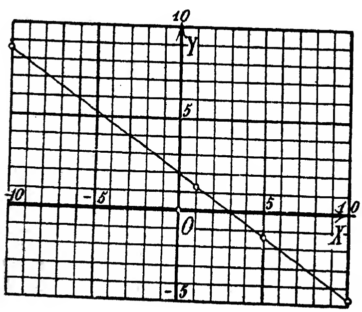


Fig. 121.

2. Beispiel: Die Gleichung einer Geraden sei

$$2x + 3y - 6 = 0.$$

Man zeichne die Gerade. Zu diesem Zwecke genügt es, zwei Punkte der Geraden zu bestimmen. Man gibt also dem x irgend zwei Werte, etwa $x = 1$ und $x = 5$, und berechnet das zugehörige y. Für $x = 1$ kommt $3y - 4 = 0$ oder $y = 1\frac{1}{3}$, für $x = 5$ kommt $3y + 4 = 0$ oder $y = -1\frac{1}{3}$. Die Gerade geht also durch die Punkte $(1; 1\frac{1}{3})$ und $(5; -1\frac{1}{3})$ siehe Fig. 121. Übrigens gilt hier dasselbe wie auf S. 32: Man tut gut, möglichst weit voneinander entfernte Punkte zu bestimmen, weil die Zeichnung dann genauer wird. Man setze also z. B. $x = -10$ und $x = +10$ und bestimme die zugehörigen Punkte!

3. Beispiel: Gesucht wird die Gleichung der Geraden, die durch den Punkt $(-5;-15)$ geht und die Steigung 2 hat. Die Gerade mit der Gleichung (2) geht durch den gegebenen Punkt, wenn

$$-5A-15B+C=0$$

ist, und sie hat nach Satz 2 die Steigung 2, wenn $-A:B=2$, also $A=-2B$ ist. Einsetzen von $A=-2B$ in die erste Bedingung gibt $-5B+C=0$ oder $C=5B$. Mithin ist die gesuchte Gleichung[1]:

$$-2Bx+By+5B=0$$

oder einfacher

$$-2x+y+5=0.$$

Die Gerade mit der Gleichung

$$Ax+By+C=0 \tag{6}$$

geht durch den Anfangspunkt, wenn die Gleichung durch $x=0, y=0$ befriedigt wird, also wenn das sogenannte absolute Glied C der Gleichung gleich Null ist.

Ist dies nicht der Fall, ist also $C \neq 0$, so schneidet die Gerade die x-Achse und die y-Achse in Punkten U und V, von denen U eine von Null verschiedene Abszisse a und V eine von Null verschiedene Ordinate b hat. Man kann a und b leicht berechnen. Denn U muß der Punkt $(a;0)$ und V der Punkt $(0;b)$ sein. Beide Punkte müssen auf der Geraden liegen, d. h. nach (6) muß $Aa+C=0$ und $Bb+C=0$ sein, so daß $a=-C:A$ und $b=-C:B$ ist. Sind die Punkte U und V auf den Achsen gegeben, d. h. sind a und b gegeben, so folgt $A=-C:a$ und $B=-C:b$, so daß aus (6) wird:

$$-C\frac{x}{a}-C\frac{y}{b}+C=0.$$

Der Faktor C kann gestrichen und die Gleichung so geschrieben werden:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{7}$$

Satz 3: Diejenige Gerade, die auf den Achsen die von Null verschiedenen Strecken a und b abschneidet, die positiv oder negativ zu messen sind, je nachdem die Schnittpunkte auf den positiven oder negativen Achsenhälften liegen, hat die Gleichung[2]

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

[1] Zur Veranschaulichung siehe Fig. 20, S. 32. Allerdings sind dort die Einheiten der Achsen verschieden gewählt, aber nach der Anmerkung zu Satz 2 macht dies nichts aus.

[2] Dieser Satz gilt auch, wenn die Einheiten von x und y verschieden sind. Dabei ist a mit der x-Einheit und b mit der y-Einheit zu messen.

Man nennt a und b die **Achsenabschnitte** der Geraden.

4. Beispiel: Die Gerade, die auf der x-Achse die Strecke -2 und auf der y-Achse die Strecke 5 abschneidet, siehe Fig. 122, hat die Gleichung:

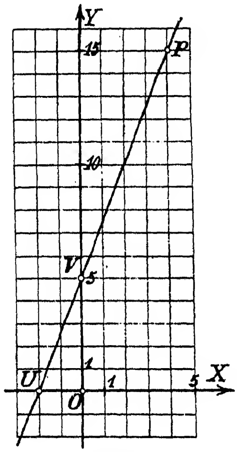


Fig. 122.

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{5} = 1,$$

die man von den Nennern befreit, indem man sie mit -10 multipliziert:

$$5x - 2y + 10 = 0.$$

Wählt man z. B. $x = 4$, so kommt $2y = 30$ oder $y = 15$; in der Tat liegt der Punkt $(4; 15)$ auf der Geraden, siehe P.

Nach Satz 1 hat die Gerade mit der Gleichung (6) die Steigung $-A : B$. Wenn nun **zwei Geraden** g_1 und g_2 durch ihre Gleichungen gegeben sind, also zwei in x und y lineare Gleichungen

$$(8)\quad \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases}$$

mit konstanten Koeffizienten A_1, B_1, C_1 und A_2, B_2, C_2 vorliegen, sind die Steigungen $-A_1 : B_1$ und $-A_2 : B_2$. Die Geraden sind **parallel**, wenn beide Steigungen übereinstimmen, d. h. wenn

$$(9)\qquad -\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2} \quad \text{oder also} \quad A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0$$

ist.

5. Beispiel: Die Geraden mit den Gleichungen

$$x - 5y - 2 = 0 \quad \text{und} \quad 2x - 10y - 1 = 0$$

sind parallel, siehe Fig. 123. Man berechne die Abschnitte, die sie auf den Achsen bestimmen, bei der ersten Geraden $a = 2$, $b = -\frac{2}{5}$, bei der zweiten $a = \frac{1}{2}$ und $b = -\frac{1}{10}$.

Wir wollen jetzt feststellen, unter welcher Bedingung die beiden

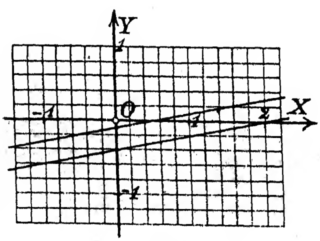


Fig. 123.

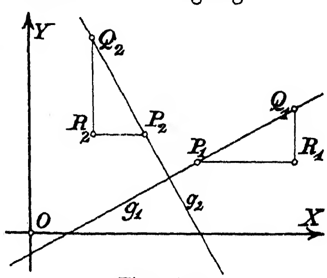


Fig. 124.

durch die Gleichungen (8) bestimmten Geraden zueinander senkrecht sind. Zu diesem Zwecke betrachten wir in Fig. 124 zwei zueinander senkrechte Geraden g_1 und g_2 und tragen auf beiden gleich lange Strecken $P_1 Q_1$ und $P_2 Q_2$ irgendwo auf. Dann ziehen wir durch P_1 und P_2 die Parallelen zur x-Achse und durch Q_1 und Q_2 die Parallelen zur y-Achse. Dadurch gehen zwei rechtwinklige Dreiecke $P_1 Q_1 R_1$ und $P_2 Q_2 R_2$ hervor. Nicht nur ihre Hypotenusen sind zueinander senkrecht, sondern auch ihre Kathetenpaare. Die Dreiecke sind daher einander ähnlich. Da ihre Hypotenusen gleich lang sind, handelt es sich sogar um kongruente Dreiecke. Nun sind die Steigungen von g_1 und g_2 die Verhältnisse

$$c_1 = \frac{R_1 Q_1}{P_1 R_1} \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{R_2 Q_2}{P_2 R_2}.$$

Da aber $R_2 Q_2 = P_1 R_1$ (auch dem Vorzeichen nach), dagegen $P_2 R_2 = -R_1 Q_1$ ist, folgt:

$$c_2 = -\frac{P_1 R_1}{R_1 Q_1} = -\frac{1}{c_1}$$

oder also:

$$c_1 c_2 = -1.$$

Satz 4: Zwei Geraden sind zueinander senkrecht, falls das Produkt ihrer Steigungen gleich -1 ist, vorausgesetzt, daß die x-Einheit und y-Einheit gleich groß sind.[1]

Da die Steigungen c_1 und c_2 der Geraden mit den Gleichungen (8) gleich $-A_1 : B_1$ und $-A_2 : B_2$ sind, ist mithin die Bedingung ihres Senkrechtseins:

$$-\frac{A_1}{B_1} \cdot -\frac{A_2}{B_2} = -1$$

oder:

(10) $$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

Satz 5: Die Geraden mit den Gleichungen

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \quad \text{und} \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

sind parallel, wenn

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0$$

ist, dagegen senkrecht zueinander, wenn

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$$

ist.

[1] Wären die Einheiten nicht gleich groß, so dürfte man nicht $R_2 Q_2 = P_1 R_1$ setzen, denn dann müßte $R_2 Q_2$ mit der y-Einheit und $P_1 R_1$ mit der davon verschiedenen x-Einheit gemessen werden. Der Satz gilt also wirklich nur, wenn die Einheiten gleich groß sind.

Das Erste gilt stets, das Zweite nur dann, wenn die x-Einheit der y-Einheit gleich ist.

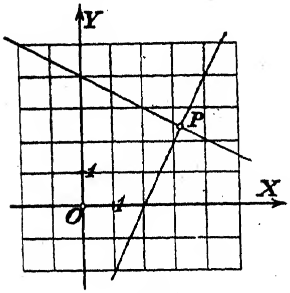


Fig. 125.

6. Beispiel: Die Geraden mit den Gleichungen

$$x + 2y - 8 = 0, \qquad 2x - y - 4 = 0$$

sind zueinander senkrecht, siehe Fig. 125. Man bestimme ihren Schnittpunkt P. Seine Koordinaten x und y müssen beide Gleichungen befriedigen. Daraus findet man leicht $x = 3\frac{1}{5}$, $y = 2\frac{2}{5}$.

7. Beispiel: Ein Punkt P bewege sich so, daß stets das Quadrat seines Abstandes von einem festen Punkt A um eine gegebene Größe das Quadrat seines Abstandes von einem anderen festen Punkte B übertreffe. Der Punkt A möge die gegebenen Koordinaten a_1, a_2, der Punkt B die gegebenen Koordinaten b_1, b_2 haben. Die Koordinaten des beweglichen Punktes P seien x, y. Nach Satz 1 lassen sich die Quadrate von PA und PB ausdrücken. Ihre Differenz soll eine gegebene Größe, daher eine positive Größe sein, die wir also mit c^2 bezeichnen dürfen. Dies liefert die Bedingung:

$$[(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2] - [(x - b_1)^2 + (y - b_2)^2] = c^2.$$

Rechnet man die Quadrate aus und löst man die Klammern auf, so heben sich die Glieder x^2 und y^2 fort, und es bleibt nach gehöriger Ordnung

$$2(b_1 - a_1)x + 2(b_2 - a_2)y + a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2 - c^2 = 0.$$

Dies aber ist eine in x und y lineare Gleichung, d. h. der Ort des beweglichen Punktes P ist eine Gerade. Die Steigung dieser Geraden ist nach Satz 2 gleich $-(b_1 - a_1) : (b_2 - a_2)$. Man erkennt leicht, daß die Gerade, die die beiden festen Punkte A und B verbindet, die Steigung $(b_2 - a_2) : (b_1 - a_1)$ hat. Deshalb ergibt sich nach Satz 4, daß die Gerade, die P beschreibt, zur Geraden AB senkrecht ist.

§ 2. Der Kreis.

Wir betrachten jetzt einen Kreis, siehe Fig. 126. Sein Mittelpunkt M habe die Koordinaten a und b. Sein Radius sei gleich r. Die Koordinaten a und b des Mittelpunktes können auch negativ sein. In Fig. 126 sind sie allerdings positiv gewählt worden. Welche Bedingung müssen die Koordinaten x und y eines Punktes P erfüllen, damit der Punkt auf dem Kreise liege? Man hat auszudrücken, daß die Strecke MP gleich r oder also ihr Quadrat gleich r^2 sein soll. Nach Satz 1 läßt sich MP^2 sofort ausdrücken. Die Bedingung ist also:

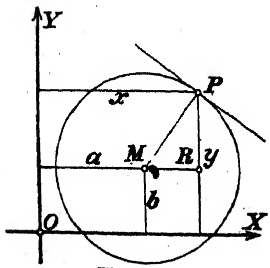


Fig. 126.

$$(1) \qquad (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Statt zu sagen, der Punkt P soll den Kreis um den Mittelpunkt $(a\,;b)$ mit dem Radius r beschreiben, kann man also auch sagen: Die Koordinaten x, y des Punktes P sollen die Bedingung (1) befriedigen. Deshalb heißt (1) die Gleichung des Kreises. Wir sprechen das Ergebnis so aus:

Satz 6: Die Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt $(a\,;b)$ und dem Radius r ist:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2,$$

vorausgesetzt, daß die x-Einheit der y-Einheit gleich sei.

Die Kreisgleichung (1) ist nach y auflösbar, denn es ist

$$(y-b)^2=r^2-(x-a)^2,$$

so daß sich durch Ausziehen der Quadratwurzel ergibt:

$$y=b\pm\sqrt{r^2-(x-a)^2}. \tag{2}$$

Deshalb kann man auch sagen, daß der betrachtete Kreis aus den Bildern zweier Funktionen y von x besteht, nämlich der beiden durch (2) je nach der Wahl des Vorzeichens der Wurzel dargestellten Funktionen. Dies wollen wir geometrisch erläutern: Die Quadratwurzel ist nur dann reell, wenn $r^2 \geqq (x-a)^2$ ist, d. h. wenn x von a um nicht mehr als r abweicht. Dies steht damit im Einklange, daß der Kreis zwischen den beiden Parallelen g_1 und g_2 zur y-Achse liegt, die vom Mittelpunkte M um die Strecke r abweichen, siehe Fig. 127. Diese Parallelen sind Kreistangenten, und ihre Berührungspunkte bezeichnen wir mit A_1 und A_2. Damit sich aus (2) reelle Werte für y ergeben, wählen wir also x oder OQ so, daß Q zwischen g_1 und g_2 liegt, weil dann und nur dann $(x-a)^2<r^2$ ist. Zu diesem x gehören zwei Punkte P_1 und P_2 des Kreises, nämlich die auf der Parallelen zur y-Achse durch Q. Die Parallele zur x-Achse durch M treffe diese Gerade in R. Die Strecke MR ist gleich $x-a$ (positiv, wenn R wie in Fig. 127 rechts von M liegt, andernfalls negativ). Nach dem Satz des Pythagoras sind RP_1^2 und RP_2^2 beide gleich r^2-MR^2. Also kommt:

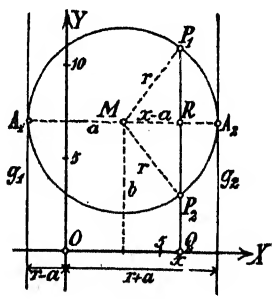


Fig. 127.

$$RP_1^2=RP_2^2=r^2-(x-a)^2,$$

daher einzeln:

$$RP_1=+\sqrt{r^2-(x-a)^2}, \qquad RP_2=-\sqrt{r^2-(x-a)^2}.$$

Weil $QR = b$ ist, haben P_1 und P_2 die Ordinaten $b + RP_1$ und $b - RP_2$, und dies sind gerade die beiden Werte (2). Man sieht also, daß in (2) das Pluszeichen der Wurzel zu den Punkten P_1 des oberen Halbkreises von A_1 bis A_2 gehört, das Minuszeichen zu den Punkten P_2 des unteren Halbkreises von A_1 bis A_2. Die Bilder der beiden durch (2) oder also unaufgelöst durch (1) dargestellten einwertigen Funktionen y von x sind demnach diese beiden Halbkreise, und die beiden Funktionen y sind nur in dem Intervalle zwischen g_1 und g_2, also in dem Intervalle

$$a - r \leqq x \leqq a + r$$

reell.

In Fig. 127 haben wir $a = 3, b = 7, r = 5$ angenommen und die beliebige Abszisse $x = OQ = 6$ gewählt. Dann hat die Quadratwurzel den Wert 4, so daß P_1 und P_2 die Ordinaten 11 und 3 haben.

Wir wollen es nun dahingestellt sein lassen, ob wir den oberen oder unteren Halbkreis betrachten, d. h. wir schreiben statt (2):

$$y = b + \sqrt{r^2 - (x - a)^2}, \tag{3}$$

indem wir uns vorbehalten, die Quadratwurzel positiv oder negativ zu nehmen. Der Differentialquotient dieser Funktion y von x wird nach der Kettenregel berechnet:

$$y = b + \sqrt{z} = b + z^{\frac{1}{2}}, \qquad z = r^2 - t^2, \qquad t = x - a,$$

$$\frac{dy}{dz} = \tfrac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{z}}, \qquad \frac{dz}{dt} = -2t, \qquad \frac{dt}{dx} = 1,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{-t}{\sqrt{z}},$$

so daß kommt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x - a}{\sqrt{r^2 - (x - a)^2}}. \tag{4}$$

Daraus, daß wir das Vorzeichen der Quadratwurzel beliebig gelassen haben, darf man keineswegs schließen, daß das in (4) rechts zuerst stehende Minuszeichen überflüssig wäre. Wird nämlich der obere Halbkreis betrachtet, so ist die Wurzel positiv, also $-(x - a)$ mit einer positiven Größe zu dividieren, wird der untere betrachtet, so wird dagegen $-(x - a)$ mit einer negativen Größe dividiert.

Nach (3) darf die Quadratwurzel durch $y - b$ ersetzt werden. Also gibt (4):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x - a}{y - b}. \tag{5}$$

Welcher Punkt P des Kreises der Punkt $(x\,; y)$ auch sein mag — siehe wieder die frühere Fig. 126 —, stets hat der zugehörige Radius MP die Steigung

$$\frac{RP}{MR} = \frac{y-b}{x-a}.$$

Da das Produkt aus ihr und dem Differentialquotienten (5) gleich -1 ist und da (5) die Steigung der Kreistangente vorstellt, folgt also aus Satz 4, S. 177, daß die Kreistangente zum zugehörigen Radius senkrecht ist, eine wohlbekannte Tatsache, die hierdurch rechnerisch bestätigt wird.

In der Kreisgleichung (1) kommen, wenn man alles ausrechnet, Glieder mit x^2, y^2, x und y und ein konstanter Summand vor. Insbesondere haben die Glieder mit x^2 und y^2 den Koeffizienten Eins, also denselben Koeffizienten. Betrachten wir nun eine beliebige Gleichung von der Form

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0, \tag{6}$$

in der x^2 und y^2 denselben Koeffizienten A haben. Wäre $A=0$, so läge eine lineare Gleichung vor, d. h. die einer Geraden (vgl. Satz 2, S. 173). Deshalb sei $A \neq 0$ vorausgesetzt. Dann darf mit A dividiert werden:

$$x^2+y^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}y+\frac{D}{A}=0.$$

Die Glieder

$$x^2+\frac{B}{A}x \quad \text{und} \quad y^2+\frac{C}{A}y$$

lassen sich durch Addition von

$$\frac{B^2}{4A^2} \quad \text{und} \quad \frac{C^2}{4A^2}$$

zu vollständigen Quadraten ergänzen. Diese Addition darf gemacht werden, wenn man dieselben Größen auch rechts hinzufügt. Bringt man außerdem $D:A$ mit dem Minuszeichen auf die rechte Seite, so ergibt sich also, daß die Gleichung (6) auf die Form

$$\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{C}{2A}\right)^2=\frac{B^2+C^2-4AD}{4A^2}$$

gebracht werden kann. Dies aber ist eine Kreisgleichung, denn die Vergleichung mit (1) lehrt, daß

$$a=-\frac{B}{2A}, \quad b=-\frac{C}{2A} \tag{7}$$

die Koordinaten der Kreismitte sind und

$$r=\frac{1}{2A}\sqrt{B^2+C^2-4AD}$$

der Kreisradius ist. Allerdings ist r nur dann reell und von Null verschieden, wenn $B^2 + C^2 > 4AD$ ist. Im Fall $B^2 + C^2 = 4AD$ schrumpft der Kreis in seinen Mittelpunkt zusammen. Im Fall $B^2 + C^2 < 4AD$ ergibt sich gar keine reelle Kurve. Somit gilt der

Satz 7: Jede Gleichung von der Form

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0,$$

worin die Konstanten A, B, C, D den Bedingungen

$$A \neq 0 \quad \text{und} \quad B^2 + C^2 - 4AD \geqq 0$$

genügen, ist die eines Kreises. Umgekehrt: jeder Kreis hat eine Gleichung von dieser Form. Vorausgesetzt wird dabei, daß die x-Einheit gleich der y-Einheit sei.

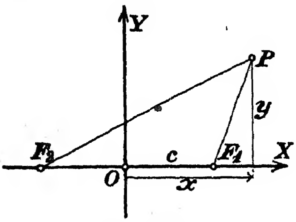


Fig. 128.

1. Beispiel: Ein Punkt P bewege sich in der Ebene so, daß das Verhältnis seiner Abstände von zwei festen Punkten F_1 und F_2 beständig dasselbe bleibt. Was für eine Kurve beschreibt er? Als x-Achse wählen wir die Gerade F_1F_2, als Anfangspunkt O die Mitte von F_1F_2; insbesondere liege F_1 auf der positiven x-Achse. Die Strecke OF_1 sei gleich c. Siehe Fig. 128. Hat der bewegliche Punkt P die Koordinaten x und y, so sind (vgl. Satz 1, S. 172)

$$F_1P^2 = (x - c)^2 + y^2 \quad \text{und} \quad F_2P^2 = (x + c)^2 + y^2$$

die Quadrate seiner Abstände von F_1 und F_2. Soll das Verhältnis der Abstände einen konstanten Wert ε haben, so muß also

$$\frac{(x - c)^2 + y^2}{(x + c)^2 + y^2} = \varepsilon^2$$

sein. Bringt man den Nenner auf die rechte Seite, multipliziert man dann alle Quadrate aus und ordnet man schließlich die Gleichung, so kommt:

$$(1 - \varepsilon^2)(x^2 + y^2) - 2c(1 + \varepsilon^2)x + c^2(1 - \varepsilon^2) = 0.$$

Diese Gleichung ordnet sich der in Satz 7 angegebenen Form unter, indem hier

$$A = 1 - \varepsilon^2, \quad B = -2c(1 + \varepsilon^2), \quad C = 0, \quad D = c^2(1 - \varepsilon^2)$$

ist. Mithin ist die Bahnkurve von P ein Kreis. Daß sein Mittelpunkt auf der Geraden F_1F_2 liegt, erkennt man leicht. Welche Abszisse hat er?

2. Beispiel: Ein Punkt P bewege sich in der Ebene so, daß die Summe der Quadrate seiner Abstände von n festen Punkten $F_1, F_2 \ldots F_n$ beständig dieselbe bleibt. Was für eine Bahn beschreibt er? Der bewegliche Punkt P habe die Koordinaten x und y. Die festen Punkte $F_1, F_2 \ldots F_n$ mögen die Abszissen $a_1, a_2 \ldots a_n$ und die Ordinaten $b_1, b_2 \ldots b_n$ haben. Nach Satz 1, S. 172, ist

$$F_1P^2 = (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2.$$

Entsprechende Werte gehen für $F_2P^2, \ldots F_nP^2$ hervor. Soll die Summe der Quadrate

der Abstände von $F_1, F_2 \ldots F_n$ gleich einer Konstanten sein, die offenbar positiv gewählt werden muß und also c^2 heißen möge, so müssen daher x und y die Bedingung erfüllen:

$$(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2+$$
$$+(y-b_1)^2+(y-b_2)^2+\cdots+(y-b_n)^2=c^2.$$

Multipliziert man alle Quadrate aus, so gibt die Ordnung nach Potenzen von x und y die Gleichung:

$$n(x^2+y^2)-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)x-2(b_1+b_2+\cdots+b_n)y+$$
$$+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2-c^2=0.$$

Sie ordnet sich der in Satz 7 angegebenen Gleichung unter, indem hier

$$A=n,\quad B=-2(a_1+a_2+\cdots+a_n),\quad C=-2(b_1+b_2+\cdots+b_n),$$
$$D=a_1^2+a_1^2+\cdots+a_n^2+b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2-c^2$$

ist. Mithin ist die Bahn des Punktes P ein Kreis. Nach (7) sind die Koordinaten a und b der Kreismitte M:

$$a=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},\qquad b=\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}.$$

Diese sind die arithmetischen Mittel der Abszissen und Ordinaten aller festen Punkte $F_1, F_2 \ldots F_n$. Man bezeichnet diesen Punkt M als den Schwerpunkt aller n festen Punkte $F_1, F_2 \ldots F_n$. Wenn z. B. nur zwei feste Punkte F_1 und F_2 vorliegen, also $n=2$ ist, wird

$$a=\frac{a_1+a_2}{2},\qquad b=\frac{b_1+b_2}{2},$$

woraus man sieht, daß dann M die Mitte zwischen F_1 und F_2 ist.

§ 3. Die Ellipse.

Wir lösen nun eine Aufgabe, die mit den beiden letzten Beispielen eine Ähnlichkeit hat. Dadurch gelangen wir zu einer Kurve, die oft in den Anwendungen der Mathematik vorkommt:

Ein Punkt P bewege sich so, daß die Summe seiner Abstände von zwei festen Punkten F_1 und F_2 immer dieselbe bleibt. Mechanisch kann man die Bahnkurve des Punktes, die eine Ellipse heißt, dadurch herstellen, daß man einen unausdehnbaren Faden, dessen Länge größer als die Entfernung von F_1 bis F_2 ist, mit seinen Enden in F_1 und F_2 festknüpft und dann mittels Zeichenstiftes P irgendwo anspannt; bewegt man den Stift,

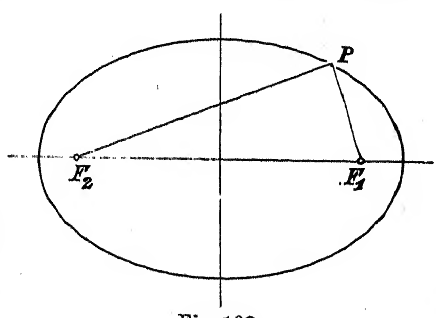


Fig. 130.

indem man den Faden stets gespannt hält, so behält er immer dieselbe Entfernungssumme von F_1 und F_2 (nämlich die Fadenlänge) und beschreibt die Ellipse, siehe Fig. 130. Praktischer ist es, einen noch um die Strecke $F_1 F_2$ längeren Faden zu nehmen, seine Enden zusammenzuknüpfen und ihn dann um zwei in F_1 und F_2 angebrachte Stifte lose herumzuschlingen. Wird er durch den Zeichenstift P gespannt, so kann man die Kurve in einem Zuge beschreiben. Man sieht, daß sie länglichrund die Punkte F_1 und F_2 einschließt und zwei Symmetriegeraden hat, nämlich die Gerade $F_1 F_2$ und die Mittelsenkrechte von $F_1 F_2$.

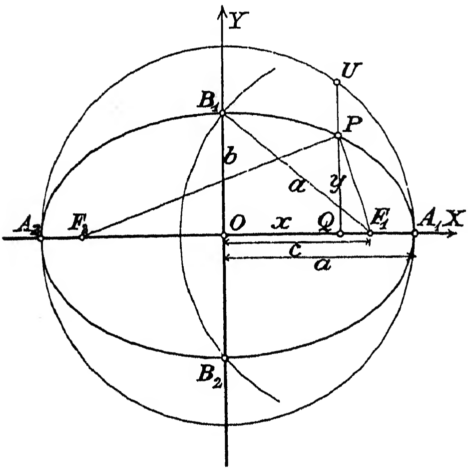


Fig. 131.

Wir wählen die Gerade $F_1 F_2$ als x-Achse und ihre Mitte als Anfangspunkt O. Der feste Punkt F_1 liege auf der positiven x-Achse, siehe Fig. 131. Die Strecke $O F_1$ habe die Länge c, so daß die Entfernung von F_2 bis F_1 gleich $2c$ ist. Die konstante Summe der Abstände des beweglichen Punktes P oder $(x; y)$ von F_1 und F_2 muß selbstverständlich größer als die Entfernung $2c$ angenommen werden; sie sei mit $2a$ bezeichnet, so daß $a > c$ anzunehmen ist. Die Abstände des Punktes P von F_1 und F_2 haben die nach Satz 1, S. 172, zu berechnenden Quadrate. Also wird gefordert:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c^2)+y^2}=2a.$$

Dabei sind die Wurzeln positiv. Da wir aber die Wurzeln durch zweimaliges Quadrieren entfernen werden, ist dies gleichgültig. (Daraus folgt, daß das Ergebnis, zu dem wir gelangen werden, auch dann richtig bleibt, wenn die eine Wurzel positiv und die andere negativ ist, d. h. wenn wir fordern, daß die Differenz der Abstände des beweglichen Punktes P von F_1 und F_2 konstant sei. Natürlich muß man dann diese Differenz $2a < 2c$ wählen. Auf diesen Fall, der eine andere wichtige Kurve, die Hyperbel, liefert, kommen wir im nächsten Paragraphen zurück.)

Zunächst schreiben wir die Gleichung so:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Wird sie quadriert, so kommt nach gehöriger Ordnung:

$$cx + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Abermaliges Quadrieren gibt:

$$(a^2 - c^2)\,x^2 + a^2 y^2 = a^2 (a^2 - c^2).$$

Weil $a > c$ vorausgesetzt wurde, gibt es eine Strecke b, deren Quadrat gleich $a^2 - c^2$ ist. Man findet sie, indem man den Kreis um F_1 mit dem Radius a mit der y-Achse in den Punkten B_1 und B_2 zum Schnitt bringt, da diese Punkte von O die Entfernungen $\pm b$ haben. Schreiben wir nun b^2 statt $a^2 - c^2$, so lautet die Gleichung so:

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

oder nach Division mit $a^2 b^2$ übersichtlicher so:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Sie heißt die Gleichung der Ellipse. Sie zeigt, daß z. B. für $x = 0$ die Ordinate $y = \pm b$ ist, also B_1 und B_2 der Kurve angehören. Ferner kommt $y = 0$ für $x = \pm a$. Daher gehören auch die Punkte A_1 und A_2 auf der x-Achse, deren Abszissen a und $-a$ sind, zur Kurve. Das leuchtet auch geometrisch ein. Man nennt $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ die Haupt- und Nebenachse der Ellipse und die Punkte A_1, A_2 und B_1, B_2 ihre Haupt- und Nebenscheitel.

Auf Grund der Gleichung (1) kann man mehrere einfache Konstruktionen der Ellipse gewinnen:

Erstens: Wir verwenden den Kreis um O mit dem Radius a, siehe immer noch Fig. 131. Die Ordinate eines Ellipsenpunktes P treffe, gehörig verlängert, den Kreis in U. Ist Q der Fußpunkt der Ordinate, so muß $OQ^2 + QU^2$ gleich a^2 sein. Also ist

$$QU^2 = a^2 - x^2.$$

Nach (1) ist aber

$$\frac{a^2}{b^2}\,y^2 = a^2 - x^2.$$

Daher wird, weil überdies QU dasselbe Vorzeichen wie y hat:

$$QU = \frac{a}{b}\,y \qquad \text{oder} \qquad \frac{QU}{y} = \frac{a}{b}.$$

Dies besagt: Wenn man alle Ordinaten QU des Kreises um O mit dem Radius a im konstanten Verhältnis $b : a$ verkleinert, ist der Ort der Endpunkte P der neuen Ordinaten die Ellipse. Die Ellipse ist also affin zum Kreise mit der Hauptachse als Affinitätsachse, vgl. S. 88.

Zweitens: Wir verwenden den Kreis um O mit dem Radius b, siehe Fig. 132. Dann ergibt sich ganz entsprechend, so daß wir den Beweis dem Leser überlassen können, folgendes: Wenn man von allen Punkten V dieses zweiten Kreises die Lote RV auf die y-Achse fällt und diese Lote RV in dem konstanten Verhältnis $a : b$ vergrößert, d. h. jedes Lot RV durch ein Lot RP so ersetzt, daß sich RP zu RV wie a zu b verhält, ist der Ort der hervorgehenden Punkte P wieder die Ellipse. Hieraus folgt noch eine ganz andere Erzeugung der Ellipse: Man denke sich die Ellipse aus der Ebene der Zeichnung herausgedreht um die Gerade $B_1 B_2$ herum, und zwar so weit, bis der der Hauptscheitel A_1 senkrecht über der Stelle A liegt, wo der Kreis die positive x-Achse trifft. Wegen $OA_1 = a$ und $O\mathsf{A} = b$ und wegen $RP : RV = a : b$ folgt, daß dann jeder Punkt P der Ellipse senkrecht über dem entsprechenden Punkt V des Kreises liegt, d. h. die Ellipse liegt dann auf dem geraden Kreiszylinder, dessen Grundkreis der Kreis um O mit dem Radius b ist und der auf der Zeichenebene senkrecht steht. Folglich kann man die Ellipse als ebenen Schnitt eines geraden Kreiszylinders erzeugen.

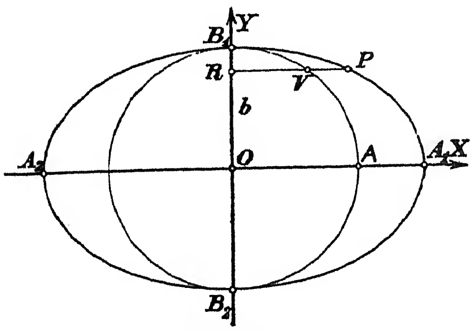


Fig. 132.

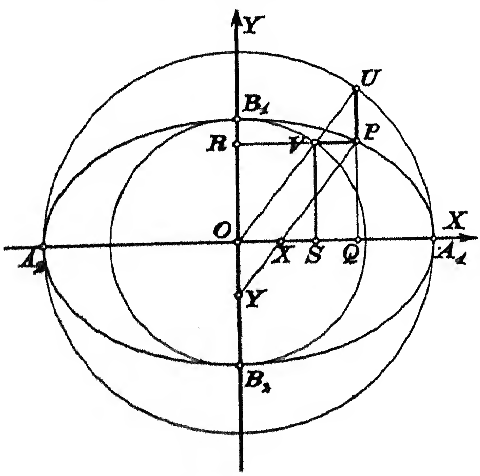


Fig. 133.

Drittens: Zu jedem Ellipsenpunkte P gehört nach dem Vorhergehenden ein Punkt U des Kreises um O mit dem Radius a und ein Punkt V des Kreises um O mit dem Radius b. Nun ist, wenn der Fußpunkt der Ordinate von V mit S bezeichnet wird, s. Fig. 133:

$$\frac{SV}{OS} = \frac{y}{RV}, \qquad \frac{QU}{OQ} = \frac{QU}{x}.$$

Wie wir wissen, ist aber

$$RV = \frac{b}{a}x \quad \text{und} \quad QU = \frac{a}{b}y.$$

Also ergibt sich:

$$\frac{SV}{OS} = \frac{ay}{bx} = \frac{QU}{OQ}.$$

Dies bedeutet, daß U und V auf einem von O ausgehenden Strahl liegen. Man kann daher die Ellipse auch so herstellen: Um O als Mittelpunkt zieht man die Kreise mit den Radien a und b. Ein beliebiger Strahl von O aus treffe den großen Kreis in U, den kleinen in V. Das Lot von U auf die x-Achse und das Lot von V auf die y-Achse (dieses über V verlängert) treffen einander dann in einem Punkte P der Ellipse. Dies Verfahren zeigt, daß die Ellipse völlig in dem Ringe zwischen beiden Kreisen verläuft.

Viertens: Ziehen wir in der letzten Figur durch P die Parallele zum Strahl OVU, so wird sie die x-Achse an einer Stelle X und die

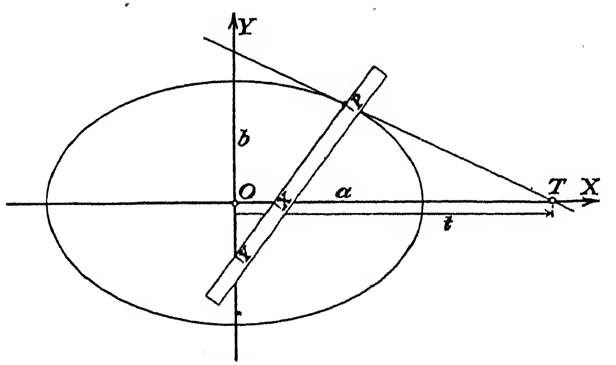


Fig. 134.

y-Achse an einer Stelle Y treffen. Da $OYPU$ und $OXPV$ Parallelogramme sind, ist $YP = OU = a$ und $XP = OV = b$. Dies sind Strecken von konstanten Längen. Mithin ergibt sich die Ellipse so: Man vermerkt auf einer starren Geraden, z. B. einem Lineal, drei Punkte X, Y, P, so daß $XP = b$ und $YP = a$ ist, und legt das Lineal so auf das Achsenkreuz, daß X auf die x-Achse und Y auf die y-Achse fällt, siehe Fig. 134. Dann ist das Lineal noch beweglich, indem X längs der x-Achse und Y längs der y-Achse gleiten kann, wobei der Punkt P die Ellipse beschreibt. So geht die technisch angewandte Erzeugung der Ellipse mittels des sogenannten Ellipsographen hervor.

punktes P mit den beiden von P nach den festen Punkten F_1 und F_2 gehenden Strahlen gleiche Winkel bildet. Die Gerade, die in P auf der Tangente senkrecht steht und die Normale der Ellipse in P heißt, ist also die Mittellinie von $\sphericalangle F_1 P F_2$.

Dies führt zu einer physikalischen Eigenschaft der Ellipse: Wenn die Ellipse eine Linie vorstellt, von der die Licht- oder Wärmestrahlen zurückgeworfen werden, folgt, daß alle von einer in F_1 angebrachten Quelle ausgehenden Strahlen nach F_2 gelangen. Dasselbe gilt, wenn F_1 mit F_2 vertauscht wird. Deshalb heißen F_1 und F_2 die Brennpunkte der Ellipse. F_1P und F_2P nennt man die Brennstrahlen des Ellipsenpunktes P. Sie haben nach der ursprünglichen Erklärung der Ellipse auf S. 183 die konstante Summe $2a$, die gleich der Hauptachse A_1A_2 der Ellipse ist. Schließlich ist noch zu erwähnen, daß O der Mittelpunkt und das Verhältnis $c:a$ die Exzentrizität der Ellipse heißt. Dies ist das Verhältnis $OF_1 : OA_1$, das kleiner als Eins ist. Je größer dies Verhältnis gewählt wird, um so länglicher wird die Ellipse. Ist es dagegen gleich Null, d. h. wird $c = 0$ angenommen, so fällt F_1 mit F_2 in O zusammen, und die Ellipse wird zum Kreis um O mit dem Radius a. Jeder Kreis ist also eine Ellipse, nämlich eine mit der Exzentrizität Null und mit im Mittelpunkte zusammenfallenden Brennpunkten.

§ 4. Die Hyperbel.

Wir wenden uns nun zu der auf S. 184 nebenbei erwähnten Aufgabe: Ein Punkt P soll sich so bewegen, daß die Differenz seiner Abstände von zwei festen Punkten F_1 und F_2 beständig dieselbe bleibt. Die Bahnkurve heißt eine Hyperbel. Wird das Achsenkreuz wie bisher gewählt, die Entfernung F_2F_1 gleich $2c$ gesetzt und die konstante Differenz mit $2a$ bezeichnet, so muß, wie schon auf S. 184 gesagt wurde, $a < c$ angenommen werden. Man kommt hier zu derselben Gleichung

$$(a^2 - c^2)\,x^2 + a^2 y^2 = a^2\,(a^2 - c^2)$$

wie auf S. 185, d. h.: Ein Punkt P gehört der Hyperbel an, wenn seine Koordinaten x und y diese Gleichung befriedigen. Weil $a < c$ ist, stellt aber jetzt $a^2 - c^2$ eine negative Größe vor, so daß wir besser tun, die Gleichung nach Multiplikation mit -1 so zu schreiben:

$$(c^2 - a^2)\,x^2 - a^2 y^2 = a^2\,(c^2 - a^2).$$

Nun gibt es eine Strecke b, deren Quadrat $c^2 - a^2$ ist. Sie geht in Fig. 136 hervor, wenn man um O den Kreis vom Radius c legt, $OA_1 = a$ auf der

positiven x-Achse aufträgt, in A_1 das Lot auf die x-Achse errichtet und mit dem Kreis in C und D zum Schnitte bringt. Dann ist näm-

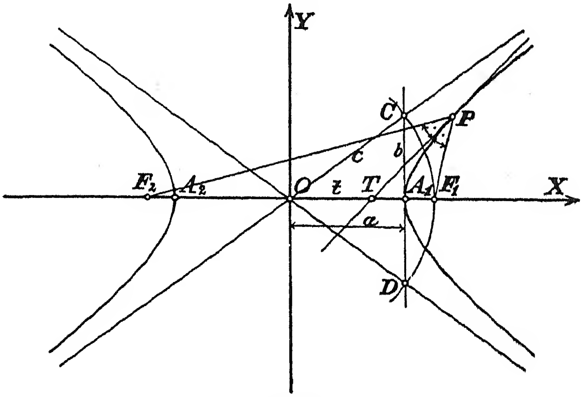


Fig. 136.

lich $A_1C = -A_1D = b$. Da $c^2 - a^2$ gleich b^2 ist, lautet die Bedingung jetzt so:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

oder nach Division mit a^2b^2 übersichtlicher:

(1) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Sie heißt die Gleichung der Hyperbel. Obgleich sie sich von der Ellipsengleichung (1) auf S. 185 nur in einem Vorzeichen unterscheidet, hat die Hyperbel, wie sich zeigen wird, doch eine durchaus andere Gestalt als die Ellipse.

Aus (1) ergibt sich durch Auflösung nach y:

(2) $$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Mithin ist die Hyperbel das Bild zweier einwertiger Funktionen, da die Wurzel entweder positiv oder negativ angenommen werden kann. Die Wurzel ist reell, solange x absolut genommen größer als a ist. Demnach gibt es zu allen Abszissen x, die größer als a oder kleiner als $-a$ sind, Punkte der Hyperbel, und zwar zu jeder zwei, und wenn x ins Unendliche strebt, gilt dasselbe von y. Die Hyperbel läuft also ins Unendliche. Bloß für $x = +a$ und $x = -a$ ergibt sich nur je ein Punkt, da dann $y = 0$ wird. Diese Punkte sind die schon erwähnte Stelle A_1 sowie der zu A_1 hinsichtlich O symmetrisch gelegene Punkt A_2. Man nennt sie die Scheitel der Hyperbel. Auf der y-Achse gibt

es jetzt keine Scheitel. Dagegen gibt es zu Abszissen x zwischen $-a$ und $+a$ keine Hyperbelpunkte. Die Erklärung der Hyperbel durch die gestellte Aufgabe lehrt, daß die Hyperbel ebenso wie die Ellipse die x-Achse und die y-Achse als Symmetriegeraden hat. Diese Geraden heißen die Haupt- und Nebenachse der Hyperbel. Aber auch die Strecken $2a$ und $2b$ nennt man so.

Nach (1) ist:

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{b^2}{a^2}\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right).$$

Strebt x von a aus nach $+\infty$ oder von $-a$ aus nach $-\infty$, so nimmt die rechte Seite von Null an beständig zu, indem sie nach $b^2 : a^2$ strebt. Absolut genommen ist also $y : x$ stets kleiner als $b : a$ und erstrebt diesen Wert nur, wenn x ins Unendliche strebt. Wir ziehen daher von O aus die Geraden mit den Steigungen $b : a$ und $-b : a$. Alle Punkte der Hyperbel liegen dann in denjenigen beiden Winkelfeldern zwischen diesen Geraden, die A_1 und A_2 enthalten. Die eine Gerade ist die durch O und C, die andere die durch O und D, und sie liegen symmetrisch zur x-Achse, siehe Fig. 136. Die Hyperbel besteht demnach aus zwei getrennten Zweigen.

Aus (2) berechnet man leicht den Differentialquotienten oder die Steigung der Tangente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}\,\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{b}{a}\,\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}}.$$

Die letzte Form zeigt, daß die Steigung für $x = \pm a$ unendlich groß wird, d. h. daß die Kurve in A_1 und A_2 senkrecht aufsteigt. Wächst x von a bis $+\infty$ oder nimmt x von $-a$ bis $-\infty$ ab, so nimmt der absolute Betrag der Steigung beständig ab, und zwar strebt er nach $b : a$. Die Hyperbeläste streben also danach, im Unendlichen zu den Geraden OC und OD parallel zu werden. Aber noch mehr: Berechnet man wie im Fall der Ellipse die Abszisse t des Punktes T, in dem die Tangente eines Hyperbelpunktes P oder $(x; y)$ die x-Achse trifft, so findet man denselben Wert wie in (4), S. 189, nämlich:

$$t = \frac{a^2}{x}. \tag{3}$$

Strebt x nach $+\infty$ oder $-\infty$, so strebt daher t nach Null. Je weiter also ein Punkt auf der Kurve hinausrückt, um so näher kommt seine Tangente an den Anfangspunkt O, den Mittelpunkt der Hyperbel, heran. Da gleichzeitig die Steigung der Tangente nach der Steigung einer der Geraden OC und OD strebt, folgt, daß man die Geraden

OC und OD als die Tangenten der Hyperbel im Unendlichfernen auffassen muß. Derartige Tangenten heißen Asymptoten.

Da die Abszisse x für die Punkte der Hyperbel absolut genommen nie kleiner als a ist, wird der absolute Betrag von t nach (3) nie größer als a. Alle Hyperbeltangenten treffen daher die x-Achse zwischen den Scheiteln A_1 und A_2. Genau so wie bei der Ellipse (vgl. S. 190) kann man beweisen, daß die Tangente eines Hyperbelpunktes P den Winkel des Dreiecks F_1F_2P bei P in gleiche Teile zerlegt; aber jetzt ist es der Innenwinkel. Deshalb heißen F_1 und F_2 die Brennpunkte der Hyperbel und F_1P und F_2P die Brennstrahlen des Hyperbelpunktes P.

Die Asymptoten der Hyperbel haben, da sie Geraden sind, lineare Gleichungen (nach § 1). Da sie durch den Anfangspunkt gehen, fehlt in ihren Gleichungen das absolute Glied (S. 175). Die eine Asymptote hat die Steigung $b : a$, die andere die Steigung $-b : a$. Deshalb sind

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a} \qquad \text{und} \qquad \frac{y}{x} = -\frac{b}{a}$$

oder, wie man auch statt dessen schreiben kann:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

die Gleichungen der Asymptoten. Soll ein Punkt $(x\,;y)$ auf einer der beiden Asymptoten liegen, so muß also für ihn eine dieser beiden Gleichungen bestehen. Deshalb drückt das Produkt der Gleichungen, nämlich

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0,$$

die Bedingung dafür aus, daß ein Punkt $(x; y)$ entweder der einen oder der anderen Asymptote angehört. Diese Gleichung läßt sich auch so schreiben:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0. \tag{4}$$

Man kann sie als die Gleichung des Asymptotenpaares bezeichnen. Sie unterscheidet sich von der Hyperbelgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dadurch, daß rechts Null statt Eins steht.

Nun wollen wir eine Aufgabe der analytischen Geometrie behandeln, die zu Anfang bloß in Berechnungen besteht, aber doch ein recht nützliches Ergebnis liefern wird:

Wir suchen die Schnittpunkte einer beliebig gewählten Geraden mit der Hyperbel sowie die Schnittpunkte derselben Geraden mit den Asymptoten der Hyperbel.

Eine beliebige Gerade g wird nach Satz 2, S. 173, durch eine lineare Gleichung gegeben:

$$Ax + By + C = 0, \tag{5}$$

wo also A, B, C irgendwelche Konstanten seien und A und B selbstverständlich nicht beide gleich Null sein dürfen. Soll nun der Punkt $(x; y)$ ein Schnittpunkt dieser Geraden mit der Hyperbel sein, so ist zu verlangen, daß seine Koordinaten x, y sowohl die Gleichung der Hyperbel als auch die Gleichung (5) der Geraden g befriedigen. Somit handelt es sich darum, zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten x, y (jetzt nicht Veränderlichen) aufzulösen. Dies geschieht, indem man eine der Unbekannten eliminiert, d. h. etwa y mit Hilfe von (5) durch x ausdrückt:

$$y = -\frac{Ax + C}{B} \tag{6}$$

und diesen Wert von y in die Hyperbelgleichung einsetzt. Denn dann bleibt eine Gleichung übrig, die nur noch die eine Unbekannte x enthält, nämlich:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(Ax + C)^2}{b^2 B^2} = 1.$$

Wird das Quadrat ausgerechnet und wird alles mit $-a^2 b^2 B^2$ multipliziert, so kommt nach gehöriger Ordnung:

$$(a^2 A^2 - b^2 B^2) x^2 + 2 a^2 A C x + a^2 (C^2 + b^2 B^2) = 0. \tag{7}$$

Wenn also x eine Lösung dieser Gleichung (7) ist und mittels ihrer y aus (6) berechnet wird, hat man die Koordinaten eines Punktes, in dem die Gerade g die Hyperbel schneidet. Da (7) eine quadratische Gleichung ist, gibt es zwei Lösungen x, also zwei Schnittpunkte. Aber nach S. 112 können die Lösungen auch zusammenfallen oder imaginär werden. Also gibt es höchstens zwei Schnittpunkte. Wir wollen sie P_1 und P_2 nennen und ihre Abszissen mit x_1 und x_2 bezeichnen, siehe Fig. 137. Da diese Abszissen x_1 und x_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung (7) sind, ist ihre Summe nach einer auf S. 114 gemachten Bemerkung gleich dem mit dem Minuszeichen versehenen Bruch aus dem Koeffizienten von x und dem Koeffizienten von x^2 in (7), d. h. es ist:

$$x_1 + x_2 = -\frac{2 a^2 A C}{a^2 A^2 - b^2 B^2}. \tag{8}$$

Nun betrachten wir die Schnittpunkte derselben Geraden g mit den beiden Asymptoten. Da die Gleichung (4) die Bedingung dafür ist, daß ein Punkt $(x; y)$ einer der beiden Asymptoten angehört, handelt es sich

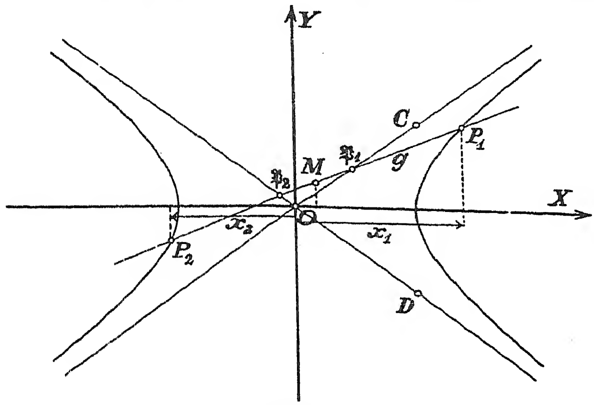


Fig. 137.

darum, x und y so zu bestimmen, daß sie sowohl die Gleichung (4) als auch die Gleichung (5) der Geraden g befriedigen. Wieder liegen also zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten x und y vor. Wie vorhin eliminieren wir y, indem wir aus (5) entnehmen, daß sich y in der Form (6) durch x ausdrückt, und indem wir diesen Ausdruck statt y in (4) einsetzen:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(Ax + C)^2}{b^2 B^2} = 0$$

Ausrechnung, Multiplikation mit $-a^2 b^2 B^2$ und Ordnung liefert:

$$(a^2 A^2 - b^2 B^2) x^2 + 2 a^2 A C x + a^2 C^2 = 0. \tag{9}$$

Dies ist wieder eine quadratische Gleichung für x. Das war vorherzusehen, denn die Gerade g schneidet die beiden Asymptoten in zwei Punkten; es muß also zwei Abszissen x geben, die (9) befriedigen. Die beiden gesuchten Punkte wollen wir $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ nennen, siehe wieder Fig. 137. Nun beachte man, daß sich die quadratischen Gleichungen (7) und (9) nur in ihrem letzten, von x freien Glied unterscheiden. Mithin gilt die Formel (8) auch für die Abszissen der Punkte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$, d. h.: Die Summe der Abszissen von P_1 und P_2 ist gleich der Summe der Abszissen von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$.

Dies aber hat eine geometrische Bedeutung: Der Punkt M in der Mitte zwischen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ hat die Abszisse $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$. (Wir erinnern an die letzte Bemerkung im 2. Beispiel, S. 183.) Deshalb

Wir suchen die Schnittpunkte einer beliebig gewählten Geraden mit der Hyperbel sowie die Schnittpunkte derselben Geraden mit den Asymptoten der Hyperbel.

Eine beliebige Gerade g wird nach Satz 2, S. 173, durch eine lineare Gleichung gegeben:

$$Ax + By + C = 0, \tag{5}$$

wo also A, B, C irgendwelche Konstanten seien und A und B selbstverständlich nicht beide gleich Null sein dürfen. Soll nun der Punkt $(x; y)$ ein Schnittpunkt dieser Geraden mit der Hyperbel sein, so ist zu verlangen, daß seine Koordinaten x, y sowohl die Gleichung der Hyperbel als auch die Gleichung (5) der Geraden g befriedigen. Somit handelt es sich darum, zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten x, y (jetzt nicht Veränderlichen) aufzulösen. Dies geschieht, indem man eine der Unbekannten eliminiert, d. h. etwa y mit Hilfe von (5) durch x ausdrückt:

$$y = -\frac{Ax + C}{B} \tag{6}$$

und diesen Wert von y in die Hyperbelgleichung einsetzt. Denn dann bleibt eine Gleichung übrig, die nur noch die eine Unbekannte x enthält, nämlich:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(Ax + C)^2}{b^2 B^2} = 1.$$

Wird das Quadrat ausgerechnet und wird alles mit $-a^2 b^2 B^2$ multipliziert, so kommt nach gehöriger Ordnung:

$$(a^2 A^2 - b^2 B^2)x^2 + 2a^2 ACx + a^2(C^2 + b^2 B^2) = 0. \tag{7}$$

Wenn also x eine Lösung dieser Gleichung (7) ist und mittels ihrer y aus (6) berechnet wird, hat man die Koordinaten eines Punktes, in dem die Gerade g die Hyperbel schneidet. Da (7) eine quadratische Gleichung ist, gibt es zwei Lösungen x, also zwei Schnittpunkte. Aber nach S. 112 können die Lösungen auch zusammenfallen oder imaginär werden. Also gibt es höchstens zwei Schnittpunkte. Wir wollen sie P_1 und P_2 nennen und ihre Abszissen mit x_1 und x_2 bezeichnen, siehe Fig. 137. Da diese Abszissen x_1 und x_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung (7) sind, ist ihre Summe nach einer auf S. 114 gemachten Bemerkung gleich dem mit dem Minuszeichen versehenen Bruch aus dem Koeffizienten von x und dem Koeffizienten von x^2 in (7), d. h. es ist:

$$x_1 + x_2 = -\frac{2a^2 AC}{a^2 A^2 - b^2 B^2}. \tag{8}$$

Nun betrachten wir die Schnittpunkte derselben Geraden g mit den beiden Asymptoten. Da die Gleichung (4) die Bedingung dafür ist, daß ein Punkt $(x; y)$ einer der beiden Asymptoten angehört, handelt es sich

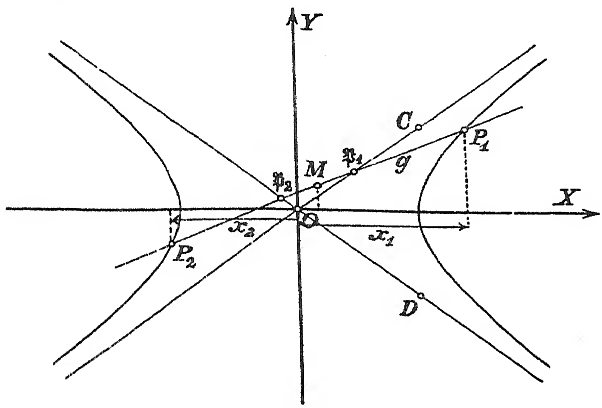


Fig. 137.

darum, x und y so zu bestimmen, daß sie sowohl die Gleichung (4) als auch die Gleichung (5) der Geraden g befriedigen. Wieder liegen also zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten x und y vor. Wie vorhin eliminieren wir y, indem wir aus (5) entnehmen, daß sich y in der Form (6) durch x ausdrückt, und indem wir diesen Ausdruck statt y in (4) einsetzen:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(Ax+C)^2}{b^2 B^2} = 0$$

Ausrechnung, Multiplikation mit $-a^2 b^2 B^2$ und Ordnung liefert:

$$(9) \qquad (a^2 A^2 - b^2 B^2) x^2 + 2 a^2 A C x + a^2 C^2 = 0 .$$

Dies ist wieder eine quadratische Gleichung für x. Das war vorherzusehen, denn die Gerade g schneidet die beiden Asymptoten in zwei Punkten; es muß also zwei Abszissen x geben, die (9) befriedigen. Die beiden gesuchten Punkte wollen wir $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ nennen, siehe wieder Fig. 137. Nun beachte man, daß sich die quadratischen Gleichungen (7) und (9) nur in ihrem letzten, von x freien Glied unterscheiden. Mithin gilt die Formel (8) auch für die Abszissen der Punkte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$, d. h.: Die Summe der Abszissen von P_1 und P_2 ist gleich der Summe der Abszissen von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$.

Dies aber hat eine geometrische Bedeutung: Der Punkt M in der Mitte zwischen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ hat die Abszisse $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$. (Wir erinnern an die letzte Bemerkung im 2. Beispiel, S. 183.) Deshalb

hat derjenige Punkt, der in der Mitte zwischen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ liegt, dieselbe Abszisse. Mithin ist das ebenfalls der Punkt M. Anders ausgesprochen: Die Strecke von P_1 bis $\mathfrak{P}_1$ und die von P_2 bis $\mathfrak{P}_2$ sind zwar einander entgegengesetzt, aber gleich lang.

Eine beliebige Gerade g schneidet also die Hyperbel und ihre Asymptoten derart, daß ihre zwischen den Hyperbelästen und Asymptoten gelegenen beiden Stücke gleich lang sind. Mithin können wir, falls nur die Asymptoten a_1 und a_2 und ein Punkt P_0 der Hyperbel gegeben sind, beliebig viele Punkte $P_1, P_2 \ldots$ der Kurve so wie in Fig. 138 ermitteln, indem wir durch P_0 Geraden ziehen und jedesmal die Strecke auf einer solchen Geraden von P_0 bis zu einer Asymptote auf derselben Geraden von der anderen Asymptote aus abtragen und zwar ins Innere der beiden Winkelfelder hinein, in denen die Kurve verläuft.

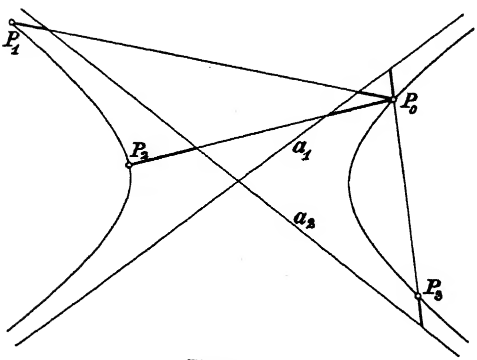


Fig. 138.

Diese Eigenschaft der Hyperbel läßt sich anders ausdrücken: Sind P_1 und P_2 zwei Punkte der Kurve, so ziehen wir durch sie die Parallelen zu den Asymptoten a_1 und a_2. Dadurch entstehen die geschrafften Parallelogramme $OR_1P_1S_2$ und $OR_2P_2S_1$ in Fig. 139. Die Gerade P_1P_2 treffe a_1 und a_2 in den Punkten Q_1 und Q_2. Da nun $P_1Q_1 = Q_2P_2$ ist, sind die drei Dreiecke $P_1Q_1R_1$, S_2S_1O und $Q_2P_2R_2$ kongruent. Folglich haben die Parallelogramme $OR_1P_1S_2$ und $S_1Q_1P_1S_2$ gleichen Inhalt, ebenso die Parallelogramme $OR_2P_2S_1$ und $S_2Q_2P_2S_1$. Ferner stehen die Parallelogramme $S_1Q_1P_1S_2$ und $S_2Q_2P_2S_1$ über derselben Grundlinie S_1S_2, auch haben sie gleiche Höhe, daher auch gleichen

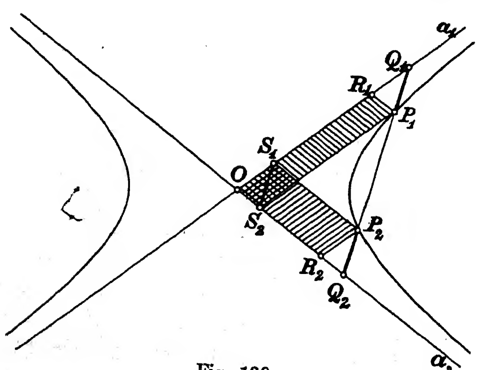


Fig. 139.

Inhalt. Mithin ergibt sich, daß die Parallelogramme $OR_1P_1S_2$ und $OR_2P_2S_1$ gleichen Inhalt haben.

Das Parallelogramm also, das von den Asymptoten und den durch einen Hyperbelpunkt P zu den Asymptoten parallel gelegten Geraden begrenzt wird, hat einen Inhalt, der für alle Hyperbelpunkte P derselbe ist.

Insbesondere heißt eine Hyperbel gleichseitig, wenn ihre Asymptoten zueinander senkrecht sind. In diesem Fall kann man die Hyperbel besonders bequem darstellen, wenn man als Koordinatenachsen die Asymptoten benutzt. Denn wenn x und y die Koordinaten eines Punktes P der Kurve in diesem Achsenkreuze sind, siehe Fig. 140, ist das soeben erwähnte Parallelogramm das Rechteck mit den Seiten x und y. Mithin hat die gleichseitige Hyperbel im neuen Achsenkreuze die einfache Gleichung:

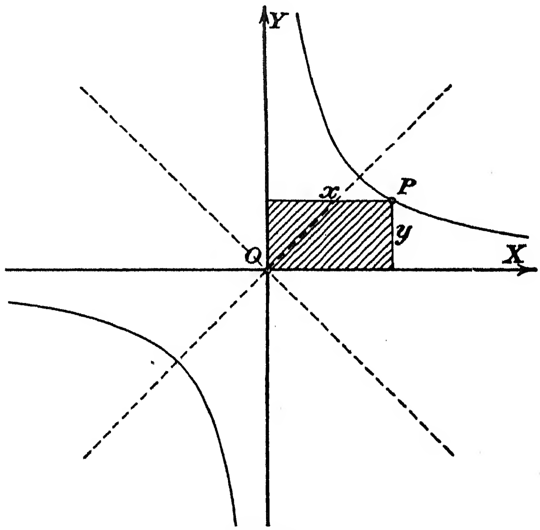


Fig. 140.

(10) $\quad xy = \text{konst.}$

Demnach ergeben sich die gleichseitigen Hyperbeln jetzt als die Bilder der Funktionen

$$y = \frac{\text{konst.}}{x}. \tag{11}$$

Im ersten Beispiel auf S. 139 lag die Funktion $y = 1 : x$ vor, und wir erwähnten schon damals, daß ihr Bild eine Hyperbel heißt, siehe Fig. 92 ebenda.

Wenn man die Einheit der y-Achse nicht so groß wie die der x-Achse wählt, heißt dies, daß man bei y in (10) noch einen konstanten Faktor hinzufügen muß. Da man ihn durch Division auf die rechte Seite bringen kann, wo schon eine Konstante steht, folgt: Auch wenn die x-Einheit und y-Einheit verschieden lang sind, ist das Bild der Funktion (11) eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten die Koordinatenachsen sind.

Schließlich wollen wir annehmen, eine gleichseitige Hyperbel habe als Asymptoten a_1 und a_2 eine Parallele zur x-Achse mit der Ordinate k und eine Parallele zur y-Achse mit der Abszisse h, siehe Fig. 141. Ist dann P oder $(x; y)$ ein Punkt der Kurve, so sind $x - h$ und $y - k$ seine Abstände von den Asymptoten. An die Stelle der Gleichung (10) tritt also jetzt diese:

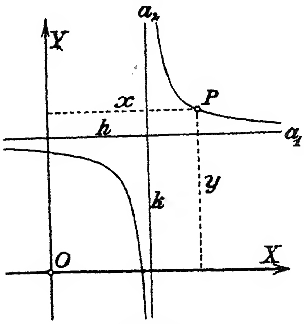


Fig. 141.

$$(x - h)(y - k) = \text{konst.}$$

oder ausmultipliziert:

$$(12)\quad xy - kx - hy + hk = \text{konst.}$$

Jede in xy, x und y lineare Gleichung

$$(13)\quad Axy + Bx + Cy + D = 0,$$

worin $A \neq 0$ ist, läßt sich auf diese Form bringen, denn nach Division mit A kommt:

$$xy + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}y + \frac{D}{A} = 0,$$

so daß die Vergleichung mit (12) lehrt, daß hier

$$h = -\frac{C}{A}, \quad k = -\frac{B}{A}$$

wird. Demnach ist (13) die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, deren eine Asymptote zur y-Achse parallel ist und die Abszisse $-C : A$ hat, während die andere Asymptote zur x-Achse parallel ist und die Ordinate $-B : A$ hat.

Die Auflösung der Gleichung (13) nach y gibt:

$$y = -\frac{Bx + D}{Ax + C},$$

und dies ist eine sogenannte linear gebrochene Funktion von x. Es ist besser, $-B$ und $-D$ mit B und D zu bezeichnen, weil dann das Minuszeichen fortfällt. Dann folgt der

Satz 8: Das Bild einer linear gebrochenen Funktion

$$y = \frac{Bx + D}{Ax + C} \quad (A \neq 0)$$

ist eine gleichseitige Hyperbel. Die Asymptoten der Hyperbel sind zu den Koordinatenachsen parallel, und der Mittelpunkt der Hyperbel hat die Abszisse $-C : A$ und die Ordinate $B : A$.

Im 8. Beispiel auf S. 145 und im 10. Beispiel auf S. 146 begegneten uns derartige Funktionen, nämlich

$$y = \frac{Ex}{Wx + w}$$

und

$$y = \frac{0{,}307}{1 + \frac{x}{273}}(100 - x) = \frac{-0{,}307x + 30{,}7}{\frac{x}{273} + 1}.$$

Satz 8 steht mit den Figuren 98, S. 145, und 99, S. 146, im Einklange.

§ 5. Schiefwinklige Koordinaten[1].

Den rechtwinkligen Koordinaten, die wir bisher beständig benutzt haben, sind zuweilen sogenannte schiefwinklige Koordinaten vorzuziehen. Zu ihrem Begriffe kommt man so:

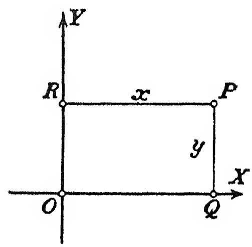


Fig. 142.

Ein Punkt P sei nebst seinen Koordinaten x und y in einem rechtwinkligen Achsenkreuze OX, OY dargestellt, siehe Fig. 142. Die Abszisse x ist die Parallele RP zur x-Achse, die Ordinate y die Parallele QP zur y-Achse. Man denke sich nun die Achsen OX und OY sowie diese Strecken RP und QP als starre Stäbe, die miteinander in O, R, P und Q durch Gelenke verknüpft seien. Wenn man dann den rechten Winkel XOY in irgendeinen anderen Winkel α verwandelt, geht eine neue Lage des Punktes P gegenüber den Achsen OX und OY hervor, weil $OQPR$ dann ein Parallelogramm wird, siehe Fig. 143. Man sagt, daß der Punkt P jetzt auf ein schiefwinkliges Achsenkreuz OX, OY bezogen sei, indem man nach wie vor die Parallelen RP und QP zu den Achsen als seine Abszisse x und seine Ordinate y bezeichnet.

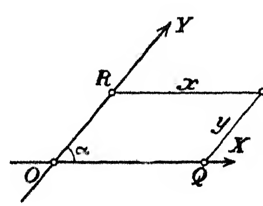


Fig. 143.

Nimmt man im ursprünglichen rechtwinkligen Achsenkreuz OX, OY statt des Punktes P eine Figur an und unterwirft man alle ihre Punkte demselben Verfahren, so geht eine neue Figur im schiefwinkligen Achsenkreuze hervor. Insbesondere gehen alle Punkte einer Kurve in die einer neuen Kurve über. Betrachten wir z. B. die Bildkurve der quadratischen Funktion

[1] Dieser Paragraph kann überschlagen werden.

$$y = \tfrac{1}{10}x^2 - x + 5$$

in Fig. 144, die eine Wiederholung der Fig. 39, S. 51, ist, und üben wir auf dies Bild das Verfahren aus, so geht die Abbildung der quadratischen Funktion in Fig. 145 hervor.

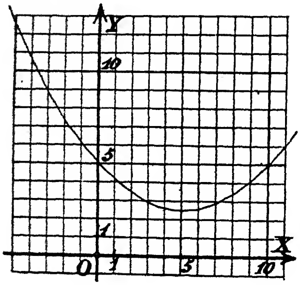


Fig. 144.

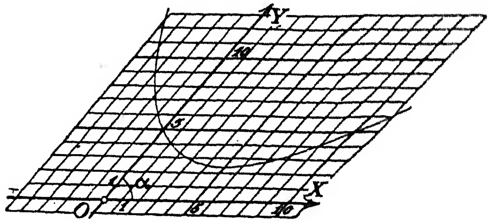


Fig. 145.

Der einzige Unterschied zwischen den recht- und schiefwinkligen Koordinaten besteht also darin, daß an die Stelle des rechten Winkels XOY ein beliebiger Winkel α tritt. Nach wie vor sind alle x-Koordinaten zur x-Achse parallele Strecken und alle y-Koordinaten zur y-Achse parallele Strecken.

Man fragt sich nun, was für Vorteile die schiefwinkligen Koordinaten haben können. Zeichnerisch sind ja die rechtwinkligen bequemer, weil sie die Anwendung karierten Papiers erlauben. Aber das folgende Beispiel wird den gelegentlichen Vorteil schiefwinkliger Achsenkreuze zeigen.

Beispiel: Eine ganz beliebige Hyperbel mit irgendwelchen Halbachsen a und b soll in dem aus ihren Asymptoten gebildeten Achsenkreuze durch eine Gleichung zwischen schiefwinkligen Koordinaten x und y dargestellt werden. Vorweg sei daran erinnert, daß die Hyperbel, falls man ihre Haupt- und Nebenachse als rechtwinklige Koordinatenachsen benutzt, die Gleichung (1) auf S. 191 hat:

(1) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

siehe Fig. 136 ebenda. Dieselbe Hyperbel soll nun aber auf das aus ihren Asymptoten bestehende Achsenkreuz bezogen werden, das im allgemeinen schiefwinklig ist und nur für gleichseitige Hyperbeln rechtwinklig ausfällt. (Für diesen besonderen Fall gilt Fig. 140 auf S. 197.) Wird irgendein Hyperbelpunkt P mit Koordinaten $x = RP$ und $y = QP$ parallel zu den Asymptoten angenommen, so muß das Parallelogramm $OQPR$ nach S. 197 konstanten Flächeninhalt haben. Um dies rechnerisch auszudrücken, haben wir zunächst Längeneinheiten auf den beiden Asymptoten anzunehmen, mittels derer die schiefwinkligen Koordinaten x und y gemessen werden sollen. Wir wählen also Einheitspunkte irgendwo auf beiden Achsen. Als Flächeneinheit werden wir dann das Parallelogramm benutzen, das

diese beiden den Winkel α einschließenden Längeneinheiten als Seiten hat und in Fig. 146 geschrafft ist. Mit dieser Flächeneinheit gemessen stellt sich die Fläche des Parallelogramms $OQPR$ als das Produkt xy dar. Demnach ist die Gleichung

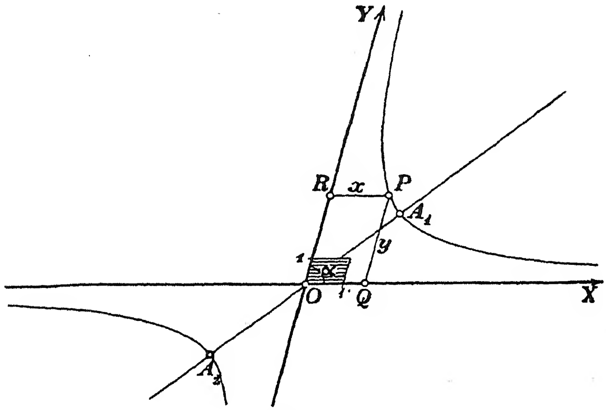


Fig. 146.

der Hyperbel, bezogen auf das im allgemeinen schiefwinklige Achsenkreuz ihrer Asymptoten, stets von der Form:

$$xy = \text{konst.} \tag{2}$$

Dies gilt auch, wenn man die Flächeneinheit anders wählt. Denn dann tritt links noch ein konstanter Faktor auf, den man durch Division auf die rechte Seite bringen kann. Man wird zugeben, daß die neue Gleichung (2) vor der alten Gleichung (1) Vorzüge hat, ist sie doch sehr bequem nach y auflösbar in der Form $y = \text{konst.} : x$. Wenn übrigens beide Koordinaten mit derselben Längeneinheit gemessen werden, hat der eine Scheitel A_1 der Hyperbel gleich große Koordinaten $x = y = m$. Da diese der Gleichung (2) genügen müssen, ist dann die Konstante in (2) gleich m^2, d. h. $xy = m^2$ stellt die Hyperbel dar.

Nun wollen wir noch einige Umstände hervorheben, die man bei der Anwendung schiefwinkliger Achsenkreuze beachten muß. Da der Begriff der schiefwinkligen Koordinaten allgemeiner als der Begriff der rechtwinkligen ist, muß man sich davor hüten, ohne Prüfung alles, was sich für das rechtwinklige Achsenkreuz ergab, auf schiefwinklige zu übertragen.

Ein vor allem wichtiger Unterschied ist dieser: Nach Satz 1, S. 172, wird das Quadrat der Entfernung zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 mit den Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 gegeben durch:

$$P_1P_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \,. \tag{3}$$

Dies gilt nicht mehr, wenn ein schiefwinkliges Achsenkreuz vorliegt, denn dann tritt an Stelle der Fig. 119, S. 172, die Fig. 147,

in der das Dreieck P_1SP_2 nicht rechtwinklig ist, so daß der Satz des Pythagoras nicht anwendbar ist. Bei schiefwinkligen Koordinaten tritt an die Stelle von (3) eine umständlichere Formel, die wir nicht benutzen wollen[1]. Hieraus ziehen wir die Lehre: Überall da, wo man in der analytischen Geometrie Entfernungen zwischen irgendwelchen Punkten zu betrachten hat, wird man rechtwinklige Achsen bevorzugen.

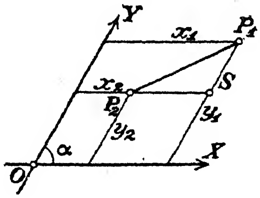


Fig. 147.

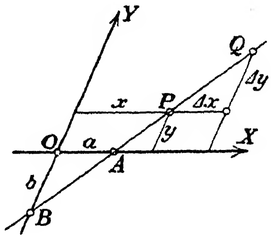


Fig. 148.

Wenn demnach hier das schiefwinklige Achsenkreuz versagt, gilt dies doch nicht bei gewissen anderen Betrachtungen: Das Bild einer beliebigen ganzen linearen Funktion

$$y = cx + k \tag{4}$$

ist auch in schiefwinkligen Koordinaten eine Gerade. Denn der auf S. 30, gegebene Beweis im Fall rechtwinkliger Koordinaten beruhte auf der Betrachtung ähnlicher Dreiecke, die auch im schiefen System auftreten. In der Tat, nach (4) ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = c$$

das konstante Verhältnis der Zunahmen von y und x. Sind also P und Q zwei zu (4) gehörige Bildpunkte $(x; y)$ und $(x + \Delta x; y + \Delta y)$, so bleibt das Dreieck mit den Seiten Δx und Δy stets zu seiner ursprünglichen Gestalt ähnlich und ähnlich gelegen, wie groß man auch den Zuwachs Δx von x wählen mag. Siehe Fig. 148.

Die Schnittpunkte A und B der durch (4) dargestellten Geraden mit den Achsen ergeben sich, wenn man $y = 0$ oder $x = 0$ wählt. Für sie ist demnach $x = -k : c$ oder $y = k$, d. h. $OA = -k : c$ und $OB = k$, wobei OA mit der Einheit der x-Koordinaten und OB mit der Einheit der y-Koordinaten zu messen ist. Bezeichnen wir OA mit

[1] Mit Hilfe der Trigonometrie, die wir hier noch vermeiden, erkennt man, daß im Fall der Fig. 147 die Formel gilt:

$$P_1P_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos\alpha.$$

B mit b, so ist also $k = b$ und $c = -k : OA = -b : a$, so gibt:

$$y = -\frac{b}{a}x + b.$$

mit b und Ordnung der Gleichung liefert:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

glich gilt diese Gleichung einer Geraden, die auf hsen die Strecken a und b abschneidet, auch im inkligen Achsenkreuz und auch dann, wenn man die en auf beiden Achsen verschieden lang gewählt hat. 3 a mit der x-Einheit und b mit der y-Einheit messen. Damit 3, S. 175, verallgemeinert.

n ferner

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

:hungen zweier Geraden im schiefwinkligen Achsenkreuze sind, ; die erste auf den Achsen die Strecken $a_1 = -C_1 : A_1$ und $C_1 : B_1$ und die zweite die Strecken $a_2 = -C_2 : A_2$ und $\mathcal{I}_2 : B_2$ ab. Die Geraden sind parallel, wenn $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$ ɜ Ausrechnung dieser Gleichung gibt als Bedingung des lismus:

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0.$$

auf den Parallelismus bezügliche erste Hälfte des 5, S. 177, gilt somit auch im schiefwinkligen Achsen- Dagegen ist die im Fall rechtwinkliger Achsen ebenda auf- Bedingung für das Senkrechtstehen nicht richtig Anwendung schiefwinkliger Koordinaten. Denn der dafür beruhte auf Fig. 124, S. 176, aus der wir entnahmen, Dreiecke $P_1 Q_1 R_1$ und $P_2 Q_2 R_2$ einander ähnlich sind, weil sie e zueinander senkrechte Seiten haben, was im schiefwinkligen reuze nicht zutrifft. Die Bedingung für das Senkrechtstehen r viel umständlicher. Wir sprechen sie nicht aus und merken Überall da, wo man in der analytischen Geometrie nder senkrechte Geraden zu betrachten hat, wird chtwinklige Koordinaten bevorzugen.

Steigung einer Geraden von einem Punkte $(x; y)$ nach nderen Punkte $(x + \Delta x; y + \Delta y)$ bezeichnen wir auch jetzt ch $\Delta y : \Delta x$ wie in Satz 7, S. 40. Der Unterschied besteht nur laß die Strecken Δy und Δx im Fall schiefwinkliger Koor-

dinaten nicht zueinander rechtwinklig sind, siehe wieder Fig. 148. Wir können diesen Begriff der Steigung auch auf die Tangenten von Kurven anwenden und genau so wie früher, vgl. S. 66 u. f., erkennen, daß die Bildkurve einer Funktion $y = f(x)$ an der zu irgendeinem x gehörigen Stelle diejenige Tangente hat, deren Steigung durch den Differentialquotienten $dy : dx$ angegeben wird, wobei an die Stelle der Fig. 59, S. 66, jetzt die Fig. 149 tritt. Man kann daher genau so wie im rechtwinkligen Achsenkreuze die Tangente der Bildkurve ermitteln, indem man x eine beliebige Zunahme Δx erteilt und die zugehörige Zunahme Δy von y so wählt, daß $\Delta y : \Delta x$ gleich dem Differentialquotienten wird. Der so hervorgehende Punkt mit den schiefwinkligen Koordinaten $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ liegt auf der Tangente des Kurvenpunktes $(x; y)$.

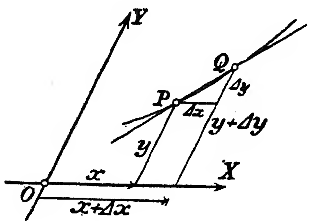


Fig. 149.

Weiter wollen wir hier auf die schiefwinkligen Koordinaten nicht eingehen; das Vorhergehende genügt für den Fall, wo der Leser sie gelegentlich gebrauchen will. In unserem Buch werden wir rechtwinklige Koordinaten benutzen. Sobald also späterhin kurzweg von Koordinaten x und y die Rede ist, sind darunter immer rechtwinklige Koordinaten zu verstehen.

§ 6. **Dreieckskoordinaten**[1].

Allgemein gesagt sind Koordinaten Größen, durch deren Angabe die Lage irgendwelcher Punkte bestimmt wird. In der Ebene kann man deshalb außer den gebräuchlichen rechtwinkligen Koordinaten und den im vorigen Paragraphen betrachteten schiefwinkligen noch manche Arten von Koordinaten anwenden. Wir geben nur ein Beispiel an: In der Ebene seien zwei Punkte F_1 und F_2, sogenannte Pole, gegeben. Ein beliebiger Punkt P hat von ihnen gewisse Abstände r_1 und r_2. Jedem Punkte P werden also Strecken r_1 und r_2 zugeordnet (koordiniert), und man kann r_1 und r_2 als Koordinaten von P bezeichnen. Diese Bestimmungsstücke heißen, nebenbei bemerkt, dipolare (zweipolige) Koordinaten. Übrigens sind sie recht unvollkommen, denn erstens darf man r_1 und r_2 nur positiv annehmen, zweitens gehört zu zwei Strecken r_1 und r_2, deren Summe kleiner als F_1F_2 ist, gar kein Punkt P, und drittens gehört zu zwei Strecken r_1 und r_2, deren Summe

[1] Dieser Paragraph kann überschlagen werden. Von besonderer Bedeutung dürfte er für Chemiker wegen der graphischen Darstellung von Mischungen sein.

größer als F_1F_2 ist, nicht nur ein Punkt P, sondern auch noch ein zweiter Punkt Q, wie Fig. 150 zeigt.

Der Umstand, daß die Ebene zwei Dimensionen hat, bringt es mit sich, daß man zur Festlegung von Punkten in der Ebene immer mit zwei Bestimmungsstücken oder Koordinaten

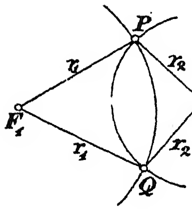


Fig. 150.

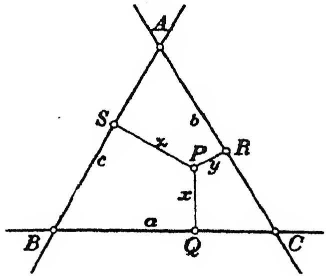


Fig. 151.

auskommt. (Im Raume müßte man drei gebrauchen.) Wenn man also für einen Punkt P in der Ebene mehr als zwei Bestimmungsstücke auswählt, z. B. die Abstände von mehreren Polen, sind alle bis auf bloß zwei überzählig, d. h. alle lassen sich durch bloß zwei ausdrücken. Dies wird sich insbesondere bei denjenigen Koordinaten zeigen, die wir jetzt betrachten wollen, bei den Dreieckskoordinaten. Wir wollen nämlich einen beliebigen Punkt in der Ebene durch seine drei Abstände von den Seiten eines festen Dreiecks bestimmen. Dabei beschränken wir uns auf den Fall, wo das feste Dreieck gleichseitig ist[1].

Unter a, b, c verstehen wir die Seiten eines gleichseitigen Dreiecks ABC. Die Ecke A liege der Seite a gegenüber, B der Seite b und C der Seite c, siehe Fig. 151. Gemessen mit einer angenommenen Längeneinheit seien x, y, z die lotrechten Abstände QP, RP, SP eines beliebigen Punktes P von den Geraden a, b, c. Diesen Dreieckskoordinaten x, y, z geben wir bestimmte Vorzeichen: Die Gerade a teilt die ganze Ebene in Halbebenen, und wenn P auf a selbst liegt, ist sein Abstand x von a gleich Null. Folglich ist es naturgemäß festzusetzen: Die Koordinate x soll positiv oder negativ sein, je nachdem P in der einen oder anderen Halbebene liegt. Als Halbebene mit positiven Abständen x wählen wir diejenige, in der sich der

[1] Es gibt noch andere Arten von Dreieckskoordinaten, die man mit Vorteil in gewissen Teilen der Geometrie verwendet. Aber sie sind für unsere Zwecke nicht so wichtig.

Punkt A befindet. Ganz entsprechend setzen wir fest, daß y oder z positiv oder negativ sein soll, je nachdem P auf derselben oder auf der entgegengesetzten Seite von b oder c liegt wie der Punkt B oder C. Nunmehr sind die Dreieckskoordinaten x, y, z irgendeines bestimmten Punktes P der Ebene bestimmte positive oder negative Zahlen. In jedem der sieben Gebiete, in die man die Ebene durch die Geraden a, b, c zerlegt, kommt eine besondere Zusammenstellung der Vorzeichen von x, y, z vor, siehe Fig. 152. Für den eingezeichneten

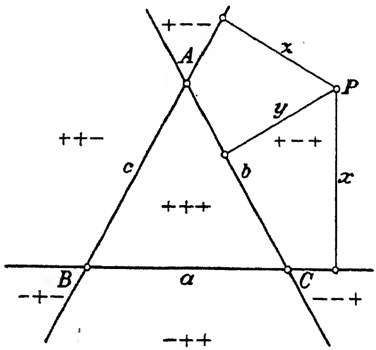


Fig. 152.

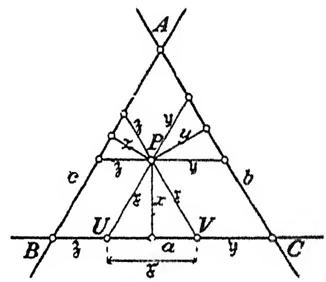


Fig. 153.

Punkt P z. B. sind x und z positiv, während y negativ ist. Insbesondere ist das Innere des Dreiecks ABC dasjenige Gebiet, in dem alle Koordinaten x, y, z positiv sind.

Hat man x und y bestimmt gewählt, so ist P der Schnittpunkt derjenigen Parallelen zu a und b, die in den Abständen x und y und zwar auf der einen oder anderen Seite von a und b verlaufen je nachdem x und y positiv oder negativ sind. Die dritte Koordinate z von P muß sich deshalb berechnen lassen, falls x und y bekannt sind. Wie dies geschieht, erkennt man leicht, wenn man durch P auch die Parallele zur dritten Seite c des Dreiecks ABC zieht, siehe Fig. 153. Die durch P gezogenen Parallelen zu den Dreiecksseiten enthalten sechs Strecken, nämlich diejenigen, die von ihren Schnittpunkten mit den Dreieckseiten bis P gehen. Diejenigen beiden Strecken, die von den Schnittpunkten U und V mit der Dreieckseite a ausgehen, schließen mit dieser Seite ein gleichseitiges Dreieck ein, so daß sie einander gleich sind. Ihre gemeinsame Länge sei $\mathfrak{x}$. Entsprechend sei $\mathfrak{y}$ die gemeinsame Länge der beiden Strecken, deren Anfangspunkte auf b liegen, und $\mathfrak{z}$ die der beiden Strecken, deren Anfangspunkte auf c liegen. Man sieht, daß x, y und z die Höhen von gleichseitigen Dreiecken mit den Kanten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ sind. Nun weiß man aber oder kann, wenn man es, wie zu ver-

muten, nicht mehr weiß, leicht mittels des Satzes von Pythagoras aus einem halben gleichseitigen Dreieck ableiten, daß sich die Höhe zur Kante in einem gleichseitigen Dreieck wie $\sqrt{3}$ zu 2 verhält. Somit ist

(1) $$\frac{x}{\mathfrak{x}} = \frac{y}{\mathfrak{y}} = \frac{z}{\mathfrak{z}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

oder:

(2) $$\mathfrak{x} = \frac{2}{\sqrt{3}}x, \quad \mathfrak{y} = \frac{2}{\sqrt{3}}y, \quad \mathfrak{z} = \frac{2}{\sqrt{3}}z.$$

Man erkennt ferner, daß $BU = \mathfrak{z}$, $UV = \mathfrak{x}$ und $VC = \mathfrak{y}$, also die Summe von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ gleich der Länge der Kante des gleichseitigen Dreiecks ABC ist. Man möge sich überzeugen, daß dies auch dann gilt, wenn P nicht im Innern des Dreiecks ABC liegt, siehe z. B. Fig. 154. Man muß in diesem Fall für $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ dieselben Vorzeichenbestimmungen wie für x, y, z treffen, z. B. $\mathfrak{x}$ positiv oder negativ rechnen, je nachdem P auf derselben Seite von a liegt wie A oder nicht. In Fig. 154 ist also $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ negativ, dagegen $\mathfrak{z}$ positiv, so daß $\mathfrak{x} + \mathfrak{y} + \mathfrak{z}$ in Wahrheit eine Differenz bedeutet, die aber augenscheinlich gleich der positiv gemessenen Kantenlänge des Dreiecks ABC ist.

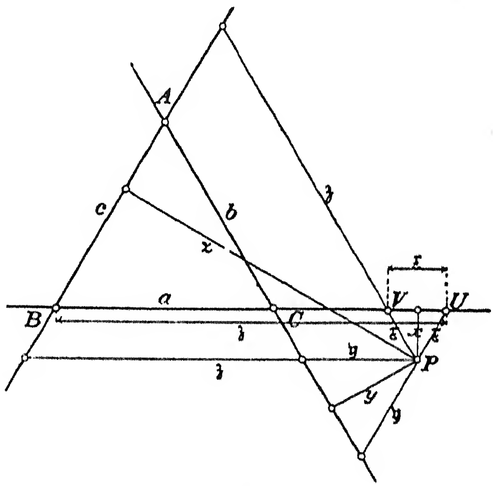


Fig. 154.

Diese Kantenlänge sei mit k bezeichnet, so daß wir haben:

(3) $$\mathfrak{x} + \mathfrak{y} + \mathfrak{z} = k.$$

Hieraus folgt durch Einsetzen der Werte (2) und Multiplikation mit $\sqrt{3} : 2$ die Gleichung:

$$x + y + z = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,k.$$

Da k die Kantenlänge des gleichseitigen Dreiecks ABC bedeutet, ist $\frac{1}{2}\sqrt{3}\,k$ nichts anderes als die Länge h der Höhe des Dreiecks. Somit kommt:

(4) $$x + y + z = h.$$

ies ist die Gleichung, die zeigt, wie man die dritte Dreieckskoordinate z ɡendeines Punktes P sofort in der Form

$$z = h - x - y \tag{5}$$

ɜrechnen kann, wenn man die beiden ersten Dreieckskoordinaten x ıd y von P kennt.

Der Umstand, daß sich die dritte Koordinate z in der Form (5) ırch die beiden ersten ausdrückt, macht es rechnerisch erklärlich, ıß es keinen Punkt P gibt, dessen Dreieckskoordinaten sämtlich negativ iren. Denn wenn x und y negativ sind, fällt z nach (5) positiv aus. ɔometrisch ergibt sich dasselbe daraus, daß es nach Fig. 152 kein ɔbiet gibt, in dem x, y, z alle drei das Minuszeichen haben. Dieıigen Punkte P, für die x oder y oder z gleich Null ist, liegen auf a er b oder c. Die Ecken A, B, C des Dreiecks sind dadurch gekenn- ichnet, daß von ihren Koordinaten je zwei gleich Null sind. Es gibt inen Punkt, dessen Koordinaten sämtlich gleich Null sind.

Wir erwähnen nun die Anwendung der Dreieckskoordinaten der Chemie, um deren Willen wir sie überhaupt besprechen: Wenn ɜ Längeneinheit gleich dem hunderten Teil der Höhe h des gleichtigen Dreiecks ABC gewählt wird, ist $h = 100$ zu setzen, so ß (4) gibt:

$$x + y + z = 100. \tag{6}$$

folgedessen kann man die Dreieckskoordinaten zur Veranhaulichung der prozentualen Anteile von drei Stoffen ı einer aus ihnen hergestellten Mischung oder Verbindung ınutzen. Enthält die Mischung x% des ersten und y% des zweiten offes, so muß sie $(100 - x - y)$% der dritten enthalten, und dies sind ch (6) gerade z%. Deshalb versinnlicht uns der Punkt P mit den ·eieckskoordinaten x, y, z eine bestimmte Art der Mischung. Bei dieser ɘutung sind x, y, z positive Größen; es kommt also nur das Innere des ·eiecks ABC in Betracht. Jeder Punkt auf einer der drei Kanten verschaulicht eine Mischungsart, bei der einer der drei Stoffe fehlt; jede r drei Ecken dient zur Versinnlichung eines der drei reinen, ungeschten Stoffe.

Man wird die Höhen des Dreiecks ABC zweckmäßig in Skalen rart einteilen, daß ihre Fußpunkte die Zahl 0 und ihre Enden die Zahl 0 tragen, und dann durch die Teilpunkte die Senkrechten zu den Höhen ıhen. In Fig. 155 sind nur die zu 10, 20, 30, ... gehörigen gezeichnet. t Hilfe des so entstehenden Netzes von Parallelenscharen kann man cht die Veranschaulichung bestimmter Mischungsarten vornehmen: ɹr Punkt P in Fig. 155 deutet diejenige Mischung an, bei der 10% des

ersten Stoffes mit 30% des zweiten und 60% des dritten Stoffes zusammentreten.

Eine Gerade g durch A hat nach Fig. 156 die Eigenschaft, daß für alle ihre Punkte P das Verhältnis von y zu z dasselbe ist, d. h. alle diejenigen Mischungen, in denen das Verhältnis des Anteils des zweiten zum Anteile des dritten Stoffes das nämliche ist, werden durch die Punkte einer Geraden g durch A dargestellt. Dabei teilt diese Gerade g die Kante BC in einem Punkte G so, daß das Verhältnis von BG zu GC gleich dem reziproken Werte jenes Verhältnisses ist.

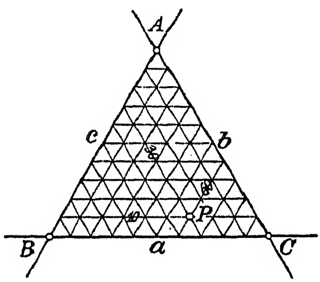


Fig. 155.

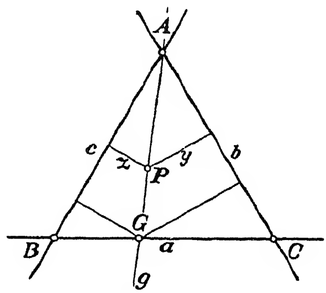


Fig. 156.

Wenn man will, kann man statt der lotrechten Abstände x, y, z der Punkte P von den Seiten des Dreiecks die oben eingeführten Strecken $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ als Dreieckskoordinaten der Punkte P benutzen. Sie sind zu den Seiten des Dreiecks parallel, siehe Fig. 153 auf S. 206. Da ihre Summe nach (3) gleich der Kantenlänge k ist, wird man dann $k = 100$ setzen. In diesem Fall bringt man die Skala von 1 bis 100 von C bis A, von A bis B und von B bis C an. Will man dann z. B. den Punkt P mit den Dreieckskoordinaten $\mathfrak{x} = 10$, $\mathfrak{y} = 30$, $\mathfrak{z} = 60$ haben, so zieht man durch den Teilpunkt 10 der Skala CA die Parallele zu BC, durch den Teilpunkt 30 der Skala AB die Parallele zu CA und durch den Teilpunkt 60 der Skala BC die Parallele zu AB. Alle drei schneiden einander, da die Summe von 10, 30 und 60 gleich 100 ist, in einem Punkte P. Man gelangt so zu demselben Punkte P wie in Fig. 155, wo $x = 10$, $y = 30$, $z = 60$ gewählt worden war. Also kommt die Benutzung der Dreieckskoordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, wenn man $k = 100$ setzt, auf dasselbe hinaus wie die Benutzung der Dreieckskoordinaten x, y, z, wenn man $h = 100$ setzt, und es ist Geschmackssache, was man lieber tun will.

Nach Fig. 153 sind $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ nichts anderes als schiefwinklige

Koordinaten des Punktes P in dem von a und b gebildeten Achsenkreuze, da $\mathfrak{x}$ parallel zu b und $\mathfrak{y}$ parallel zu a ist (vgl. S. 199). Daraus folgt, daß alle diejenigen Punkte P, für die zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ eine lineare Gleichung

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{x} + \mathfrak{b}\,\mathfrak{y} = \mathfrak{c} \tag{7}$$

besteht, in der $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ Konstanten sind, auf einer Geraden liegen. Selbstredend sollen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nicht beide gleich Null sein. Wegen (2) kann man statt (7) schreiben:

$$\frac{2\,\mathfrak{a}}{\sqrt{3}}x + \frac{2\,\mathfrak{b}}{\sqrt{3}}y = \mathfrak{c}.$$

Nach (4) ist ferner

$$\frac{x+y+z}{h}$$

gleich Eins. Daher darf rechts dieser Faktor hinzugefügt werden, ohne daß dadurch ein Fehler entsteht. Dann kommt:

$$\frac{2\mathfrak{a}}{\sqrt{3}}x + \frac{2\mathfrak{b}}{\sqrt{3}}y = \frac{\mathfrak{c}}{h}(x+y+z).$$

Bringen wir alle Glieder auf die linke Seite und fassen wir die mit x behafteten sowie die mit y behafteten zusammen, so geht augenscheinlich eine Gleichung von der allgemeinen Form hervor:

$$a\,x + b\,y + c\,z = 0, \tag{8}$$

wo a, b, c Konstanten sind.

Dieser Schluß läßt sich umkehren: Wir betrachten diejenigen Punkte, deren Koordinaten x, y, z eine Bedingung von der Form (8) erfüllen. Da z nach (4) gleich $h - x - y$ ist, läßt sich die Bedingung so schreiben:

$$a\,x + b\,y + c\,(h - x - y) = 0$$

oder

$$(a - c)\,x + (b - c)\,y = -\,c\,h.$$

Durch Multiplikation mit $2 : \sqrt{3}$ folgt hieraus nach (2):

$$(a - c)\,\mathfrak{x} + (b - c)\,\mathfrak{y} = -\frac{2\,c\,h}{\sqrt{3}}.$$

Dies ist eine lineare Gleichung in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, falls $a - c$ und $b - c$ nicht beide gleich Null sind, d. h. falls a, b, c nicht sämtlich einander gleich sind, und da $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$, wie gesagt, schiefwinklige Koordinaten in dem Achsenkreuz a, b sind, ist dies die Gleichung einer geraden Linie. Also hat sich ergeben: Dann und nur dann, wenn

die Dreieckskoordinaten x, y, z des Punktes P eine Bedingung von der Form

$$ax + by + cz = 0$$

befriedigen, in der nicht alle drei Konstanten a, b, c gleich groß sind, ist der Ort des Punktes P eine gerade Linie.

Daß der Fall $a = b = c$ unmöglich ist, sieht man daraus, daß die dann vorliegende Bedingung

$$x + y + z = 0$$

mit der Gleichung (4) oder (6) unvereinbar ist.

Fünftes Kapitel.

Grundbegriffe der Integralrechnung.

§ 1. Funktionen mit demselben Differentialquotienten.

Wir gehen von einer sehr einfachen Bemerkung aus:

Ist der Differentialquotient einer Funktion $y = f(x)$ für alle Werte von x gleich Null, so ist die Funktion eine Konstante. Die Bildkurve der Funktion hat nämlich, wenn ihr Differentialquotient überall gleich Null ist, überall Tangenten parallel zur x-Achse, kann also nie steigen oder fallen und muß folglich eine zur x-Achse parallele Gerade sein; mit anderen Worten: Die Ordinate y hat für alle Bildpunkte dieselbe Größe.

Wenn wir also von einer Funktion wissen, daß ihr Differentialquotient nicht nur für einzelne Stellen, sondern für alle Werte von x innerhalb eines Intervalls gleich Null ist, wissen wir auch, daß die Funktion innerhalb dieses Intervalls konstant sein muß.

Nun seien $u(x)$ und $v(x)$ zwei Funktionen von x, deren Differentialquotienten wir berechnen können. Wenn sich dabei herausstellt, daß beide Funktionen denselben Differentialquotienten haben, was können wir daraus folgern?

Wir schließen so: Auch die Differenz

$$y = u(x) - v(x)$$

ist eine Funktion von x. Nach der Summenregel ist ihr Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}.$$

Nach Annahme aber soll $du : dx$ dieselbe Funktion von x sein wie $\boldsymbol{dv : dx}$. Also heben sich die Glieder rechts gegenseitig fort, und es kommt:

$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

Nach der vorausgeschickten Bemerkung folgt somit, daß y eine Konstante ist. Da y die Differenz $u - v$ bedeutet, ist also $u - v = \text{konst.}$ Daher gilt der

Satz 1: Haben zwei Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ von x für jeden Wert von x übereinstimmende Differentialquotienten, so ist ihre Differenz konstant:

$$u(x) - v(x) = \text{konst.}$$

Wir können dies oft anzuwendende Ergebnis so erläutern: Angenommen, zwei Leute laufen hintereinander her. Sobald der eine langsamer laufe, tue es auch der andere; die Geschwindigkeit des einen sei also immer gerade so groß wie die des anderen. Der erste Läufer lege in x Sekunden den Weg $u(x)$ und der zweite den Weg $v(x)$ zurück, etwa in Metern gemessen. Nach S. 70 sind $du:dx$ und $dv:dx$ ihre Geschwindigkeiten zur Zeit x, und unsere Voraussetzung besagt, daß beide Geschwindigkeiten einander für jeden Wert von x gleich seien. Nun leuchtet ein, daß, wenn der erste Läufer zu Anfang c Meter Vorsprung hat, dieser Vorsprung immer derselbe bleibt. Also ist stets $u - v = c$, d. h. konstant.

Die Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ haben Bildkurven, siehe Fig. 157. Die Voraussetzung, daß $u(x)$ und $v(x)$ für jeden Wert der Abszisse denselben Differentialquotienten haben sollen, besagt im Bilde: Jede Parallele zur y-Achse trifft die Kurven in Punkten A und B, denen Tangenten mit derselben Steigung, d. h. parallele Tangenten zukommen. Satz 1 lehrt, daß infolge dessen die Ordinatendifferenz $u - v$ konstant, also $A_1 A_2 = B_1 B_2 = C_1 C_2$ usw. ist. Die Kurve (v) entsteht daher durch Verschieben der starr gedachten Kurve (u) um irgendeine Strecke parallel zur Ordinatenachse. Die Verschiebung kann nach oben oder nach unten stattfinden.

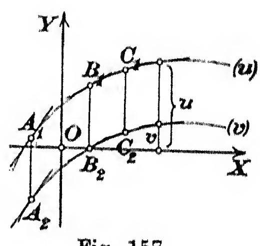


Fig. 157.

Den Satz 1 fassen wir noch etwas anders, indem wir die Gleichung des Satzes nach $v(x)$ auflösen:

Satz 2: Hat eine Funktion $v(x)$ für jeden Wert von x denselben Differentialquotienten wie eine Funktion $u(x)$, so hat sie die Form:

$$v(x) = u(x) + \text{konst.}$$

Häufig, bei den praktischen Anwendungen meistens, braucht man die unabhängige Veränderliche x nur in einem gewissen Intervalle,

indem x auf alle Werte zwischen zwei bestimmten Werten a und b beschränkt wird. Obgleich wir in Satz 1 und 2 von „jedem" Wert von x gesprochen haben, ist damit doch nur jeder Wert innerhalb des für x erlaubten Intervalls gemeint.

Nach Satz 2 sind uns alle Funktionen mit einem vorgeschriebenen Differentialquotienten bekannt, sobald es uns gelingt, eine einzige derartige Funktion zu ermitteln. Fragen wir z. B. nach allen Funktionen, deren Differentialquotient $2x$ ist. Eine Funktion von dieser Art ist x^2; nach dem Satze sind also alle Funktionen von der verlangten Art von der Form $x^2 + \text{konst.}$

Daß sich unendlich viele Funktionen ergeben, indem eine willkürliche additive Konstante vorkommt, soll noch weiter erläutert werden. Wir benutzen dazu das soeben erwähnte einfache Beispiel.

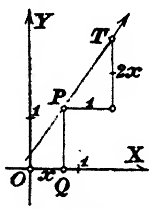


Fig. 158.

Da die Funktionen als Kurven abgebildet werden und die Differentialquotienten die Steigungen der Tangenten angeben, bedeutet die Frage geometrisch: Wie sieht eine Kurve aus, bei der die Steigung der Tangente an jeder Stelle $(x; y)$ gleich $2x$ ist? Wir können leicht an jeder Stelle der Ebene eine Gerade von dieser Steigung zeichnen. Wenn wir z. B. die Einheiten auf beiden Achsen gleich groß wählen und irgendeinen Punkt P annehmen (siehe Fig. 158), hat er ein bestimmtes $x = OQ$. Wir gehen nun von P wagerecht um eine Einheit nach rechts weiter und dann um die Strecke $2x$ nach oben weiter (nach unten, wenn x negativ ist, also P links von der y-Achse liegt). Dadurch kommen wir zu einem Punkte T, der, mit P verbunden, diejenige Gerade durch P liefert, die die vorgeschriebene Steigung hat. Weil die Tangente immer nur in nächster Nähe ihres Berührungspunktes von Bedeutung für die Kurve ist, zeichnen wir nur ein kurzes Stück der Geraden PT durch P als einen Pfeil. Führen wir dies für viele Punkte der Ebene aus, so ergibt sich die Darstellung in Fig. 159. Allen Punkten P, die untereinanderliegen, kommen parallele Pfeile zu, weil sie dasselbe x haben. Die Aufgabe ist, eine Kurve zu zeichnen, die in jedem ihrer Punkte P den zugehörigen Pfeil be-

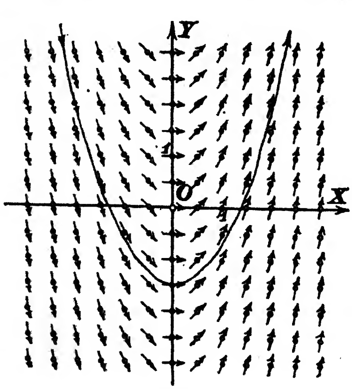


Fig. 159.

rührt. Die Pfeile sind Wegweiser für die einzuschlagende Richtung. Überläßt man sich der Strömung, die sie anzeigen, so erhält man Kurven wie die eingezeichnete, die wir absichtlich freihändig gezogen haben. (Nach S. 95 sind es übrigens Parabeln.)

Die Fig. 159 bezieht sich auf den Fall, wo der vorgeschriebene Differentialquotient gleich $2x$ ist. Ist ein anderer Differentialquotient vorgeschrieben, so hat man durch jeden Punkt $(x; y)$ der Ebene diejenige Gerade zu legen, die dort gerade diesen als Steigung hat. Man bekommt dann ein anderes Bild, das aber ebenfalls den Eindruck einer Strömung macht und bei dem wieder Punkte mit gleichem x parallele Wegweiser haben. Hiermit ist ein Verfahren gefunden, mittels dessen man die Aufgabe, zu einem gegebenen Differentialquotienten die zugehörigen Funktionen zu finden, angenähert durch das Zeichnen von Bildkurven, von Stromlinien, lösen kann. Bei jeder derartigen Aufgabe sind, wie bewiesen wurde, alle Bildkurven einander kongruent. Ist eine von ihnen gezeichnet, so kann man alle andern so herstellen: Man paust die Kurve und die y-Achse durch und verschiebt dann das Pauspapier längs der y-Achse. In jeder Lage gibt die Kurve auf dem Pauspapier eine der gesuchten Bildkurven.

Dies angenäherte Verfahren gibt uns aber nicht die Formel für die erfragten Funktionen. Es ist bloß ein guter Notbehelf.

Daß die Frage nach denjenigen Funktionen, die einen gegebenen Differentialquotienten haben, häufig in den Anwendungen auftritt, soll durch zwei Beispiele verdeutlicht werden:

1. Beispiel: In einem zylindrischen Gefäß, das um seine lotrechte Achse gedreht werden kann, sei Wasser. Die bei der Drehung auftretende Flieh- oder Zentrifugalkraft bewirkt eine Krümmung der Oberfläche des Wassers. Ist die Drehung gleichmäßig, so bildet sich ein Gleichgewichtszustand aus. Die Frage ist, welche Oberfläche das Wasser dann hat. Natürlich ist sie eine Rotationsfläche, d. h. eine Fläche, die durch Drehen einer ebenen Kurve um die Achse entsteht. Wir fragen nach dieser ebenen Kurve, dem Profil oder axialen Querschnitte der Oberfläche. Wir fassen — siehe Fig. 160 — irgendeine Stelle P dieses Profils ins Auge, benutzen die Drehachse als y-Achse und die wagerechte Gerade des Axialschnitts, die auf dem Gefäßboden liegt, als x-Achse, so daß der Punkt P Koordinaten x und y hat. Auf beiden Achsen nehmen wir dieselbe Längeneinheit an. Zu jedem Abstande x von der Drehachse gehört eine gewisse Höhe y der Oberfläche; also ist y eine vorerst noch unbekannte Funktion von x. Um diese Funktion zu ermitteln, denken wir uns die oberste Schicht des Wassers längs des Profils in lauter gleich schwere sehr kleine Teilchen zerlegt. Auf jedes Teilchen wirkt

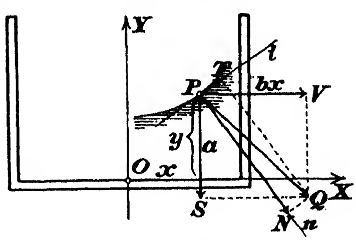


Fig. 160.

die Schwere mit derselben Kraft nach unten. Sie sei mit a bezeichnet und durch die Strecke PS veranschaulicht. Die Zentrifugalkraft dagegen, die wagerecht nach außen hin wirkt, ist nicht für alle jene Teilchen dieselbe, vielmehr bekanntlich (wie beim Gesetze des Hebels) proportional zur Entfernung x des Teilchens von der Drehachse. Ist sie in der Entfernung Eins gleich b, so ist sie für das in P befindliche Teilchen gleich $b\,x$, dargestellt durch eine gewisse Strecke PV. Beide Kräfte haben eine Mittelkraft PQ. Diese können wir nun in zwei Komponenten zerlegen, eine längs der Tangente t der Profilkurve, eine längs der Normale n zu t durch P. Der Komponente PN längs n wird durch die Unzusammendrückbarkeit des Wassers das Gleichgewicht gehalten, die Komponente PT längs t dagegen bewirkt eine Fortbewegung des Teilchens P auf der Oberfläche des Wassers. Wegen des erreichten Gleichgewichtszustandes aber darf das Teilchen P bei der Drehung nur um die Achse rotieren. Also muß die Komponente PT gleich Null, d. h. PQ senkrecht zu t sein, so daß Q mit N zusammenfällt, siehe Fig. 161. Bedeutet P' auf der Profilkurve einen unendlich nahe an P heranrückenden Punkt, dessen Koordinaten um $d\,x$ und $d\,y$ größer als die von P sind, so kommt P' auf die Tangenten t von P, und das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten $d\,x$, $d\,y$ wird dem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten $VN = a$ und $PV = b\,x$ ähnlich, da $PP' \perp PN$ wird. Also folgt:

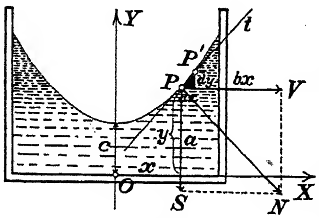


Fig. 161.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{bx}{a}.$$

Die **Profilkurve** ist somit das **Bild einer Funktion** y von x, deren **Differentialquotient** gleich $b\,x : a$ ist. Von jetzt an liegt die rein mathematische Aufgabe vor: Welche Funktionen y von x haben den Differentialquotienten $b\,x : a$? Da x der Differentialquotient von $\frac{1}{2}x^2$ ist, stellt $b\,x : a$ den Differentialquotienten von $\frac{1}{2}b\,x^2 : a$ vor. Also fragen wir: Welche Funktionen haben denselben Differentialquotienten wie die Funktion $\frac{1}{2}b\,x^2 : a$? Nach Satz 2 sind es die Funktionen:

$$y = \frac{b}{2\,a}\,x^2 + c,$$

wo c irgendeine Konstante bedeutet. Mithin ist die Profilkurve eine **Parabel** (vgl. S. 95), die die Drehachse als Symmetrieachse hat. Dabei bedeutet c die Höhe des tiefsten Punktes über der Bodenfläche. Über die Feststellung der Werte von a und b sei kurz bemerkt: Hat das Teilchen bei P die Masse μ, so ist sein Gewicht $a = g\,\mu$ kg, wo g die **Gravitationskonstante** 9,81 bedeutet, falls die Längeneinheit das Meter ist. Macht das Gefäß in der Sekunde n Drehungen, so ist die Zentrifugalkraft b ein Meter entfernt von der Drehachse gleich $4\,\pi^2 n^2 \mu$. Daher ist:

$$\frac{b}{2\,a} = 2\,\frac{\pi^2 n^2}{g},$$

mithin:

$$y = 2\,\frac{\pi^2 n^2}{g}\,x^2 + c.$$

Finden z. B. in der Sekunde zwei Umdrehungen statt, so ist $n = 2$ und

$$y = 8{,}05\,x^2 + c.$$

Wenn die Längeneinheit nicht das Meter, sondern das Zentimeter ist, kommt:

$$y = 0{,}0805\, x^2 + c\,.$$

Ist der Radius des Gefäßes 10 cm, so geht hieraus für die höchste Stelle $x = 10$ der Wert $y = 8{,}05 + c$ hervor. Diesen Fall zeigt Fig. 161 in verkleinertem Maßstab.

2. Beispiel: Um die ungefähre Form der Kette einer Hängebrücke zu ermitteln, können wir uns vorstellen, zwischen zwei gleichhohen Punkten A und B hänge ein Seil, von dem lotrechte Seile ausgehen, die einen schweren Stab CD wagerecht tragen. Siehe Fig. 162. Gegenüber der Schwere dieses überall gleich starken Stabes komme das Gewicht der unausdehnbar gedachten Seile nicht in Betracht. Der tiefste Punkt des tragenden Seils AB sei O. Die Wagerechte durch O sei die x-Achse, die Lotrechte durch O die y-Achse; auf beiden benutzen wir dieselbe Längeneinheit. Die Längeneinheit des Stabes habe das Gewicht k. Auf irgend ein Stück OP des Seils wirkt das Gewicht des zugehörigen Stabstückes UQ. Ist x die Abszisse von P, so ist dies Gewicht gleich kx. Das Gleichgewicht wird nicht gestört, wenn wir uns den Bogen OP starr denken. Auf ihn wirken dann drei Kräfte: Erstens die Schwere kx, die längs der Mittellinie zwischen der y-Achse und der Lotrechten PQ angreift, zweitens die Spannung s_0, die die andere Seilhälfte in O nach der negativen x-Achse hin ausübt, drittens die Spannung s, die das obere Reststück PA des Seils ausübt. Diese greift in P in der Richtung der Tangente von P an. Alle drei Kräfte können einander nur dann das Gleichgewicht halten, wenn sich aus ihnen, parallel verschoben, ein geschlossenes Dreieck, und zwar unter Beachtung der Fortschreitungssinne der Kräfte, bilden läßt. Siehe die Nebenfigur. Die Koordinaten eines zu P unendlich benachbarten Punktes P' unterscheiden sich von denen von P um dx, dy, und P' liegt auf der Tangente von P. Da s die Richtung der Tangente hat, wird das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten dx, dy zum rechtwinkligen Dreieck der Nebenfigur ähnlich und ähnlich gelegen. Hieraus folgt:

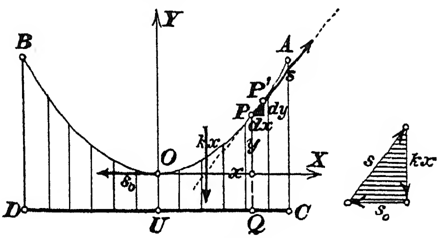


Fig. 162.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{kx}{s_0}\,.$$

Wie k ist auch s_0 konstant, weil s_0 die Spannung an einer ganz bestimmten Stelle, nämlich in O, bedeutet. Hiernach ist die Seilkurve die Bildkurve einer Funktion y von x, deren Differentialquotient gleich $kx : s_0$ ist. Welche Funktion ist dies? Die Frage ist dieselbe wie im vorigen Beispiele, nur stehen k und s_0 an Stelle von b und a. Daher kommt:

$$y = \frac{k}{2\,s_0}\, x^2 + \text{konst.}$$

Weil für $x = 0$ auch $y = 0$ (in O) ist, muß die additive Konstante gleich 0 sein. Also ist:

$$y = \frac{k}{2\,s_0}\, x^2\,.$$

Das Seil bildet daher eine **Parabel**[1].

In beiden Beispielen zerfiel die Lösung der Aufgabe in zwei Teile. Im ersten Teil wurde durch Betrachtungen aus der Mechanik festgestellt, welchen Differentialquotienten die gesuchte Funktion haben muß. Dann lag die rein mathematische Aufgabe vor, eine Funktion zu finden, die diesen Differentialquotienten hat.

§ 2. Das Integral.

Handelt es sich darum, ein noch unbekanntes Gesetz zwischen zwei Veränderlichen x und y zu ermitteln, so weiß man zunächst meistens von der gesuchten Funktion y von x, daß sie für einen gewissen bekannten Wert von x auch einen bekannten Wert hat. Handelt es sich z. B. um die Bestimmung des beim freien Fall in x Sekunden zurückgelegten Weges y, so ist für $x = 0$ auch $y = 0$. Oder: Will man das Gesetz ausfindig machen, nach dem sich ein erhitzter Körper mit der Zeit x abkühlt, so wird man von einem Anfangszustande des Körpers ausgehen, also annehmen, daß er zu einer bestimmten Zeit so und so warm sei. Solche Angaben nennt man die gegebenen Anfangswerte von x und y.

Man wird dagegen im allgemeinen nicht wissen, wie groß y für ein beliebiges x ausfällt. Wohl aber wird es oft gelingen, in jedem Augenblicke festzustellen, um wieviel sich y von da an ändert, wenn sich x von diesem Zustand aus weiter um eine sehr kleine, genauer um eine unendlich kleine Größe ändert. Denn viele Naturerscheinungen bieten erheblich einfachere Verhältnisse dar, wenn man sie nur für eine unendlich kleine Spanne von Veränderungen ins Auge faßt. Man ist also oft imstande, durch Betrachtungen nicht mathematischer Natur das Folgende zu ermitteln: Vorausgesetzt, die unabhängige Veränderliche habe irgendeinen Wert x erreicht und ändere sich nun um ein Differential dx weiter; dann ändert sich die abhängige Veränderliche um das zugehörige Differential dy, und das Verhältnis $dy : dx$ ist als Funktion von x bekannt. Wir kommen so zu der Aufgabe:

Unter y wird eine noch unbekannte Funktion von x verstanden. Für einen bekannten Anfangswert a von x habe y einen bekannten Anfangswert b; außerdem sei be-

[1] Etwas ganz anderes ergibt sich, wenn ein schweres homogenes Seil allein aufgehängt wird, also ein Seil, bei dem das Gewicht des Teils OP nicht zur Abszisse x von P, sondern zur Länge des Seilbogens OP proportional ist. Dann geht die Kettenlinie hervor, die wir später besprechen.

kannt, wie sich $dy:dx$ durch x ausdrückt, d. h. es liege außerdem eine Formel vor von der Form:

$$\frac{dy}{dx} = f(x). \tag{1}$$

Mit anderen Worten: der Differentialquotient von y sei gegeben. Wie drückt sich dann y selbst durch x aus?

Dies ist die Grundaufgabe der Integralrechnung. Man nennt die gesuchte Funktion y von x ein Integral; die Aufgabe, sie zu finden, bezeichnet man als die Aufgabe, $f(x)$ zu integrieren. Warum man die gesuchte Funktion ein Integral nennt, das soll jetzt durch eine Betrachtung erläutert werden, die zugleich die zu lösende Aufgabe anschaulicher macht. Dabei wird es sich empfehlen, ein einfaches Beispiel ins Auge zu fassen:

Gesucht wird eine Funktion y von x. Erstens soll $y = 0$ sein, wenn $x = 3$ ist.[1] Zweitens soll y den Differentialquotienten haben:

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{10} x^2. \tag{2}$$

Die Forderung (2) kann so geschrieben werden:

$$dy = 0{,}1\, x^2 dx. \tag{3}$$

Sie zeigt: Wenn x z. B. den Wert 4 erreicht hat und dann von da um unendlich wenig, um dx, zunimmt, wird y um $0{,}1 \cdot 16 \cdot dx$ oder $1{,}6\, dx$ zunehmen. So können wir für jeden Wert von x feststellen, um wieviel y wächst, wenn x unendlich wenig von dem angenommenen Wert an weiter wächst. Wir kennen also alle kleinsten Teilchen dy, aus denen sich y Schritt für Schritt durch fortwährende Addition zusammensetzt. Deshalb hat zuerst Jakob Bernoulli (1654—1705) oder vielleicht sein Bruder Johann (1667—1748), beide schweizerische Zeitgenossen von Leibniz (S. 69), die gesuchte Funktion y die functio integralis, das Integral, nämlich den Gesamtwert oder das Ganze genannt im Gegensatze zu ihren kleinsten Teilchen dy, den Differentialen.

Wir können nun ein Näherungsverfahren anwenden, das zwar mühselig ist, aber zu einer besseren Einsicht verhilft:

Zuerst ist $x = 3$ und $y = 0$. Lassen wir x von 3 an um recht wenig, z. B. um 0,01 zunehmen und fassen wir diese Zunahme angenähert als das Differential dx auf, so zeigt (3), daß y um $0{,}1 \cdot 3^2 \cdot 0{,}01$, also um

[1] Dies ist eine willkürliche Annahme. Entsprechend wie im folgenden wäre die Aufgabe zu behandeln, wenn man als Anfangswert von x irgendeine andere bestimmte Zahl wählte.

0,009 zunimmt. Da y zuerst gleich Null war, haben wir jetzt zwei Wertepaare:

x	y
3	0
3,01	0,009

Vom Wert 3,01 ar wachse x wieder um 0,01. Wenden wir abermals die Formel (3) an, indem wir jetzt $x = 3{,}01$ annehmen und dx durch 0,01 ersetzen, so geht als Zuwachs von y der Wert $0{,}1 \,.\, 3{,}01^2 \,.\, 0{,}01$ oder 0,009 060 1 hervor. Damit erhalten wir ein drittes Wertepaar:

x	y
3,02	0,018 060 1

Von diesem Zustand aus wachse x abermals um 0,01. Die Formel (3) gibt jetzt, ebenso wie vorher angewandt, als Zuwachs von y den Wert $0{,}1 \,.\, 3{,}02^2 \,.\, 0{,}01$ oder 0,009 120 4, so daß ein viertes Wertepaar hervorgeht:

x	y
3,03	0,027 180 5

So könnten wir fortfahren. Während x Schritt für Schritt um dieselbe Größe 0,01 wächst, ist die Zunahme von y Schritt für Schritt anders, nämlich zuerst 0,009, dann 0,009 060 1, dann 0,009 120 4 usw. Dies hat seinen Grund darin, daß in (3) rechts die Größe x auftritt, die von Schritt zu Schritt einen anderen Wert hat, nämlich zuerst 3, dann 3,01, dann 3,02, dann 3,03 usw.

Dies Verfahren ist nur angenähert; richtig wäre es nur dann, wenn der jeweilige Zuwachs von x nicht 0,01, sondern unendlich klein wäre. Infolgedessen häuft sich Fehler auf Fehler. Die Fehler lassen sich verringern, wenn man viel kleinere Schritte macht, z. B. x immer um 0,000 001 wachsen läßt; dann kommt man aber auch viel langsamer vorwärts. Immerhin können wir uns eine Vorstellung davon machen, wie das y, das irgendeinem Wert x entspricht, als Summe aller derjenigen unendlich vielen und unendlich kleinen Zunahmen dy hervorgeht, die y Schritt für Schritt vom Wert Null an erfährt, wenn die unabhängige Veränderliche vom Wert 3 an bis x wächst. Diese Vorstellung führt uns zu der für Integrale gebräuchlichen Bezeichnung:

Eine Summe nämlich, die aus vielen Gliedern besteht, die nach einem gewissen Gesetz aufeinander folgen, schreibt man am be-

quemsten so, daß man nur ein allgemeines Glied der Summe angibt, davor das Zeichen S (= Summe) setzt und sonst noch genügende Angaben macht, aus denen herauszulesen ist, was gemeint ist. Man kann z. B. die Summe

$$\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\cdots+\tfrac{1}{99}+\tfrac{1}{100}$$

so schreiben:

$$\mathop{\mathrm{S}}_{1}^{100}\frac{1}{n},$$

auch wird man sofort wissen, was der Ausdruck

$$\mathop{\mathrm{S}}_{4}^{10} n^2$$

bedeutet, nämlich die Summe der n^2, gebildet für alle Werte $n=4$, $5, \ldots 10$, also $4^2+5^2+\ldots 10^2$. Ähnlich verfahren wir nun, um das Integral y auszudrücken. Hier handelt es sich aber um eine Summe von nach Null strebenden Größen, deren Anzahl über jede Zahl wächst. Derartige Summen bezeichnet man nach Leibniz mit einem langgezogenen Summenzeichen, dem Integralzeichen $\int$. (Man unterscheidet also wie zwischen dem Differential dx und der Differenz Δx, vgl. S. 67.) Wir schreiben also nach (3) so:

$$y=\int_3^x 0{,}1\, x^2\, dx. \tag{4}$$

Diese Formel soll besagen:

y ist die Summe aller unendlich kleinen Zunahmen dy, die die Werte $0{,}1\, x^2\, dx$ haben, wobei jedoch in diesen Summanden die Größe x nach und nach die Werte 3, $3+dx$, $3+2dx$, $3+3dx\ldots$ haben soll, bis die unabhängige Veränderliche nach unendlich vielen Schritten irgendeinen Wert x erreicht hat.

Gelesen wird (4) so: y ist das Integral über $0{,}1 . x^2 . dx$ von 3 bis x. Übersetzt man sich die Worte „Integral über" mit „Summe aller", so ist die Redeweise völlig verständlich. Aber die Formel (4) ist nicht die Lösung der gestellten Aufgabe, sondern nur eine andere Ausdrucksweise der noch zu lösenden Aufgabe. Wir haben es, wie der Leser sieht, gar nicht eilig mit der Lösung der Aufgabe; die wird sich nachher sehr einfach ergeben. Vorläufig ist es uns viel wichtiger, den Anfänger mit dem Wesen der Aufgabe und der gebräuchlichen eigentümlichen Darstellung (4) vertraut zu machen.

Und dies wird uns noch besser gelingen, wenn wir nunmehr daran gehen, der Summe (4) eine graphische Bedeutung beizulegen.

Die Formel (3) lautete:

$$dy = 0{,}1\,x^2\,dx.$$

Sie gibt den jeweiligen Zuwachs von y als Produkt von $0{,}1\,x^2$ und dx an. Dabei ist dx der etwa wie vorhin immer gleich groß angenommene, aber nach Null strebende Zuwachs von x. In $0{,}1\,x^2$ dagegen ist für x der jeweils schon erreichte Wert zu setzen, von dem aus die unabhängige Veränderliche beim nächsten Schritte wieder um dx bis zum folgenden Werte $x + dx$ zunimmt. Das Produkt aus dx und $0{,}1\,x^2$ kann man nun bildlich durch die Fläche eines Rechtecks darstellen, dessen Seiten die Längen dx und $0{,}1\,x^2$ haben. Wir nehmen ein Achsenkreuz an, siehe Fig. 163, und errichten als Ordinaten die jeweiligen Werte von $0{,}1\,x^2$. Da wir mit y die gesuchte, uns noch unbekannte Funktion, bezeichnet haben, müssen wir aber diese Ordinaten zur Vermeidung von Verwechselungen anders bezeichnen, etwa mit z. Wir benutzen also ein xz-Koordinatensystem. Zu einer beliebigen Abszisse $OQ = x$ gehört dann eine Ordinate $QP = z = 0{,}1\,x^2$. Wir gelangen so zu einer Kurve, die wir bei der Abszisse $x = 3$, dem Anfangswerte von x, beginnen. Hier ist $z = 0{,}1 \,.\, 9$. Dazu gehört die Stelle B_0 mit der Abszisse $OA_0 = 3$. (Die Kurve $B_0 P$ ist als Bildkurve der quadratischen Funktionen $0{,}1 x^2$ eine Parabel. Doch ist dies für unsere Betrachtung ziemlich gleichgültig.) Die Ordinaten z stellen allgemein den einen Faktor $0{,}1 x^2$ des Produktes $0{,}1 x^2 \cdot dx$ dar. Der andere Faktor dx ist als unendlich kleiner Zuwachs von x eine unendlich kurze Strecke der Abszissenachse. Statt ihrer nehmen wir eine kurze Strecke $A_0 A_1 = A_1 A_2 = A_2 A_3 = \cdots$ für das Differential dx an, so daß sich die Figur streng genommen nur auf jene oben erläuterte angenäherte Behandlung der Aufgabe bezieht.

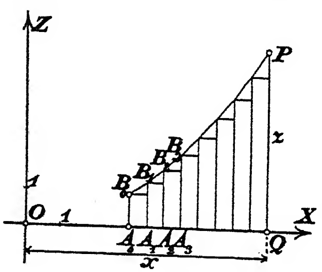


Fig. 163.

Jetzt liegt die Sache so: Zuerst ist $x = 3$, also der eine Faktor $0{,}1 x^2$ des Produktes

$$dy = 0{,}1 x^2 dx$$

die Ordinate $A_0 B_0$, der andere Faktor dx dagegen wird durch die kleine Strecke $A_0 A_1$ dargestellt. Das Produkt dy ist daher die Fläche des

aus $A_0 A_1$ und $A_0 B_0$ zu vervollständigenden Rechtecks. Nunmehr ist x von 3 oder OA_0 bis zum Wert $3 + dx$ oder OA_1 gewachsen. Die Ordinate $A_1 B_1$ stellt jetzt wieder den zugehörigen Wert $0{,}1\,x^2$ dar, also den ersten Faktor des Produkts dy, während der zweite Faktor wieder dx, d. h. die kleine Strecke $A_1 A_2 (= A_0 A_1)$ ist. Dies Produkt dy, d. h. das zweite Glied der zu berechnenden Summe, ist demnach der Inhalt des aus $A_1 A_2$ und $A_1 B_1$ zu vervollständigenden Rechtecks. Alsdann ist x bis zum Wert $3 + 2dx$ oder OA_2 gewachsen. Jetzt ist also $0{,}1\,x^2$ oder $0{,}1 \cdot OA_2{}^2$ die Ordinate $A_2 B_2$ und dx gleich $A_2 A_3$. Daher hat das aus $A_2 A_3$ und $A_2 B_2$ zu vervollständigende Rechteck als Inhalt den dritten Summanden jener Summe, usw. Hierbei ist noch anzumerken: Wenn wir die z-Einheit gleich der x-Einheit wählen, wie es in Fig. 163 geschehen ist, gilt als die Flächeneinheit das Quadrat über dieser Längeneinheit.

Gehen wir so Schritt für Schritt weiter, bis die unabhängige Veränderliche x irgendeinen Wert OQ erreicht hat, so ist der zugehörige Wert der gesuchten Funktion y die Summe der Inhalte aller jener Rechtecke. Richtig wird die Figur 163 erst, wenn die Strecke $A_0 A_1 (= A_1 A_2 = A_2 A_3 = \cdots)$ nach Null strebt. Das läßt sich nicht zeichnen, wohl aber denken.

Die Punkte $B_0, B_1, B_2, B_3 \ldots$ sind die Stufeneckpunkte einer Treppe, die unterhalb der Bildkurve der Funktion $z = 0{,}1\,x^2$ hinläuft. Alle Stufen sind gleichbreit, nämlich gleich dx. Dagegen sind die Stufen verschieden hoch, weil die Bildkurve verschieden stark ansteigt. Aber auch die Stufenhöhen sind unendlich klein. Denn wir haben uns die Ordinaten $A_0 B_0$, $A_1 B_1$, $A_2 B_2 \ldots$ unendlich dicht nebeneinander zu denken; daher ist jede folgende nur unendlich wenig von der vorhergehenden verschieden, weil $z = 0{,}1\,x^2$ als quadratische Funktion stetig ist.

Mittlerweile wird der Leser selbst schon zu einer Vermutung darüber gelangt sein, was durch die Summe y der Inhalte aller jener unendlich schmalen Rechtecke dargestellt wird, nämlich die Fläche, die einerseits von der Abszissenachse, andererseits von der Kurve $B_0 P$ und links und rechts von den Ordinaten $A_0 B_0$ und QP umgrenzt wird.

In unserer Figur 163 freilich ist diese Fläche größer als die Summe der Rechtecke, da zwischen Treppe und Kurve noch lauter kleine Dreiecke liegen. Wenn man sich aber vorstellt, daß die Ordinaten $A_0 B_0$, $A_1 B_1$, $A_2 B_2 \ldots$ unendlich nahe aufeinanderfolgen, kann man beweisen, daß der Unterschied, nämlich die Summe der Inhalte dieser Dreiecke, nach Null strebt. Dies geschieht so:

In Fig. 164 haben wir Fig. 163 wiederholt und außerdem noch oberhalb der Bildkurve eine zweite Treppe mit denselben Stufenbreiten

eingezeichnet. Zwischen beiden Treppen liegen kleine Rechtecke, die in Fig. 164 geschrafft sind. Offenbar ist die Summe der vorhin erwähnten kleinen Dreiecke kleiner als die Summe dieser geschrafften Rechtecke. Daher genügt es, nachzuweisen, daß die Summe dieser Rechtecke unendlich klein wird. Ihre Summe kann man leicht bilden, indem man alle Rechtecke parallel zur x-Achse so weit

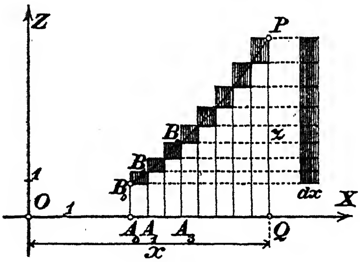


Fig. 164.

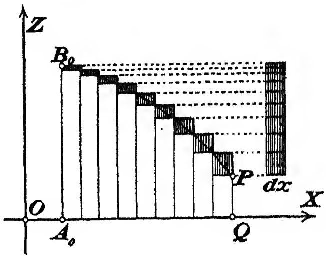


Fig. 165.

verschiebt, bis sie gerade übereinander liegen und eine Säule bilden, wie es in Fig. 164 geschehen ist. Die Grundlinie dieser Säule ist dx, die Höhe die Differenz von QP und A_0B_0, also ihr Flächeninhalt gleich dem Produkt der Strecke $QP - A_0B_0$ mit der nach Null strebenden Größe dx, und daher strebt der Flächeninhalt der Säule nach Null.

Dieselbe Schlußfolgerung gilt, was sogleich hier bemerkt werden kann, ganz unabhängig von der Gestalt der Bildkurve, die hier das Bild der Funktion $0{,}1\,x^2$ ist und in anderen Aufgaben eine andere Kurve sein wird. Denn wenn die Kurve nicht wie in Fig. 164 steigt, sondern wie in Fig. 165 fällt, läßt sich ebenfalls jene erste Treppe zeichnen, indem man wieder zwischen der Anfangsordinate A_0B_0 und der Endordinate QP lauter gleichschmale Rechtecke einschaltet, wobei die Höhe eines jeden Rechtecks stets gleich der linken begrenzenden Ordinate ist. Nur liegt hier diese erste Treppe oberhalb der Kurve. Die wie vorhin in Fig. 164 konstruierte zweite Treppe liegt dagegen jetzt unterhalb der Kurve, aber die Differenz zwischen den Flächeninhalten bis zur einen und anderen Treppe ist auch jetzt gleich dem Inhalt einer Säule und strebt also nach Null, weil die Säule unendlich schmal wird.

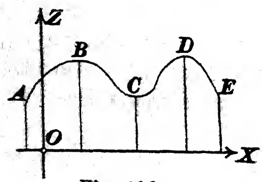


Fig. 166.

Wenn endlich die Bildkurve teils steigt, teils fällt, wie in Fig. 166, kann man sie in einzelne Teile AB, BC, CD, DE zerlegen, so daß sie in jedem einzelnen Teile nur steigt oder nur fällt. Für die Teile AB

und CD gilt dieselbe Schlußfolgerung wie bei Fig. 164, für die Teile BC und DE dieselbe wie bei Fig. 165. Das Endergebnis ist also auch hier, daß die Summe der schmalen Rechtecke, deren Höhen jeweils die links gelegenen Ordinaten sind, nach der Fläche strebt, die statt von der ersten Treppe von der Kurve begrenzt wird, sobald die Rechteckbreiten nach Null streben[1]. Also folgt:

Satz 3: Liegt in der Ebene die Bildkurve einer Funktion $z = f(x)$ vor, die innerhalb des Intervalls, in dem man die Werte der Abszisse x betrachtet, stetig ist, so ist die Fläche, die von der x-Achse, von der Anfangs- und der Endordinate A_0B_0 und QP und von der Kurve begrenzt wird (siehe Fig. 167), gleich der Summe der Inhalte derjenigen unendlich vielen gleichbreiten, aber unendlich schmalen Rechtecke, die man sich in folgender Weise hergestellt zu denken hat: Man teilt A_0Q in lauter gleich große und nach Null strebende Teile dx, errichtet in jedem Teilpunkte die Ordinate bis zur Kurve und zieht durch jeden Ordinaten-Endpunkt die Parallele zur x-Achse im positiven Sinn dieser Achse bis zur folgenden Ordinate, die, wenn nötig, zu verlängern ist. Diese Geraden begrenzen die Rechtecke.

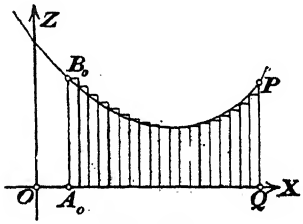


Fig. 167.

Unser Satz gilt auch, wenn die Bildkurve teils oder ganz unterhalb der x-Achse verläuft. Doch wollen wir dies erst nachher erläutern, um jetzt nicht zu weit abzuschweifen.

Kehren wir vielmehr zu der auf S. 219 gestellten Aufgabe zurück. Sie bestand darin, diejenige Funktion y von x zu finden, die für $x = 3$ den Wert Null hat und deren Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = 0{,}1\ x^2$$

ist. Einerseits sahen wir, daß wir die Aufgabe durch die Formel

$$y = \int_3^x 0{,}1\ x^2\,dx$$

ausdrücken können. Andererseits haben wir erkannt, daß sich y als

[1] Dieser Schluß gilt nicht mehr, wenn die Kurve in dem betrachteten Intervall unendlich oft steigt und fällt. Aber derartige außergewöhnliche Funktionen kommen für uns nicht in Betracht.

die Summe der Inhalte von unendlich vielen unendlich schmalen Rechtecken auffassen läßt und daß diese Summe nichts anderes ist als die Fläche, die von der x-Achse, von der Ordinate der Stelle $x = 3$, von der Ordinate der beliebigen Stelle x und von der Bildkurve der Funktion $z = 0{,}1x^2$ begrenzt wird. Siehe Fig. 168.

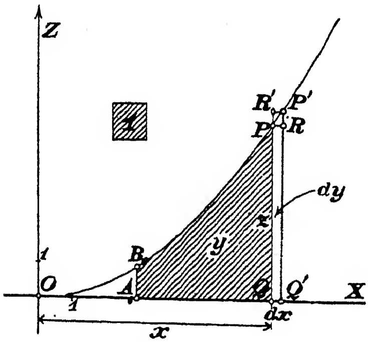


Fig. 168.

Dabei gilt als Flächeneinheit, weil wir x und z mit derselben Einheit gemessen haben, das Quadrat, dessen Seite eben jene Einheit ist. Es ist in Fig. 168 besonders angegeben. (Die Figur brauchen wir nachher noch einmal, daher die dann zu besprechenden übrigen Angaben darin.) Beide Arten, uns von der gesuchten Funktion y von x einen Begriff zu machen, geben noch keineswegs die Lösung der Aufgabe.

Aber wir wollen diese Lösung jetzt endlich bringen. Sie ist sehr einfach: y soll ja den Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = 0{,}1\,x^2$$

haben. Nun hat x^3 den Differentialquotienten $3x^2$, also $\frac{1}{3}x^3$ den Differentialquotienten x^2, daher $\frac{1}{3} \cdot 0{,}1 \cdot x^3$ den Differentialquotienten $0{,}1x^2$. Mithin ist $\frac{1}{30}x^3$ eine Funktion, die denselben Differentialquotienten wie y hat. Nach Satz 2, S. 213, hat daher y die Form

$$y = \frac{x^3}{30} + c,$$

wo c eine Konstante ist. Da ferner für $x = 3$ der Wert der Funktion y gleich Null sein soll, muß

$$0 = \tfrac{9}{10} + c, \quad \text{d. h.} \quad c = -\tfrac{9}{10}$$

sein. Demnach ist

$$y = \tfrac{1}{30}x^3 - \tfrac{9}{10} \tag{5}$$

die gesuchte Funktion.

Also hat die in Fig. 168 geschraffte Fläche den Wert (5), wo x gleich OQ ist. In der Figur haben wir $OQ = 7$ angenommen, so daß sich für y der Wert $\frac{1}{30} \cdot 7^3 - \frac{9}{10}$ oder $10{,}533\ldots$ ergibt. Die Fläche beträgt mithin das $10{,}533\ldots$ fache des angegebenen Quadrats.

Wir können die Aufgabe und ihre Lösung (5) in der einen Gleichung zusammenfassen:

$$\int_3^x 0{,}1\, x^2\, dx = \tfrac{1}{30}\, x^3 - \tfrac{9}{10}. \tag{6}$$

Verweilen wir noch ein wenig bei ihrer geometrischen Deutung in Fig. 168. Lassen wir die Endabszisse x oder OQ um unendlich wenig, um dx oder QQ', zunehmen, so ändert sich auch die Fläche y. Sie wächst um den Inhalt dy des unendlich schmalen Streifens $PP'QQ'$, der oben durch ein unendlich kurzes Kurvenstück PP' begrenzt wird. Der Inhalt des Streifens ist größer als der des Rechtecks $PRQQ'$. Wenn wir durch P' die Parallele zur x-Achse ziehen, bis sie die verlängerte Ordinate QP in R' trifft, entsteht dagegen ein zu großes Rechteck $R'P'QQ'$. Also ist:

$$\text{Rechteck } PRQQ' < dy < \text{Rechteck } R'P'QQ'.$$

Da QP die zu x gehörige Ordinate $z = 0{,}1 x^2$ und $Q'P'$ die zu $x + dx$ gehörige Ordinate $0{,}1\,(x + dx)^2$ ist, kommt:

$$0{,}1 x^2 \,.\, dx < dy < 0{,}1\,(x + dx)^2 \,.\, dx\,.$$

Dividieren wir mit dem Zuwachs dx, der positiv ist, so bleibt nach wie vor der erste Ausdruck kleiner als der zweite und dieser kleiner als der dritte. Also kommt:

$$0{,}1 x^2 < \frac{dy}{dx} < 0{,}1 x^2 + 0{,}2\, x\, dx + 0{,}1 dx^2.$$

Folglich ergibt sich durch den Grenzübergang nach Satz 10, S. 65.

$$\frac{dy}{dx} = 0{,}1 x^2\,.$$

Der Leser möge sich darüber klar werden, daß wir hier den früheren Weg umgekehrt eingeschlagen haben: Wir haben gezeigt, daß die Fläche y eine Funktion ist, deren Differentialquotient gleich $0{,}1 x^2$ ist, während wir vorher zeigten, daß die gesuchte Funktion y, d. h. die Funktion, deren Differentialquotient gleich $0{,}1 x^2$ ist, als die Fläche dargestellt werden kann. —

Die Betrachtungen, die wir hier an einem Beispiele durchgeführt haben, gelten im großen und ganzen auch sonst. Wir dürfen uns deshalb jetzt kurz fassen.

Die allgemeine Integrationsaufgabe lautet:

Gesucht wird eine Funktion y von x, die erstens für einen gegebenen Anfangswert $x = a$ den Wert Null hat

und die zweitens einen gegebenen Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{7}$$

hat, wo also $f(x)$ eine gegebene stetige Funktion von x sein soll. (In unserem Beispiele war $f(x)$ die Funktion $0{,}1\,x^2$ und $a = 3$.)

Statt (7) können wir schreiben:

$$dy = f(x)dx. \tag{8}$$

Diese Formel zeigt: Wenn die unabhängige Veränderliche irgendeinen Wert x erreicht hat und dann um dx zunimmt, soll dadurch eine Zunahme von y um $f(x)dx$ bewirkt werden. Also:

Satz 4: Ist y eine Funktion von x, die für $x = a$ den Wert Null hat und deren Differentialquotient $dy : dx$ gleich einer gegebenen stetigen Funktion $f(x)$ ist, so hat man y aufzufassen als eine Summe von unendlich vielen unendlich kleinen Zunahmen $f(x)dx$, die eintreten, wenn x vom Anfangswert a bis zu einem beliebigen Werte Schritt für Schritt jedesmal um die unendlich kleine Größe dx zunimmt. Dabei ist in $f(x)$ unter x der jeweils schon erreichte Wert der unabhängigen Veränderlichen zu verstehen. In Formel:

$$y = \int_a^x f(x)\,dx.$$

Die Formel liest man so: y ist das Integral über $f(x)\,dx$, erstreckt von a bis x.

Wie im Beispiele können wir immer y als Fläche deuten. An die Stelle der Bildkurve von $z = 0{,}1\,x^2$ tritt die der Funktion $z = f(x)$. Wenn die Einheiten der x und z irgendwie gewählt sind, ist als Flächeneinheit das Rechteck zu benutzen, dessen beide Seiten diese beiden Längeneinheiten sind. In Satz 3 haben wir schon ausgesagt, daß jene Fläche als Summe von unendlich vielen unendlich schmalen Rechtecken aufgefaßt werden darf.

Wir haben nun nur noch einen Umstand zu erörtern, den wir oben (auf S. 225) erwähnten, ohne darauf einzugehen: Jedes von den schmalen Rechtecken hat die Grundlinie dx, während seine Höhe die jeweils erreichte Ordinatenlänge $f(x)$ ist, so daß der Inhalt des Rechtecks das Produkt $f(x)dx$ ist. Hierbei sind nun die Vorzeichen beider Faktoren $f(x)$ und dx zu beachten. Daher kommen vier Fälle vor, siehe Fig. 169—172:

1. **Fall**: x nimmt zu, d. h. dx ist positiv, und die Bildkurve von $z = f(x)$ liegt oberhalb der x-Achse, d. h. $f(x)$ ist auch positiv. Siehe Fig. 169. Hier ist die Fläche $f(x)\,dx$ positiv.

2. **Fall**: x nimmt wie vorher zu, aber die Bildkurve liegt unterhalb der x-Achse, d. h. $f(x)$ ist negativ. Siehe Fig. 170. Die Fläche $f(x)\,dx$ ist jetzt negativ.

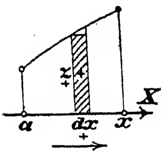


Fig. 169.

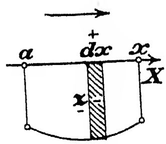


Fig. 170.

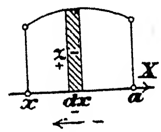


Fig. 171.

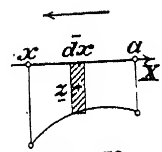


Fig. 172.

3. **Fall**: x nimmt ab, d. h. dx ist negativ, während die Bildkurve oberhalb der x-Achse liegt, d. h. $f(x)$ positiv ist. Siehe Fig. 171. Die Fläche $f(x)\,dx$ ist jetzt negativ.

4. **Fall**: x nimmt wie vorher ab, aber die Bildkurve liegt unterhalb der x-Achse, d. h. $f(x)$ ist negativ. Siehe Fig. 172. Die Fläche $f(x)\,dx$ ist alsdann positiv.

In den Fällen 3 und 4 integrieren wir, wie man zu sagen pflegt, rückwärts, indem wir x vom Anfangswert a an abnehmen lassen. In der Tat kann es bei Anwendungen vorkommen, daß man für den Endwert von x das zugehörige y kennt, so daß man dann dies Ende als Anfang wählt und x von da an abnehmen läßt. Unsere Betrachtung gibt den

Satz 5: Das Integral

$$y = \int_a^x f(x)\,dx,$$

d. h. diejenige Funktion y von x, die für $x = a$ den Wert Null hat und deren Differentialquotient $dy : dx$ die gegebene Funktion $f(x)$ ist, läßt sich als Fläche darstellen. Zu diesem Zweck hat man in einem Koordinatensystem mit den Abszissen x und Ordinaten z die Bildkurve der gegebenen Funktion $z = f(x)$ zu zeichnen. Dann ist y die Fläche, die von der Kurve, der Abszissenachse, der zu $x = a$ gehörigen Ordinate und der zu einem beliebigen x gehörigen Ordinate begrenzt wird. Flächeneinheit ist dabei das aus der x- und der z-Einheit hergestellte Rechteck. Die Fläche

kann als die Summe derjenigen unendlich vielen unendlich schmalen Rechtecke aufgefaßt werden, die entstehen, wenn man zwischen der Anfangs- und der Endordinate lauter Ordinaten in gleichen und nach Null strebenden Abständen einschaltet und durch jeden ihrer Endpunkte die Parallele zur x-Achse zieht, bis sie die folgende Ordinate trifft. Der Inhalt eines solchen unendlich kleinen Rechtecks ist mit Rücksicht auf sein Vorzeichen in Rechnung zu stellen, das von den Vorzeichen der Grundlinie und Höhe abhängt. Das erste Vorzeichen ist positiv oder negativ, je nachdem $x \gtrless a$ ist, das zweite, je nachdem die Kurve positive oder negative Ordinaten hat. Vorausgesetzt wird ferner, daß $f(x)$ in dem betrachteten Intervalle von a bis x eine stetige Funktion von x sei.

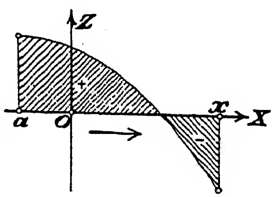


Fig. 173.

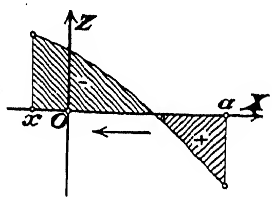


Fig. 174.

Zur Erläuterung der Vorzeichen mögen noch die Fig. 173 und 174 dienen. Das Integral

$$\int_a^x f(x)\,dx$$

ist in Fig. 173, wo der Endwert $x > a$ ist, die Summe der geschrafften Flächenstücke, von denen das linke positiv, aber das rechte negativ ist. In Wahrheit stellt also hier das Integral eine Flächendifferenz dar. Dasselbe gilt in Fig. 174, nur sind hier die Vorzeichen gerade umgekehrt, weil der Endwert $x < a$ ist, die unabhängige Veränderliche x also abnimmt, d. h. dx negativ ist.

Wie man Integrale wirklich berechnet, darüber sagt Satz 5 nichts aus. Er soll nur den Integralbegriff beleuchten. In den nächsten Paragraphen geben wir Beispiele, in denen die Berechnung der Integrale keine Schwierigkeiten machen wird. Erst viel später werden wir die eigentlichen Integrationsverfahren besprechen.

§ 3. Beispiele zur Flächenmessung.

Die Aufgabe, Flächen auszumessen, ist nach dem Vorhergehenden eine Aufgabe der Integralrechnung. Zur Einübung des Integralbegriffes empfiehlt es sich daher, zuerst Beispiele aus der Flächenmessung durchzunehmen. Wir werden sehen, daß manche in den Naturwissenschaften und in der Technik auftretende Größen als Integrale zu definieren sind. Daher erhellt, daß man mancherlei in den Anwendungen wichtige Begriffe in besonders anschaulicher Weise durch Flächenräume darstellen kann. Wir erwähnen es, um darauf hinzuweisen, daß Aufgaben über Flächenmessung auch für andere Zwecke wichtig sind.

1. Beispiel: Die Bildkurve der quadratischen Funktion $a + bx + cx^2$ ist eine Parabel (vgl. S. 95). Man soll die Fläche berechnen, die zwischen der Kurve, der x-Achse, der Ordinate der Stelle $x = x_0$ und der zu einem beliebigen x gehörigen Ordinate gelegen ist. Diese Fläche ist das Integral:

$$y = \int_{x_0}^{x} (a + bx + cx^2)\, dx,$$

d. h. diejenige Funktion y von x, die für $x = x_0$ den Wert Null hat und deren Differentialquotient gleich $a + bx + cx^2$ ist. Wir kennen schon eine Funktion von x, die diesen Differentialquotienten hat. Denn da 1, x, x^2 die Differentialquotienten von $x, \frac{1}{2}x^2$, $\frac{1}{3}x^3$ sind, ist $a + bx + cx^2$ der von

$$ax + \tfrac{1}{2}bx^2 + \tfrac{1}{3}cx^3.$$

Die gesuchte Funktion y von x ist also eine Funktion, die denselben Differentialquotienten hat wie diese. Nach Satz 2, S. 213 hat sie deshalb die Form:

$$y = ax + \tfrac{1}{2}bx^2 + \tfrac{1}{3}cx^3 + k,$$

wo k eine Konstante ist. Weil $y = 0$ sein soll, wenn $x = x_0$ ist, muß

$$0 = ax_0 + \tfrac{1}{2}bx_0^2 + \tfrac{1}{3}cx_0^3 + k$$

sein, d. h.

$$k = -ax_0 - \tfrac{1}{2}bx_0^2 - \tfrac{1}{3}cx_0^3,$$

so daß sich ergibt:

$$(1) \qquad y = a(x - x_0) + \tfrac{1}{2}b(x^2 - x_0^2) + \tfrac{1}{3}c(x^3 - x_0^3).$$

Nun ist zu beachten, daß die Fläche y aus positiven und negativen Stücken bestehen kann. Zahlenbeispiele sind deshalb nützlich: Bei der Parabel, die die Bildkurve der Funktion

$$z = 6 - 4x + x^2$$

ist, siehe Fig. 175, wo wir wie im vorigen Paragraphen die Ordinate mit z bezeichnen zum Unterschiede von dem Werte y der Fläche, erhalten wir, da $a = 6$, $b = -4$, $c = 1$ ist, nach (1) die Fläche:

$$(2) \qquad y = 6(x - x_0) - 2(x^2 - x_0^2) + \tfrac{1}{3}(x^3 - x_0^3).$$

Da die Parabel vollständig oberhalb der x-Achse verläuft, stellt die Formel die Fläche mit Pluszeichen vor, wenn $x > x_0$ ist, mit Minuszeichen, wenn $x < x_0$ ist. Die Fläche z. B., die zwischen den zu $x = 0$ und $x = 4$ gehörigen Ordinaten liegt, ist, wie man durch Einsetzen von $x_0 = 0$, $x = 4$ in (2) erkennt, gleich $13\frac{1}{3}$ Flächeneinheiten. In Fig. 175 sind die Abszissen- und Ordinateneinheit gleich groß, so daß die Flächeneinheit ein Quadrat ist. Setzen wir in (2) für x_0 den Wert 0 und für x den Wert -1, so ergibt sich der zwischen der Abszissenachse, der Parabel, der y-Achse und der zu $x = -1$ gehörigen Ordinate gelegene Flächenraum mit

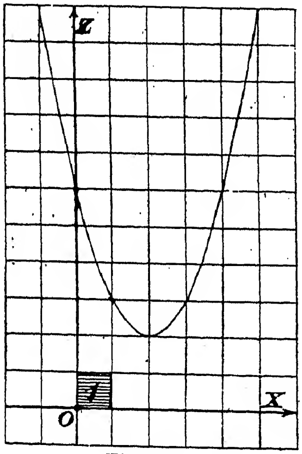


Fig. 175.

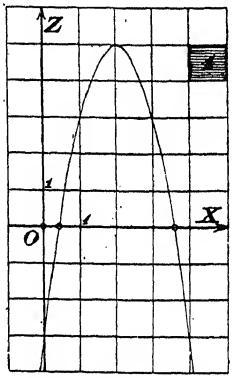


Fig. 176.

Minuszeichen, da $x < x_0$ ist. In der Tat kommt der Wert $-8\frac{1}{3}$. Der Flächenraum ist also gleich $8\frac{1}{3}$ Flächeneinheiten. Daraus folgt, daß die Fläche, die zwischen der x-Achse, der Parabel und den zu $x_0 = -1$ und $x = 4$ gehörigen Ordinaten liegt, gleich $13\frac{1}{3} + 8\frac{1}{3}$ oder $21\frac{2}{3}$ Flächeneinheiten ist. Die Formel (2) gibt wirklich diesen Wert, wenn darin $x_0 = -1$, $x = 4$ gesetzt wird.

Nehmen wir jetzt die Parabel an, die das Bild der quadratischen Funktion

$$z = -3 + 8x - 2x^2$$

ist, siehe Fig. 176, so ist $a = -3$, $b = 8$, $c = -2$, so daß (1) die Fläche gibt:

$$(3) \qquad y = -3(x - x_0) + 4(x^2 - x_0^2) - \tfrac{2}{3}(x^3 - x_0^3).$$

Wählen wir z. B. $x_0 = 0$, $x = 4$, so kommt $y = 9\frac{1}{3}$. Da hier $x > x_0$ ist, liegt entweder der Fall der Fig. 169 oder der Fall der Fig. 170 vor, d. h. die oberhalb der x-Achse gelegenen Flächenstücke sind positiv, die unterhalb der x-Achse gelegenen negativ. Weil die Parabel zwischen $x = 0$ und $x = 4$ die x-Achse zweimal durchschneidet, ist das Ergebnis $9\frac{1}{3}$ gleich dem oben gelegenen Flächenstück, vermindert um die beiden unten gelegenen. Die Schnittstellen der Parabel mit der x-Achse gehen aus der quadratischen Gleichung

$$-3 + 8x - 2x^2 = 0$$

hervor, woraus nach S. 110 folgt:

$$x = 2 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{10}.$$

Oberhalb der x-Achse liegt also das Flächenstück von

$$x_0 = 2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{10} = 0{,}41\bar{9} \text{ bis } x = 2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{10} = 3{,}581.$$

Auf dies Flächenstück allein wollen wir jetzt die Formel (3) anwenden. Weil hier

$$x - x_0 = \sqrt{10},$$
$$x^2 - x_0^2 = (x + x_0)(x - x_0) = 4\sqrt{10}$$
$$x^3 - x_0^3 = (x^2 + x x_0 + x_0^2)(x - x_0) = 14{,}5\sqrt{10}$$

ist, wobei $\sqrt{10}$ positiv ist, kommt nach (3):

$$y = 3\tfrac{1}{3}\cdot\sqrt{10} = 10{,}541.$$

Da diese Fläche, vermindert um die beiden unterhalb der x-Achse gelegenen Stücke von $x = 0$ bis $x = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{10}$ und von $x = 2 + \frac{1}{2}\sqrt{10}$ bis $x = 4$, nach der vorigen Rechnung gleich $9\frac{1}{3}$ ist, müssen diese beiden spitzen Stücke unterhalb der x-Achse zusammen absolut genommen gleich $3\frac{1}{3}.\sqrt{10} - 9\frac{1}{3}$ oder rund 1,208 Flächeneinheiten sein. Jene beiden spitzen Stücke sind übrigens wegen der Symmetrie der Parabel hinsichtlich der zu $x = 2$ gehörigen Ordinate (vgl. S. 95) gleich groß, so daß auf jedes $\frac{1}{2}(3\frac{1}{3}.\sqrt{10} - 9\frac{1}{3})$ oder $\frac{1}{3}.(5\sqrt{10} - 14)$ Flächeneinheiten entfallen. Dieser Wert ergibt sich in der Tat, aber **negativ**, wenn in (3) für x_0 der Wert Null und für x der Wert $2 - \frac{1}{2}\sqrt{10}$ gesetzt wird.

Die Formel (1) für die Fläche von x_0 bis x bei irgendeiner Parabel

$$z = a + bx + cx^2 \tag{4}$$

kann noch etwas anders geschrieben werden. Wir wollen nämlich die zu x_0 und x gehörige Anfangs- und Endordinate ausrechnen und ferner diejenige Ordinate bestimmen, die zur Mitte zwischen beiden, d. h. zu dem Abszissenwerte $\frac{1}{2}(x_0 + x)$ gehört. Nach (4) gehört zur

Abszisse	x_0	die Ordinate	$z_0 = a + bx_0 + cx_0^2$,
„	$\frac{1}{2}(x + x_0)$	„ „	$z_1 = a + \frac{1}{2}b(x + x_0) + \frac{1}{4}c(x + x_0)^2$,
„	x	„ „	$z_2 = a + bx + cx^2$.

Also ist:

$$z_0 + 4z_1 + z_2 = 6a + 3b(x + x_0) + 2c(x^2 + xx_0 + x_0^2),$$

daher

$$\tfrac{1}{6}(x - x_0)(z_0 + 4z_1 + z_2) = a(x - x_0) + \tfrac{1}{2}b(x^2 - x_0^2) + \tfrac{1}{3}c(x^3 - x_0^3).$$

Dies aber ist der Wert (1) der Fläche y. Wenn wir $\frac{1}{2}(x - x_0)$ mit m bezeichnen, so daß die Strecke von x_0 bis x gleich $2m$ ist, folgt daher:

Die Fläche y, die von der x-Achse, einer Parabel mit zur y-Achse paralleler Achse, d. h. einer Bildkurve einer quadratischen Funktion $a + bx + cx^2$, einer Anfangsordinate z_0 und einer Endordinate z_2 begrenzt wird, stellt sich, wenn z_1 die in der Mitte zwischen den Geraden z_0 und z_2 gelegene Ordinate ist und z_0 von z_1 sowie z_1 von z_2 den Abstand m hat, so dar:

$$y = \tfrac{1}{3}m(z_0 + 4z_1 + z_2). \tag{5}$$

Siehe Fig. 177.

2. **Beispiel:** Jetzt liege die **zweiwertige** Funktion $2\sqrt{x}+8$ vor. Ihre Bildkurve, siehe Fig. 178, geht aus der in Fig. 106, S. 154, hervor, wenn man die Ordinaten verdoppelt und dann die Kurve um 8 Einheiten nach oben verschiebt. Um die Sätze des vorigen Paragraphen anwenden zu können, müssen wir festsetzen, daß $\sqrt{x}$ entweder positiv oder negativ genommen werden soll. Im ersten Fall gilt die obere, im zweiten die untere Kurve. Die Fläche, die von der Kurve, der x-Achse und den zu $x=1$ und einem beliebigen x gehörigen Ordinaten begrenzt wird, hat den Inhalt:

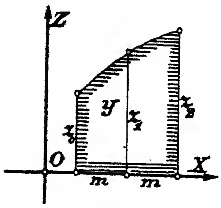


Fig. 177.

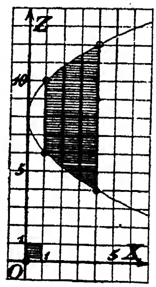


Fig. 178.

$$y=\int_1^x (2\sqrt{x}+8)\,dx.$$

Sie ist eine Funktion y der Endabszisse x mit dem Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx}=2\sqrt{x}+8=2x^{\frac{1}{2}}+8.$$

Außerdem ist sie gleich Null für $x=1$. Nun ist $x^{\frac{1}{2}}$ der Differentialquotient von $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$. Demnach hat die Funktion

$$\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+8x$$

denselben Differentialquotienten wie y, so daß aus Satz 2, S. 213, folgt:

$$y=\frac{4}{3}\sqrt{x}^3+8x+k,$$

wo k eine Konstante ist. Da $y=0$ für $x=1$ sein muß, kommt:

$$0=\frac{4}{3}\sqrt{1}^3+8+k.$$

Wird $\sqrt{x}$ positiv angenommen, so ist $\sqrt{1}^3=+1$, sonst gleich -1. Also ist im ersten Fall:

$$k=-\frac{4}{3}-8=-9\frac{1}{3},$$

dagegen im zweiten Fall:

$$k=+\frac{4}{3}-8=-6\frac{2}{3}.$$

Im Fall $\sqrt{x}>0$ ist also:

$$y=\frac{4}{3}\sqrt{x}^3+8x-9\frac{1}{3}$$

und im Fall $\sqrt{x}<0$:

$$y=\frac{4}{3}\sqrt{x}^3+8x-6\frac{2}{3}.$$

Die Fläche, die von der x-Achse, der **oberen** Kurve und den zu $x=1$ und $x=4$ gehörigen Ordinaten begrenzt wird, hat nach der **ersten** Formel den Wert $\frac{4}{3}\cdot 8+8\cdot 4-9\frac{1}{3}$ oder $33\frac{1}{3}$. Wird jedoch die **untere** Kurve als Begrenzungslinie gewählt, so gibt die **zweite** Formel, weil dann $\sqrt{x}$ negativ gemeint ist, den Wert $-\frac{4}{3}\cdot 8+8\cdot 4-6\frac{2}{3}$ oder $14\frac{2}{3}$. Die in Fig. 178 geschraffte Fläche hat daher die Größe $33\frac{1}{3}-14\frac{2}{3}$ oder $18\frac{2}{3}$.

3. Beispiel: Eine Funktion $f(x)$ habe für $x = a$ einen positiven Wert, ebenso für größere Werte von x, so daß ihre Bildkurve für $x \geqq a$ oberhalb der x-Achse verläuft, etwa wie AP in Fig. 179. Nun soll die Fläche bestimmt werden, die von der Kurve von A bis P und von den Strecken OA und OP begrenzt wird. Dabei sei A der zu $x = a$ und P der zu einem beliebigen $x > a$ gehörige Punkt der Bildkurve. Die Fläche ist jetzt nicht so begrenzt wie bisher. Wir führen die Aufgabe deshalb auf die Bestimmung anderer Flächen zurück, indem wir die Ordinaten BA und QP ziehen. Die Fläche zwischen der x-Achse, der Kurve und BA und QP ist das Integral

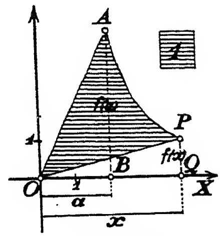


Fig. 179.

$$\int_a^x f(x)\,dx.$$

Das Dreieck OBA hat wegen $BA = f(a)$ den Inhalt $\frac{1}{2} a f(a)$; also stellt

$$\int_a^x f(x)\,dx + \tfrac{1}{2} a f(a)$$

die Fläche $OQPAO$ vor. Hiervon ist schließlich die Fläche des Dreiecks OQP abzuziehen, die gleich $\frac{1}{2} x f(x)$ ist. Demnach hat die in Fig. 179 geschraffte Fläche den Inhalt:

$$(6) \qquad y = \int_a^x f(x)\,dx + \tfrac{1}{2} a f(a) - \tfrac{1}{2} x f(x).$$

In der Figur haben wir übrigens die Bildkurve der Funktion $16 : x^2$ gewählt. Also ist hier $f(x) = 16 : x^2$. Außerdem haben wir $a = 2$ angenommen, so daß $f(a) = 4$ ist. Daher kommt:

$$y = \int_2^x \frac{16}{x^2}\,dx + 4 - \frac{8}{x}.$$

Das hierin auftretende Integral ist diejenige Funktion von x, die für $x = 2$ den Wert Null hat und deren Differentialquotient gleich $16 : x^2$ ist. Da nun $-1 : x^2$ der Differentialquotient von $1 : x$ ist, ist $16 : x^2$ der von $-16 : x$. Demnach ist das Integral nach Satz 2, S. 213, eine Funktion von der Form

$$-\frac{16}{x} + k,$$

wo k eine Konstante bedeutet. Für $x = 2$ soll die Funktion gleich Null sein; k ist daher gleich 8. Also kommt:

$$y = -\frac{16}{x} + 8 + 4 - \frac{8}{x} = 12 - \frac{24}{x}.$$

In Fig. 179 ist $x = 4$ angenommen worden. Deshalb ist die geschraffte Fläche 6 mal so groß wie die Flächeneinheit.

In den Beispielen haben wir nicht nur Flächen gemessen, bei denen die Abszisse der Endordinate beliebig gelassen war, sondern auch jedesmal die Zahlenwerte berechnet, die sich ergeben, wenn man die

Endabszisse gleich einer bestimmten Zahl setzt. Wird von vornherein die Aufgabe gestellt, die Fläche zu berechnen, die von der x-Achse, der Bildkurve der Funktion $f(x)$ und den zu bestimmten Abszissen $x=a$ und $x=b$ gehörigen Ordinaten begrenzt wird, so handelt es sich um den Wert des Integrals

$$y=\int_a^x f(x)\,dx$$

für $x=b$, also um den Wert von:

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{7}$$

Man nennt a und b die Grenzen des Integrals. Wir dürfen bei der Lösung der Aufgabe nicht von vornherein als obere Grenze den bestimmten Wert b einsetzen, weil wir ja zunächst eine Funktion von x ermitteln müssen, die den Differentialquotienten $f(x)$ hat. Wollten wir von vornherein $x=b$ setzen, so würde nicht eine Funktion von x gesucht, sondern eine bestimmte Zahl. Diese können wir nicht geradezu finden. Vielmehr müssen wir auch dann, wenn die obere Grenze des Integrals wie in (7) bestimmt gewählt worden ist, vorerst die obere Grenze noch beliebig, gleich x, lassen:

$$\int_a^x f(x)\,dx\,. \tag{8}$$

Erst nach Erledigung der Aufgabe, dieses Integral zu berechnen, setzen wir im Ergebnisse den bestimmten Wert b für x ein.

Man nennt ein Integral (7), bei dem beide Grenzen bestimmte Zahlenwerte haben, ein bestimmtes Integral.

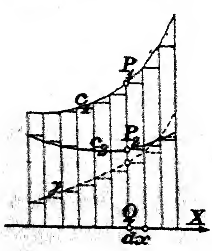


Fig. 180.

Wir nehmen jetzt an, zwei Kurven c_1 und c_2 seien gegeben, die zwischen zwei Senkrechten zur x-Achse verlaufen, siehe Fig. 180. Dann ist die Fläche zwischen den Grenzgeraden und beiden Kurven die Differenz der Fläche von der x-Achse bis zur oberen Kurve c_1 und der Fläche von der x-Achse bis zur unteren Kurve c_2. Jede dieser Flächen ist nach Satz 3 als eine Summe von unendlich schmalen Rechtecken aufzufassen, die in der Figur angedeutet sind. Die

Differenz zwischen zwei Rechtecken mit gemeinsamer Grundlinie dx ist in Rechteck, dessen Höhe P_2P_1 die Differenz der Höhen QP_1 und QP_2 ist. Schieben wir dies Differenzrechteck hinunter, bis es auf der x-Achse aufsteht, so ist seine Höhe diejenige Strecke von Q aus, die gleich der Ordinatendifferenz von c_1 und c_2 ist. Wenn wir alle Ordinatendifferenzen P_2P_1 so weit verschieben, bis sie auf der x-Achse aufstehen, bilden die Endpunkte eine neue Kurve γ, die Differenzkurve, und die gesuchte Fläche ist gleich der Fläche, die zwischen den beiden Grenzgeraden, der x-Achse und der neuen Kurve γ liegt. Ist c_1 die Bildkurve von $f_1(x)$ und c_2 die von $f_2(x)$, so bedeutet γ die Bildkurve der Funktion $f_1(x) - f_2(x)$. Da nun, wie wir soeben sahen:

$$\text{Fläche } (c_2 c_1) = \text{Fläche } (x c_1) - \text{Fläche } (x c_2) = \text{Fläche } (x \gamma)$$

ist, wo die Bezeichnungen ohne weiteres verständlich sind, ergibt sich, wenn a und x die Abszissen der Anfangs- und Endordinate bedeuten:

$$(9) \qquad \int_a^x f_1(x)\,dx - \int_a^x f_2(x)\,dx = \int_a^x [f_1(x) - f_2(x)]\,dx.$$

Ehe wir dies als Satz aussprechen, bemerken wir, daß man unter dem Integranden des Integrals (8) die Funktion $f(x)$ versteht (entsprechend wie man vom Subtrahenden, Minuenden und Dividenden redet). Mit Benutzung dieser Bezeichnung können wir die Formel (9) so wiedergeben:

Satz 6: Die Differenz zweier Integrale zwischen denselben Grenzen ist gleich dem Integral der Differenz der Integranden zwischen denselben Grenzen.

4. Beispiel: Die im 1. Beispiel betrachteten Funktionen:

$$-3 + 8x - 2x^2 \quad \text{und} \quad 6 - 4x + x^2$$

haben als Bildkurven Parabeln c_1 und c_2, die sich, in dasselbe Koordinatensystem eingetragen, in zwei Punkten schneiden. Siehe Fig. 176 und Fig. 175 sowie die neue Fig. 181. Die Schnittpunkte sind leicht zu finden. Sie haben Abszissen x, zu denen bei beiden Kurven dieselben Ordinaten gehören; also ist für sie:

$$-3 + 8x - 2x^2 = 6 - 4x + x^2$$

oder

$$3x^2 - 12x + 9 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $x = 1$ und $x = 3$ (vgl. S. 110). Wollen wir nun die geschraffte

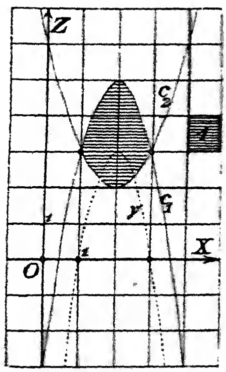


Fig. 181.

Fläche zwischen den beiden Kurven c_1 und c_2 bestimmen, so bilden wir die **Differenzkurve** γ, d. h. die Bildkurve der Funktion:

$$(-3 + 8x - 2x^2) - (6 - 4x + x^2)$$

oder

$$-9 + 12x - 3x^2.$$

Sie ist auch eine Parabel und schneidet die x-Achse an den Stellen $x = 1$ und $x = 3$. Die gesuchte Fläche ist das **bestimmte** Integral:

$$\int_1^3 (-9 + 12x - 3x^2)\,dx.$$

Zuerst berechnen wir aber wie gesagt das Integral mit veränderlich gelassener oberer Grenze x:

$$y = \int^x (-9 + 12x - 3x^2)\,dx.$$

Wie der Leser selber ausrechnen möge, ergibt sich:

$$y = -9x + 6x^2 - x^3 + 4.$$

Für $x = 3$ kommt also der Wert $y = 4$ für die in Fig. 181 geschraffte Fläche.

Da wir beim Flächenmessen sind, schalten wir noch einige Bemerkungen ein, die sich zwar auch darauf beziehen, aber unsere Betrachtung der Integrale nicht weiterbringen. Deshalb mögen diese Bemerkungen in kleinerem Druck stehen; man mag sie nach Belieben mitnehmen oder überspringen. Gebraucht werden sie in unserem Buche nicht.

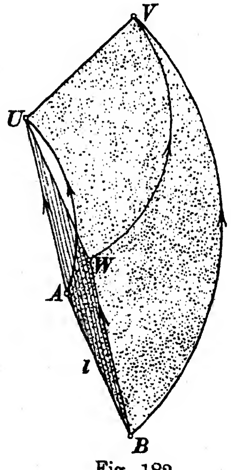


Fig. 182.

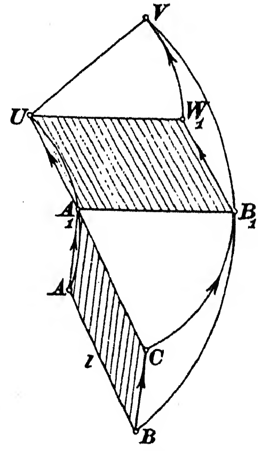


Fig. 183.

Zunächst besprechen wir eine Vorrichtung zum mechanischen Ausmessen beliebiger Flächenstücke, ein sogenanntes Planimeter, insbesondere das Polarplanimeter:

Wir nehmen eine Strecke AB von der Länge l (siehe Fig. 182) an, die wir auf der Ebene irgendwie fortbewegen, bis sie in eine Endlage UV kommt. Die Enden A und B beschreiben Kurven AU und BV. Die Strecke überstreicht eine gewisse, in der Figur gepunktete Fläche, die wir bestimmen wollen. Um von AB nach UV zu kommen, können wir auch so verfahren: Wir verschieben l parallel, bis A nach U kommt, so daß l ein Parallelogramm $ABUW$ überstreicht. Dann drehen wir l aus

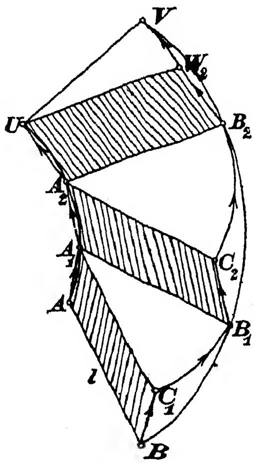


Fig. 184.

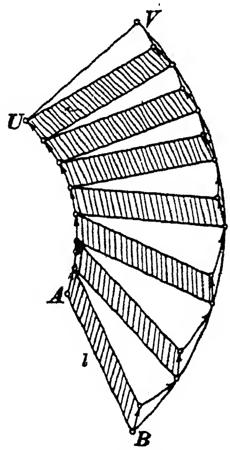


Fig. 185.

der Lage UW um U in die Endlage UV herum. Dies ist jedoch nicht der eigentliche vorhin angenommene Bewegungsvorgang. Wir kommen ihm näher, wenn wir ein solches Verschieben und Drehen zweimal ausüben. In Fig. 183 sei A_1B_1 eine der Lagen, die l bei der richtigen Bewegung gelegentlich bekommt. Wir verschieben nun l von AB parallel nach A_1C, drehen l um A_1 nach A_1B_1, verschieben l parallel zu A_1B_1 nach UW_1 und drehen l endlich um U in die Lage UV. Schalten wir zwei der Zwischenlagen A_1B_1 und A_2B_2 ein, die der Stab gelegentlich annimmt, so liegt der Fall der Fig. 184 vor. Wenn wir eine größere Anzahl von Zwischenlagen des Stabes einschalten und von jeder Lage in die neue durch Verschieben und Drehen übergehen wie in Fig. 185, weicht die Summe der Flächen der Parallelogramme und Kreisausschnitte nur noch wenig von der Fläche ab, die der Stab l bei der richtigen Bewegung überstreicht. Wenn die Anzahl aller einzelnen Schritte über jede Zahl wächst und die benutzten Zwischenlagen unendlich dicht aufeinander folgen, findet volle Übereinstimmung statt. Dies in aller Strenge zu beweisen, ist nicht schwer. Aber das Gesagte mag hier genügen.

Am Stabe l sei nun an einer Stelle R, die von A die Entfernung a hat, ein Rädchen angebracht, dessen Achse der Stab ist, so daß es auf der Ebene rollt, wenn man durch geeignete Vorkehrungen den Stab l durch einen sich ein wenig über der Ebene hin bewegenden Stab ersetzt. Am Rädchen sei eine Zeigervorrichtung angebracht, so daß man unmittelbar ablesen kann, wie langen Weg eine Stelle auf dem

Umfange des Rädchens zurücklegt. Wir lassen nun den Stab l (siehe Fig. 186) zuerst ein Parallelogramm von der Höhe dh und dann einen Kreisausschnitt mit dem Zentriwinkel $d\varphi$ beschreiben. Obgleich das Rädchen bei der ersten Bewegung auch in der Achsenrichtung gleitet, rollt doch dabei nur ein Stück des Umfanges von der Länge dh ab. Bei der zweiten Bewegung rollt dagegen der Kreisbogen dk ab, der zum Zentriwinkel $d\varphi$ und Radius a gehört. Daher ist $dk = a\,d\varphi$ nach S. 6, wenn wir den Winkel $d\varphi$ im Bogenmaß messen. Nach Abschluß beider Bewegungen lesen wir also an der Zeigervorrichtung den Weg

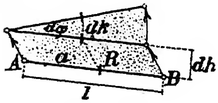


Fig. 186.

$$dr = dh + a\,d\varphi$$

ab. Andererseits haben die Flächen des Parallelogramms und Kreisausschnittes die Summe

$$dF = l\,dh + \tfrac{1}{2} l^2 d\varphi,$$

denn $l\,d\varphi$ ist der Bogen, l der Radius des Kreisausschnittes. Nach der ersten Formel ist:

$$dh = dr - a\,d\varphi;$$

setzen wir dies in die zweite ein, so kommt:

$$dF = l\,dr + \tfrac{1}{2} l(l - 2a)\,d\varphi.$$

Die Gesamtfläche, die der Stab bei der angenommenen Bewegung von der Anfangslage AB bis zur Endlage UV beschreibt, ist eine Summe von lauter solchen Teilen dF für den Fall, daß dh und $d\varphi$ nach Null streben. Bemerkt werden muß dabei, daß dh oder $d\varphi$ negativ in Rechnung zu setzen ist, sobald eine der beiden Bewegungen entgegengesetzten Sinn annimmt, was sehr wohl vorkommen kann. Die Summe aller Größen $l\,dr$ ist gleich der Konstante l, multipliziert mit dem auf dem Rädchen zum Schlusse abgelesenen Gesamtwerte r aller Drehungen dr. Beim zweiten Glied $\frac{1}{2} l(l - 2a)\,d\varphi$ ist der Faktor $\frac{1}{2} l(l - 2a)$ konstant. Die Summe aller dieser Größen ist also gleich $\frac{1}{2} l(l - 2a)$, multipliziert mit der Summe der Winkel $d\varphi$ aller Kreisausschnitte. Sorgen wir nun dafür, daß die Summe aller Winkel $d\varphi$ gleich Null wird, so bleibt als Gesamtfläche einfach:

$$F = lr, \tag{10}$$

wo l die Stablänge und r den vom Zeiger angegebenen Weg auf dem Radumfange bedeutet. Die Vorrichtung, die dazu dient, die Summe aller Winkel $d\varphi$ gleich Null zu machen, besteht in folgendem: An den Stab l knüpfen wir in A mittels eines Gelenkes einen zweiten Stab von beliebiger Länge m an. Das andere Ende P dieses Stabes, der Pol, wird mittels eines Stiftes an einer Stelle der Zeichenebene befestigt, siehe Fig. 187. Jetzt lassen wir B eine geschlossene Kurve c durchlaufen. Dabei macht der Punkt A eine pendelnde Bewegung längs eines Kreisbogens um P hin und zurück, so daß der Stab l einen gewissen Flächenraum zwischen diesem Kreisbogen und der Kurve c überstreicht, wobei aber die von der Kurve c eingeschlossene Fläche nur einmal, dagegen der übrige Teil jener Fläche doppelt von l überstrichen wird, und zwar beide Male in verschiedenen Sinnen der Bewegung. Da die Strecken dh und die Winkel $d\varphi$ im einen Sinn positiv, im anderen negativ sind, heben sich die

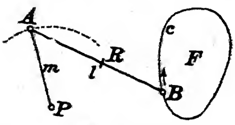


Fig. 187.

doppelt überstrichenen Flächenräume auf, und es bleibt als das Ergebnis die von der Kurve c eingeschlossene Fläche F übrig. Denkt man sich durch irgendeinen festen Punkt eine Parallele zu l gezogen und läßt man sie während der Bewegung beständig parallel zu den jeweiligen Lagen von l, so pendelt diese Parallele durch einen gewissen Winkel hin und zurück in ihre Anfangslage. Die Winkel, die sie bei jedem Teil der Bewegung beschreibt, sind die Winkel $d\varphi$; die Summe aller Winkel $d\varphi$ ist also in der Tat gleich Null, so daß die Formel (10) gilt.

Mithin ist die Fläche F der geschlossenen Kurve c gleich der Länge von l, multipliziert mit der am Rädchenrande abzulesenden Zahl r. Das Planimeter ist übrigens so eingerichtet, daß man am Rädchenrande nicht r, sondern sogleich das Produkt lr, also die Fläche F abliest.

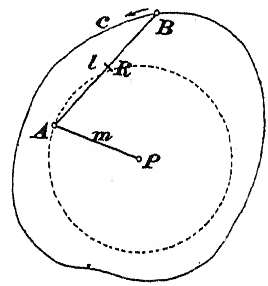


Fig. 188.

Die Winkel $d\varphi$ heben sich gegenseitig nicht auf, wenn jene gedachte Parallele zu l in ihre Anfangslage zurückgelangt, nachdem sie eine ganze Umdrehung um ihren festen Punkt gemacht hat. Dieser Fall, für den also die Formel (10) nicht gilt, tritt ein, wenn der Pol P wie in Fig. 188 im Innern der Kurve c angebracht worden ist. Solche Fälle müssen also vermieden werden. Ist die auszumessende Fläche F zu groß, so zerlegt man sie in kleinere Stücke, die man einzeln ausmißt.

Wir wollen jetzt zeigen, wie man ohne besondere Vorrichtung angenähert die Fläche einer gezeichnet vorliegenden geschlossenen Kurve bestimmen kann. Jede Fläche kann man durch Teilung mittels gerader Linien in Stücke zerlegen, die wie die in § 2 betrachteten Flächen je durch eine Kurve, eine Gerade und zwei dazu senkrechte Geraden begrenzt werden. Wir beschränken uns daher auf Flächen, die von einer x-Achse, einer Kurve c und zwei Ordinaten eingeschlossen werden.

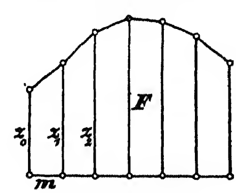


Fig. 189.

Ein erstes Näherungsverfahren ergibt sich so: Wir zerlegen die Fläche, siehe Fig. 189, durch eine Anzahl Ordinaten $z_0, z_1, z_2 \ldots z_n$ in n Streifen von gleicher Breite m und fassen jeden Streifen als ein auch oben geradlinig begrenztes Trapez auf. Der Inhalt des ersten Trapezes ist nach bekannter Formel $\frac{1}{2} m (z_0 + z_1)$. Die Summe aller Trapeze gibt für die Gesamtfläche als Näherungsformel die sogenannte Trapezformel:

$$F = m\left(\tfrac{1}{2} z_0 + z_1 + z_2 + \ldots + z_{n-1} + \tfrac{1}{2} z_n\right). \tag{11}$$

Eine andere Näherungsformel beruht darauf, daß man die Kurvenbogen durch Parabelbogen ersetzt, nämlich durch Bogenstücke von Bildkurven quadratischer Funktionen $a + bx + cx^2$. Wir sahen, daß die Fläche zwischen der Parabel, der x-Achse, einer Anfangsordinate z_0 und einer Endordinate z_2 den in (5) angegebenen Wert

$$y = \tfrac{1}{3} m (z_0 + 4 z_1 + z_2)$$

hat, wenn z_1 die Mittelordinate ist und m dieselbe Bedeutung wie vorhin hat. Hier fassen wir also zwei aufeinander folgende Streifen der Fläche angenähert immer als

einen Streifen einer Fläche auf, die oben von einer Parabel begrenzt wird. Deshalb werden wir zwischen Anfangs- und Endordinate eine ungerade Anzahl $2n-1$ von Ordinaten in gleichen Abständen, einschalten, um eine gerade Anzahl $2n$ von Streifen zu erhalten, von denen wir je zwei nach der Formel zusammen berechnen. Es seien $z_0, z_1, z_2 \ldots z_{2n}$ alle $2n+1$ Ordinaten. Der Abstand je zweier voneinander sei m. Siehe Fig. 190. Nun ist zu summieren:

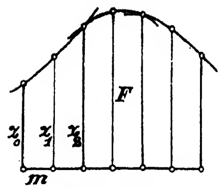


Fig. 190.

$$\tfrac{1}{3}m\,[(z_0+4z_1+z_2)+(z_2+4z_3+z_4)+\ldots+ \\ +(z_{2n-2}+4z_{2n-1}+z_{2n})].$$

Dadurch ergibt sich für die Fläche F als Näherungsformel die sogenannte Parabelformel oder Simpsonsche Regel:

$$(12)\quad F=\tfrac{1}{3}m\,[(z_0+z_{2n})+4(z_1+z_3+\ldots+z_{2n-1})+2(z_2+z_4+\ldots+z_{2n-2})].$$

Beide Regeln (11) und (12) führen zu um so besseren Ergebnissen, je mehr Ordinaten eingeschalten werden. Wir warnen aber vor allzu großer Wertschätzung dieser Näherungsformeln. Für gewisse Kurven geben sie auffallend schlechte Werte. Wenn man z. B. den Halbkreis vom Radius Eins wählt und die Fläche in 10 gleichbreite Streifen teilt, so daß $m=0{,}2$ ist, kann man die 11 Ordinaten genau berechnen, also die Güte der Regeln prüfen, da man ja weiß, daß die Fläche gleich $\tfrac{1}{2}\pi$ ist. Hier ist, wie man aus rechtwinkligen Dreiecken, siehe Fig. 191, leicht berechnen kann:

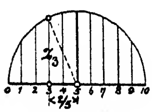


Fig. 191.

$$z_0=0,\quad z_1=0{,}6,\quad z_2=0{,}8,\quad z_3=\tfrac{1}{5}\sqrt{21},\quad z_4=\tfrac{2}{5}\sqrt{6},\quad z_5=1,$$
$$z_6=\tfrac{2}{5}\sqrt{6},\quad z_7=\tfrac{1}{5}\sqrt{21},\quad z_8=0{,}8,\quad z_9=0{,}6,\quad z_{10}=0,$$

so daß die Simpsonsche Regel (12) für $n=5$ (nämlich $2n+1=11$) liefert:

$$\frac{0{,}8}{15}\,(15+2\sqrt{21}+2\sqrt{6}).$$

Dies ist rund 1,5501, während sich doch $\tfrac{1}{2}\pi$ oder rund 1,5708 ergeben sollte. Also schon die zweite Dezimale ist falsch. Die Trapezformel (11) gibt hier

$$0.08\,(9{,}5+\sqrt{21}+2\sqrt{6}).$$

Dies ist rund 1,5185, also ein außerordentlich schlechtes Ergebnis.

Ein physikalisches Verfahren der angenäherten Flächenmessung besteht darin, daß man die Fläche auf Papier zeichnet, ausschneidet und auf einer feinen Wage abwiegt. Wiegt man auch ein Papierstück ab das die Flächeneinheit darstellt, so ist der Bruch aus beiden Gewichten die gesuchte Flächenzahl.

§ 4. Verschiedene Anwendungen des Integralbegriffs.

A. Berechnung von Mittelwerten.

Wenn n Größen $y_1, y_2 \ldots y_n$ gegeben sind, versteht man unter ihrem Mittelwert oder kurz Mittel oder ausführlich arithmetischen Mittel ihre Summe, dividiert mit ihrer Anzahl:

$$(1)\qquad m=\frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}.$$

Diese Formel kann man nicht mehr zur Ausrechnung benutzen, wenn es sich um das Mittel von unendlich vielen Größen handelt, von denen wir voraussetzen, daß sie eine stetige Reihe bilden, so daß jede folgende Größe nur unendlich wenig von der vorhergehenden abweicht. Man denke z. B. an die mittlere Tagestemperatur eines Ortes oder an die mittlere Geschwindigkeit eines Stromes. Um die Formel (1) für Mittelwerte von unendlich vielen Größen brauchbar zu machen, legen wir ihr zunächst eine geometrische Deutung unter. Auf einer Geraden, der x-Achse, siehe Fig. 192, errichten wir in gleichen Abständen ε voneinander Lote, Ordinaten, und machen sie gleich $y_1, y_2 \ldots y_n$. Jede Ordinate benutzen wir als Höhe eines Rechtecks, dessen Grundlinie die im Fußpunkt anstoßende folgende Strecke ε sein soll. Diese Rechtecke haben die Inhalte $\varepsilon y_1, \varepsilon y_2 \ldots \varepsilon y_n$.

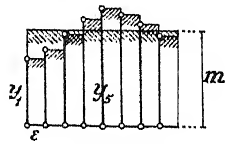


Fig. 192.

Ihre Summe ist gleich der in (1) im Zähler stehenden Summe, multipliziert mit ε. Andererseits ist $n\varepsilon$ die Summe der Grundlinien aller Rechtecke. Da nun nach (1)

$$(2) \qquad n\varepsilon . m = \varepsilon y_1 + \varepsilon y_2 + \ldots + \varepsilon y_n$$

ist, folgt: Das Mittel m ist die Höhe desjenigen Rechtecks, dessen Grundlinie die Summe der Grundlinien aller n einzelnen Rechtecke und dessen Inhalt die Summe der Inhalte aller n einzelnen Rechtecke ist.

Diese Deutung läßt sich nun anwenden, wenn es sich um das Mittel von unendlich vielen stetig aufeinander folgenden Größen handelt. Vorgelegt sei nämlich eine stetige Funktion:

$$(3) \qquad y = f(x).$$

Geben wir dann dem x vom Anfangswerte $x = a$ an Werte $a, a + dx$, $a + 2dx$ usw., die bei beständiger Zunahme um dieselbe unendlich kleine Größe dx hervorgehen, bis x schließlich irgendeinen Endwert b erreicht, so gehören zu diesen x-Werten Werte von y, und wir suchen das arithmetische Mittel aller dieser y. Zeichnen wir die Bildkurve der Funktion (3), so sind die y diejenigen Ordinaten, die zu $x = a$, $a + dx$, $a + 2\,dx \ldots$ gehören. Benutzen wir nun dx als die Strecke ε, so steht in der Formel (2) rechts nach Satz 3 die Fläche F, die von der x-Achse, der Kurve und den zu $x = a$ und $x = b$ gehörigen Ordinaten begrenzt wird. Links in (2) ist der Faktor $n\varepsilon$ die Summe aller dx, also die Strecke $b - a$, so daß (2) ergibt:

$$(4) \qquad (b - a)m = F.$$

Satz 7: Das arithmetische Mittel m aller derjenigen Ordinaten einer stetigen Kurve, die zu allen in unendlich kleinen, aber **gleichen** Abständen aufeinander folgenden Abszissen von $x=a$ bis $x=b$ gehören, ist die Höhe desjenigen Rechtecks über der Grundlinie $b-a$, das inhaltgleich mit der Fläche F ist, die von der x-Achse, der Kurve und den zu $x=a$ und $x=b$ gehörigen Ordinaten begrenzt wird. (Siehe Fig. 193.)

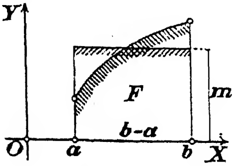


Fig. 193.

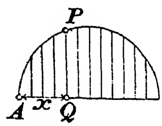


Fig. 194.

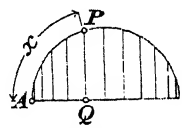


Fig. 195.

Nach Satz 5 folgt weiterhin aus (4):

Satz 8: Das arithmetische Mittel m aller derjenigen Werte einer stetigen Funktion $f(x)$, die zu allen von a an um **dieselbe** unendlich kleine Größe wachsenden Werten x von $x_{,}=a$ bis $x=b$ gehören, ist:

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Die Aufgabe, einen Mittelwert von unendlich vielen stetig aufeinander folgenden Größen y zu bestimmen, kommt also auf die Bestimmung eines Flächeninhalts F zurück, der in ein Rechteck von derselben Grundlinie zu verwandeln ist.

Bei der Definition des arithmetischen Mittels von unendlich vielen Größen kommt es ganz wesentlich darauf an, welche Größe x als unabhängige Veränderliche beständig um dieselbe unendlich kleine Größe zunehmen soll. Man kann nämlich bei einer und derselben Aufgabe zu verschiedenen Ergebnissen kommen. Am besten wird dies durch ein Beispiel gezeigt: Ein Halbkreis vom Radius Eins liege vor, siehe Fig. 194. Wir suchen die mittlere Länge der auf seinem Durchmesser errichteten Ordinaten. Den Durchmesser denken wir uns in unendlich viele, unendlich kleine, aber gleichlange Teile geteilt; in jedem Teilpunkte sei das Lot errichtet. Das arithmetische Mittel aus diesen Loten ist dann die Fläche $\frac{1}{2}\pi$ des Halbkreises, dividiert mit der Grundlinie 2, also $\frac{1}{4}\pi$. Man könnte aber die Aufgabe auch so auffassen: Der Halbkreisbogen wird in unendlich viele gleichlange Teile geteilt; dann wird von jedem Teilpunkt aus das

Lot auf den Durchmesser gefällt, siehe Fig. 195. Das arithmetische Mittel dieser Lote ist offenbar kleiner, weil jetzt die Zahl der kleineren Lote verhältnismäßig viel größer ist. Wir sind hier allerdings noch nicht imstande, dies Mittel auszurechnen, und werden später darauf zurückkommen. Daher sei nur angemerkt, daß sich der Wert $2:\pi$ ergeben wird, der ungefähr gleich 0,6 ist, während der vorige Wert $\frac{1}{4}\pi$ ungefähr gleich 0,8 ist. Bei der ersten Teilungsart ist die beständig um d a s s e l b e Differential dx wachsende Größe x der Abschnitt auf dem Durchmesser, von dem Punkt A aus in Fig. 194 gerechnet; bei der zweiten Teilungsart ist x der Bogen auf dem Halbkreise, vom selben Punkt A aus in Fig. 195 gerechnet. Im ersten Fall also fassen wir die Länge des Lotes QP als Funktion der Strecke $AQ = x$ auf, im zweiten als Funktion des Bogens $AP = x$.

Meistens besteht allerdings infolge der Natur der Aufgabe kein Zweifel, welche Größe beständig um d a s s e l b e Differential wachsen soll:

1. B e i s p i e l: In L sei eine Lichtquelle; längs einer Strecke AB, auf deren Verlängerung über A hinaus L liege, sei eine zu AB senkrechte kleine Scheibe S verschiebbar, siehe Fig. 196. Hat sie die Entfernung Eins von L, so möge die Helligkeit, die sie von L erfährt, mit Eins bezeichnet werden. Wie groß ist die mittlere Helligkeit der Scheibe S, wenn sie von A bis B verschiebbar ist? Dabei sei $LA = a$, $LB = b$, also $b > a$. Offenbar hat man sich hier vorzustellen, daß AB in unendlich viele gleiche Teile geteilt, S in jeden Teilpunkt gebracht und daselbst die Helligkeit festgestellt werde. Das Mittel aller dieser Helligkeiten soll bestimmt werden. Die Größe x ist also der Abstand LS der Scheibe S von L. Die Scheibe hat nach dem 2. Beispiel, S. 161 u. f., die Helligkeit $y = 1 : x^2$. Nach Satz 8 ist daher die mittlere Helligkeit:

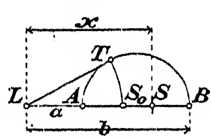


Fig. 196.

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{1}{x^2}\, dx. \tag{5}$$

Bei der Berechnung des Integrals lassen wir nach S. 236 zunächst die obere Grenze willkürlich. Das Integral

$$\int_a^x \frac{1}{x^2}\, dx$$

ist eine Funktion von x mit dem Differentialquotienten $1 : x^2$. Nun hat $-1 : x$ denselben Differentialquotienten. Nach Satz 2, S. 213, hat daher das Integral den Wert $-1 : x +$ konst. Da es für $x = a$ gleich Null sein soll, muß die additive Konstante gleich $1 : a$ sein. Also ist $1 : a - 1 : x$ der Wert des Integrals. Wenn wir schließlich $x = b$ setzen, gibt (5):

$$m = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{ab}$$

Wo muß die Scheibe S angebracht werden, damit sie gerade diese mittlere Helligkeit von L empfängt? Da sie im Abstande x von L die Helligkeit $1 : x^2$ hat, fragen wir, für welchen Wert von x

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{ab}$$

ist. Es kommt $x = \sqrt{ab}$, d. h. x ist das geometrische Mittel von a und b. Zur Konstruktion legen wir über AB als Durchmesser den Kreis, ziehen von L die Tangente LT und schlagen um L den Kreis durch T, der AB an der gesuchten Stelle S_0 trifft.

B. Berechnung statischer Momente.

Statische Momente spielen eine Rolle in der Mechanik. Wir wollen nur die von ebenen Flächenstücken F betrachten, die gleichartig mit Masse belegt seien, so daß etwa auf der Flächeneinheit die Masseneinheit ruht, die Fläche also dieselbe Maßzahl wie die Masse hat, vorausgesetzt, daß wir nicht wie auf S. 229 für die Fläche eine negative Zahl erhalten, in welchem Fall die Masse gleich der mit -1 multiplizierten Fläche ist. Diesen Fall wollen wir nachher erörtern. Denkt man sich die Fläche F in lauter unendlich kleine Teile zerlegt, so versteht man unter ihrem statischen Moment M_g in bezug auf eine Achse g, die in der Ebene der Fläche liegt, die Summe der Produkte aller unendlich kleinen Flächenteile mit ihren Abständen von der Achse g. Wir können uns vorstellen, die Fläche sei durch unendlich dichte Parallelen zu g und durch unendlich dichte Lote zu g in lauter unendlich kleine Rechtecke zerlegt, wie es Fig. 197 andeutet. Am Rande der Fläche liegen allerdings nur Stücke von Rechtecken. Aber wir dürfen hier wie in § 2, S. 223 u. f., die Randlinie der Fläche F durch eine Treppe von unendlich schmalen und unendlich niedrigen Stufen ersetzen. Da jedes der Rechtecke unendlich klein werden soll, dürfen wir als seinen Abstand von der Achse g die Länge l des Lotes von einer Rechtecksecke aus auffassen. Für alle Rechtecke in demselben Streifen zwischen zwei Parallelen zur Achse g ist dieser Abstand derselbe. Das statische Moment aller Rechtecke dieses Streifens ist deshalb gleich l, multipliziert mit der Summe der Rechtecke, d. h. mit der Fläche dF eines unendlich schmalen Streifens (in der Figur geschrafft). Das statische Moment dieses Streifens beträgt somit $l\,dF$; daher ist das der ganzen Fläche F gleich der Summe aus allen Streifen dF, jeder multipliziert mit seinem Abstande l von g. Das ist eine Summe von unendlich vielen unendlich kleinen Größen, also ein Integral

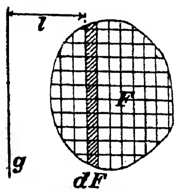


Fig. 197.

(6) $$M_g = \int l\,dF.$$

Die Grenzen des Integrals können wir in diese Formel nicht einschreiben, obgleich kein Zweifel bestehen kann: wir haben eben alle Streifen dF der Fläche zu berücksichtigen. Eine bestimmte Darstellung erhalten wir, wenn wir bestimmte Beispiele betrachten:

2. Beispiel: Das statische Moment eines Rechtecks mit den Seitenlängen h und k in bezug auf die eine Seite k soll berechnet werden. Wir benutzen diese Seite als y-Achse, eine der beiden anliegenden Seiten als x-Achse, siehe Fig. 198. Wird die Fläche in Streifen parallel zur y-Achse von der Breite dx zerlegt, so haben alle Streifen dieselbe Fläche $dF = k\,dx$. Die Entfernung l eines beliebigen Streifens von der y-Achse ist x. Also kommt das statische Moment:

$$M_k = \int_0^h x \,.\, k\,dx = \int_0^h k\,x\,d\,x,$$

denn x geht von Null bis h. Das Integral mit willkürlich gelassener oberer Grenze x

$$\int_0^x k\,x\,d\,x$$

hat den Differentialquotienten kx, ist also nach Satz 2 gleich $\frac{1}{2}kx^2 +$ konst., und weil es für $x = 0$ auch gleich Null ist, hat die additive Konstante den Wert Null. Setzen wir nun als obere Grenze h statt x ein, so kommt:

$$M_k = \tfrac{1}{2}kh^2.$$

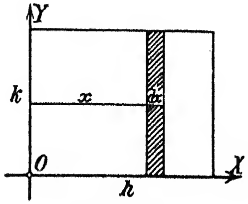


Fig. 198.

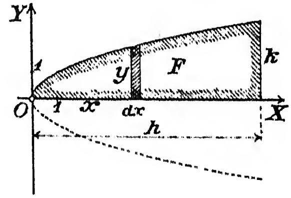


Fig. 199.

3. Beispiel: Das statische Moment M_y in bezug auf die y-Achse soll für diejenige Fläche bestimmt werden, die von der x-Achse, von der vom Anfangspunkt ausgehenden Bildkurve der Funktion

$$y = \sqrt{x}$$

und der zu $x = h$ gehörigen Ordinate $k = \sqrt{h}$ begrenzt wird, wobei $\sqrt{x}$ positiv angenommen sei. Siehe Fig. 199 (vgl. Fig. 106 auf S. 154). Die Bildkurve ist eine Parabel, deren Achse auf der x-Achse liegt. Weil $\sqrt{x}$ positiv sein soll, kommt jedoch nur die obere Hälfte der Parabel in Betracht. Der Inhalt eines Streifens dF der Fläche, dessen linke Ordinate y zur Abszisse x gehört, ist $y\,dx$, da wir ihn als ein Rechteck auffassen dürfen. Der Abstand l von der y-Achse ist gleich x. Mithin gibt (6):

$$M_y = \int_0^h x\,y\,d\,x = \int_0^h x\sqrt{x}\,dx = \int_0^h x^{\frac{3}{2}}\,dx.$$

Bei der Berechnung lassen wir zunächst wieder die obere Grenze willkürlich. Die durch das Integral

$$\int_0^x x^{\frac{3}{2}}\,dx$$

dargestellte Funktion hat denselben Differentialquotienten $x^{\frac{3}{2}}$ wie $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$. Also hat das Integral den Wert $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+$ konst. Da es für $x=0$ auch gleich Null sein soll, ist die additive Konstante gleich Null. Wenn wir schließlich $x=h$ setzen, kommt:

$$M_y = \tfrac{2}{5}h^{\frac{5}{2}} = \tfrac{2}{5}h^2\sqrt{h}.$$

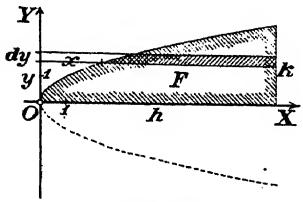


Fig. 200.

4. Beispiel: Das statische Moment M_x derselben Fläche wie im vorigen Beispiel soll in bezug auf die x-Achse gefunden werden. Hier haben wir die Fläche in Streifen parallel zur x-Achse zu zerlegen, wie es in Fig. 200 angedeutet ist. Die Breite eines Streifens dF ist dy, seine Länge gleich $h-x$, also $dF=(h-x)\,dy$, weil der Streifen als Rechteck aufgefaßt werden darf. Der Abstand von der x-Achse ist y, also nach (6):

$$M_x = \int_{y=0}^{y=k} y(h-x)\,dy. \tag{7}$$

Die Grenzen 0 und k geben den kleinsten und größten Abstand der Streifen von der x-Achse an. Man kann das Integral auf zwei Arten berechnen, indem man entweder x oder y als unabhängige Veränderliche auffaßt. Benutzen wir x, so ist $y=\sqrt{x}$ einzusetzen, benutzen wir y, so ist $x=y^2$ einzusetzen. Im ersten Fall ist zu beachten, daß wir in (7) die Grenzen für y, nämlich 0 und k, angegeben haben. Für $y=0$ ist aber $x=0$ und für $y=k$ ist $x=h$. Also sind im ersten Fall für x die Grenzen 0 und h einzuschreiben. Ferner ist in diesem Fall auch der Zuwachs dy durch x auszudrücken. In dieser Hinsicht haben wir:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^{\frac{1}{2}}}{dx} = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ also } dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx.$$

Wenn wir also alles durch x ausdrücken, nimmt (7) die Form an:

$$M_x = \int_0^h \sqrt{x}\,(h-x)\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \int_0^h \tfrac{1}{2}(h-x)\,dx. \tag{8}$$

Bei der Berechnung des Integrals lassen wir wieder zunächst die obere Grenze willkürlich. Das Integral

$$\int_0^x \tfrac{1}{2}(h-x)\,dx$$

ist eine Funktion von x, die den Differentialquotienten $\frac{1}{2}(h-x)$ oder $\frac{1}{2}h-\frac{1}{2}x$ hat. Eine solche Funktion ist aber auch $\frac{1}{2}hx-\frac{1}{4}x^2$. Also hat das Integral den Wert

$\frac{1}{2}hx - \frac{1}{4}x^2 +$ konst. Da es für $x = 0$ den Wert Null haben soll, ist die additive Konstante gleich Null. Setzen wir schließlich für x nach (8) die obere Grenze h ein, so kommt:

$$M_x = \tfrac{1}{2}h^2 - \tfrac{1}{4}h^2 = \tfrac{1}{4}h^2. \tag{9}$$

Nun wollen wir das Moment (7) auch auf die zweite Art bestimmen, indem wir y als unabhängige Veränderliche benutzen, also $x = y^2$ in (7) einsetzen. Dann haben wir:

$$M_x = \int_0^k y(h - y^2)\,dy. \tag{10}$$

Der Leser bemerke, daß wir an den Grenzen nicht mehr $y = 0$ und $y = k$ wie in (7) geschrieben haben, weil jetzt kein Zweifel darüber möglich ist, auf welche Veränderliche sich die Grenzen beziehen, da unter dem Integralzeichen nur noch y vorkommt. Bei der Auswertung des Integrals (10), in dessen Integranden also jetzt y die Rolle der unabhängigen Veränderlichen spielt, lassen wir zunächst wieder die obere Grenze willkürlich. Das Integral

$$\int_0^y y(h - y^2)\,dy$$

ist diejenige Funktion von y, die den Differentialquotienten $y(h - y^2)$ oder $hy - y^3$ hat und für $y = 0$ verschwindet. Die Funktion $\frac{1}{2}hy^2 - \frac{1}{4}y^4$ hat augenscheinlich denselben Differentialquotienten. Daraus folgert man leicht, daß das letzte Integral eben diese Funktion von y ist. Setzt man schließlich für y nach (10) die obere Grenze k, so kommt:

$$M_x = \tfrac{1}{2}hk^2 - \tfrac{1}{4}k^4. \tag{11}$$

Beide Werte (9) und (11) stimmen überein, weil $k = \sqrt{h}$ ist. Man kann auch schreiben:

$$M_x = \tfrac{1}{4}k^4. \tag{12}$$

Wir hatten uns auf den Fall beschränkt, wo die Fläche F vollständig auf der einen Seite der Geraden g liegt. Wenn die Fläche F auf der andern Seite von g gelegen ist, versieht man das statische Moment mit dem Minuszeichen. Demnach wird also der Abstand l des Streifens dF positiv oder negativ in Rechnung gebracht, je nachdem der Streifen auf der einen oder andern Seite der Geraden g liegt. Die Flächen dF sind dagegen positiv in Rechnung zu stellen, da sie die positiven Massen bedeuten.

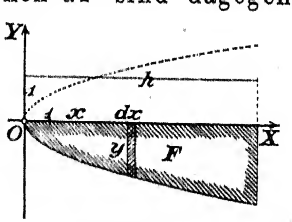


Fig. 201.

5. Beispiel: Stellt man sich dieselbe Aufgabe wie im 3. Beispiel, aber jetzt in bezug auf die unterhalb der x-Achse gelegene Fläche, siehe Fig. 201, wobei also $y = -\sqrt{x}$ ist, wenn $\sqrt{x}$ die positive Wurzel vorstellt, so ist die Streifenfläche dF in der Form $y\,dx$ offenbar

eine negative Größe. Man muß also statt dessen $-y\,dx$ schreiben. Dies aber ist auch jetzt gleich $\sqrt{x}\,dx$, so daß man zu demselben Werte des Moments wie im 3. Beispiel kommt. Dies war zu erwarten.

Wenn man die Fläche F in der Fig. 197 auf S. 246 durch eine Linie in Teile F_1 und F_2 zerlegt, zerfällt jeder Streifen dF in ein zu F_1 und ein zu F_2 gehöriges Stück dF_1 und dF_2. Das statische Moment von dF in bezug auf die Gerade g ist $l\,dF$, während dF_1 und dF_2 in bezug auf g die Momente $l\,dF_1$ und $l\,dF_2$ haben. Da nun aber $dF = dF_1 + dF_2$, also

$$l\,dF = l\,dF_1 + l\,dF_2$$

ist und die statischen Momente aller Streifen zu addieren sind, ergibt sich: Das statische Moment eines ebenen Flächenstücks F in bezug auf eine in seiner Ebene gelegene Achse g ist gerade so groß wie die Summe der statischen Momente seiner Teile F_1 und F_2 in bezug auf dieselbe Achse. Dasselbe gilt, wenn man F in mehr als zwei Teile zerlegt.

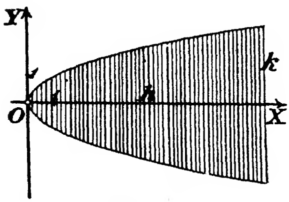


Fig. 202.

6. Beispiel: Wir betrachten die gesamte Fläche, die von der Bildkurve der zweiwertigen Funktion $y = \sqrt{x}$, d. h. von der Parabel, und den zu $x = h$ gehörigen Ordinaten $+k$ und $-k$ begrenzt wird, siehe Fig. 202. Offenbar ist ihr Moment M_y in bezug auf die y-Achse gleich der Summe der Momente des oberen und unteren Flächenstücks. Daher hat die in Fig. 202 geschraffte Fläche in bezug auf die y-Achse nach dem 3. Beispiel das Moment

$$M_y = \tfrac{4}{5} h^2 \sqrt{h}.$$

Dieselbe Fläche hat in bezug auf die x-Achse das statische Moment Null.

Wir wollen nun die Integralformeln für die statischen Momente derjenigen Fläche F berechnen, die von der x-Achse, von der Bildkurve einer vorgeschriebenen Funktion $y = f(x)$ und von den zu $x = a$ und $x = b$ gehörigen Ordinaten begrenzt wird, und zwar sollen die Momente M_x und M_y in bezug auf die x-Achse und y-Achse aufgestellt werden. Wir nehmen die Abszisse b größer als a an. Ferner setzen wir fest, daß ein Moment in bezug auf die x-Achse positiv oder negativ gerechnet werden soll, je nachdem die Fläche oberhalb oder unterhalb der x-Achse liegt. In bezug auf die y-Achse setzen wir das Entsprechende fest.

Wir zerlegen die Fläche F in Streifen parallel zur y-Achse, indem wir x von a bis b um gleiche Teile dx wachsen lassen und alle Teilordinaten errichten. Diese Streifen sind, wenn M_x berechnet werden soll, allerdings nicht zu der Geraden parallel, in bezug auf die das Moment

gesucht wird (also nicht wie in Fig. 197). Aber M_x ist gleich der Summe der Momente aller Streifen in bezug auf die x-Achse. Strebt dx nach Null, so werden die Streifen unendlich schmal. Sie können als Rechtecke aufgefaßt werden. Alle haben Grundlinien von der Länge dx, während ihre Höhen die verschiedenen Ordinaten y sind. Nach dem 2. Beispiel hat nun das Rechteck mit den Seiten dx und y in bezug auf die Seite dx das statische Moment $\frac{1}{2}y^2\,dx$ (da jetzt h und k die Werte y und dx haben). Mithin ist

$$M_x = \int\limits_{x=a}^{x=b} \tfrac{1}{2}y^2\,dx. \tag{13}$$

Das Integral stellt aber eine Summe dar. Diese Summe ist halb so groß wie die aller $y^2\,dx$. Also kann man auch schreiben:

$$M_x = \tfrac{1}{2}\int\limits_{x=a}^{x=b} y^2\,dx. \tag{14}$$

Dies gilt nur unter der Voraussetzung, daß $b > a$ sei (wie wir ausdrücklich annahmen) und die Fläche F oberhalb der x-Achse liege. Wäre die Fläche F unterhalb der x-Achse gelegen, so hätten wir das Minuszeichen hinzuzufügen. Liegt die Fläche F teils oberhalb, teils unterhalb der x-Achse, so zerlegt man sie in ihre Teile (vgl. z. B. Fig. 173, S. 230), berechnet M_x für die einzelnen Teile und summiert dann unter Beachtung der Vorzeichen.

Um M_y zu finden, benutzen wir dieselben Streifen wie soeben. Da sie zu der Achse parallel sind, in bezug auf die jetzt das Moment gesucht wird, kann man die Formel (6) unmittelbar anwenden, indem man darin $l = x$ und $dF = y\,dx$ setzt. Also kommt:

$$M_y = \int\limits_{x=a}^{x=b} x\,y\,dx. \tag{15}$$

Dieser Wert ist, falls $b > a$ ist, auch dem Vorzeichen nach richtig, sobald y positiv ist.

In (13), (14) und (15) muß man natürlich für y die gegebene Funktion $f(x)$ einsetzen, so daß beide statische Momente durch Integrale dargestellt werden, deren Integranden nur die Veränderliche x enthalten.

7. **Beispiel:** Auf Grund von (14) ergibt sich das statische Moment M_x der im 4. Beispiel betrachteten Fläche schneller als damals so: Man hat $a = 0$, $b = h$ und $y = \sqrt{x}$ zu setzen, so daß (14) liefert:

$$M_x = \tfrac{1}{2}\int\limits_0^h x\,dx.$$

Das von 0 bis x erstreckte Integral hat den Wert $\frac{1}{2}x^2$. Demnach kommt wie in (9):

$$M_x = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}h^2 = \tfrac{1}{4}h^2.$$

Die Formeln (13) und (15) gestatten, die statischen Momente M_x und M_y der Fläche F ebenfalls durch Flächenräume zu veranschaulichen: Wir nehmen an, daß die Fläche F von der Bildkurve einer Funktion $y = f(x)$ und von den zu $x = a$ und $x = b$ gehörigen Ordinaten sowie von der x-Achse begrenzt sei. Bilden wir nun die Funktionen:

$$u = \tfrac{1}{2}y^2 = \tfrac{1}{2}[f(x)]^2, \quad v = xy = xf(x), \tag{16}$$

so sind sie als eine u-Kurve und eine v-Kurve darstellbar, deren Ordinaten mit u und v statt mit y bezeichnet sind. Infolge von (16) lassen sich die Formeln (13) und (15) so schreiben:

$$M_x = \int_a^b u\,dx, \qquad M_y = \int_a^b v\,dx. \tag{17}$$

Nach Satz 5, S. 229, sind nun diese Integrale nichts anderes als die Flächen der u- und v-Kurve zwischen den zu $x = a$ und $x = b$ gehörigen Ordinaten. In der Tat also lassen sich die Momente M_x und M_y als Flächen darstellen, sobald man die u- und v-Kurve auf Grund von (16) gezeichnet hat.

8. Beipiel: In den vorhergehenden Beispielen betrachteten wir Flächen, die einerseits von der Bildkurve der Funktion $y = \sqrt{x}$ begrenzt waren. In diesem Fall gibt (16) für u den einfachen Wert:

$$u = \tfrac{1}{2}x.$$

Die u-Kurve ist daher die Gerade, die vom Anfangspunkte mit der Steigung $\frac{1}{2}$ ausgeht. Daher ist der im 4. und 7. Beispiele berechnete Wert von M_x gleich der Fläche, die von dieser Geraden, der x-Achse und der zu $x = h$ gehörigen Ordinate $\frac{1}{2}h$ begrenzt wird, also gleich der Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Grundlinie h und der Höhe $\frac{1}{2}h$, so daß sich $M_x = \frac{1}{4}h^2$ wie im 4. und 7. Beispiel ergibt.

C. Bestimmung der Schwerpunkte von Flächenstücken.

In der Mechanik wird gezeigt, daß es in jedem ebenen Flächenstück F einen Punkt S, den Schwerpunkt der Fläche, derart gibt, daß die Fläche in bezug auf jede in ihrer Ebene gelegenen Gerade g dasselbe statische Moment M hat wie der Punkt S selbst, sobald man sich in S die Gesamtmasse der Fläche vereinigt denkt. Da die Masse nach Voraussetzung (S. 246) gleich der Fläche sein soll, ist also, wenn s

den Abstand des Punktes S von g bedeutet (siehe Fig. 203), das Produkt sF gleich dem Moment M_g, mithin:

$$s = \frac{M_g}{F}.$$

Sind M_x und M_y die statischen Momente der Fläche F in bezug auf die x- und y-Achse und bedeuten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die Abszisse und Ordinate des Schwerpunkts S, so folgt:

$$\mathfrak{x} = \frac{M_y}{F}, \qquad \mathfrak{y} = \frac{M_x}{F}. \tag{18}$$

Damit $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die richtigen Vorzeichen bekommen, hat man zu beachten: M_x wird positiv oder negativ für Flächen mit positiven oder negativen Ordinaten y gerechnet und M_y positiv oder negativ für Flächen mit positiven oder negativen Abszissen x.

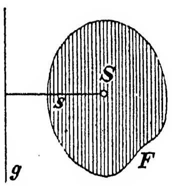


Fig. 203.

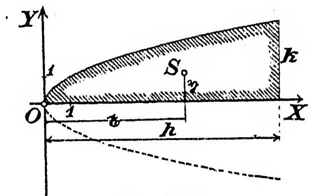


Fig. 204.

9. Beispiel: Der Schwerpunkt der im 3. Beispiele betrachteten halben Parabelfläche F soll bestimmt werden, siehe Fig. 204. Nach Satz 5 ist die Fläche

$$F = \int_0^h y\,dx = \int_0^h \sqrt{x}\,dx = \int_0^h x^{\frac{1}{2}}\,dx.$$

Wir überlassen dem Leser die Berechnung dieses Integrals. Man findet:

$$F = \tfrac{2}{3} h \sqrt{h}.$$

Nach dem 3. und 4. Beispiel ist ferner:

$$M_y = \tfrac{2}{5} h^2 \sqrt{h}, \qquad M_x = \tfrac{1}{4} h^2.$$

Nach (18) kommt somit:

$$\mathfrak{x} = \frac{\frac{2}{5} h^2 \sqrt{h}}{\frac{2}{3} h \sqrt{h}} = \tfrac{3}{5} h, \qquad \mathfrak{y} = \frac{\frac{1}{4} h^2}{\frac{2}{3} h \sqrt{h}} = \tfrac{3}{8} \cdot \sqrt{h}$$

oder, da die Endordinate $\sqrt{h}$ mit k bezeichnet wurde:

$$\mathfrak{x} = \tfrac{3}{5} h, \qquad \mathfrak{y} = \tfrac{3}{8} k.$$

D. Berechnung von Trägheitsmomenten.

Das Trägheitsmoment T_g einer ebenen Fläche F in bezug auf eine in ihrer Ebene gelegene Achse g wird in der Mechanik wie das sta-

tische Moment als eine Summe von Produkten erklärt mit dem einzigen Unterschiede, daß jedes unendlich kleine Flächenstückchen nicht mit seinem Abstand l von g, sondern mit dem Quadrat dieses Abstandes zu multiplizieren ist. An die Stelle der Formel (6) tritt also hier diese:

$$T_g = \int l^2\, dF, \tag{19}$$

wobei wieder zu bemerken ist, daß die Formel nur dann richtig ist, wenn die Flächenstreifen dF mit dem Pluszeichen in die Rechnung eintreten. Das Trägheitsmoment ist im Gegensatze zum statischen Moment eine stets positive Größe.

10. **Beispiel:** Die Trägheitsmomente T_x und T_y der im 3. Beispiele betrachteten Fläche in bezug auf die Koordinatenachsen sollen berechnet werden. Statt der Formel für M_y im 3. Beispiel haben wir:

$$T_y = \int_0^h x^2\, y\, dx = \int_0^h x^2 \sqrt{x}\, dx = \int_0^h x^{\frac{5}{2}}\, dx = \tfrac{2}{7} h^{\frac{7}{2}} = \tfrac{2}{7} h^3 \sqrt{h} = \tfrac{2}{7} h^3 k.$$

Statt (7) bekommen wir ferner:

$$T_x = \int_{y=0}^{y=k} y^2 (h-x)\, dy.$$

Dies Integral läßt sich wieder auf zwei Arten berechnen, je nachdem man alles durch x ausdrückt, indem man $y = \sqrt{x}$ setzt, oder alles durch y, indem man $x = y^2$ setzt. Wir wollen den zweiten Weg einschlagen:

$$T_x = \int_0^k y^2 (h-y^2)\, dy = \tfrac{1}{3} hk^3 - \tfrac{1}{5} k^5 = \tfrac{2}{15} hk^3.$$

11. **Beispiel:** Wie groß ist das Trägheitsmoment eines Rechtecks mit den Seiten h und k in bezug auf die Seite k? Zerlegen wir das Rechteck in Streifen parallel zur Seite k, indem wir k als y-Achse benutzen, so ist l gleich dem von Null bis h veränderlichen x zu setzen und dF ein Rechteck mit den Seiten dx und k. Also kommt:

$$T_k = \int_0^h x^2\; k\,dx = \int_0^h kx^2\, dx.$$

Die Funktion $\frac{1}{3}kx^3$ hat denselben Differentialquotienten wie das von Null bis x erstreckte Integral, und da sie auch für $x = 0$ verschwindet, ist geradezu:

$$\int_0^x kx^2\, dx = \tfrac{1}{3} kx^3.$$

Setzt man $x = h$ als Grenze ein, so kommt:

$$T_k = \tfrac{1}{3} kh^3. \tag{20}$$

Da die Fläche F des Rechtecks gleich kh ist, kann man auch schreiben:

$$T_k = \tfrac{1}{3} F h^2.$$

Wie bei den statischen Momenten (S. 250) erkennen wir auch bei den Trägheitsmomenten: Das Trägheitsmoment einer ebenen Fläche F in bezug auf eine in ihrer Ebene gelegene Gerade ist gleich der Summe der Trägheitsmomente aller Teile F_1, F_2 usw. der Fläche in bezug auf dieselbe Gerade.

Nun werde die Aufgabe gestellt, die Trägheitsmomente T_x und T_y der Fläche F in bezug auf die x-Achse und y-Achse auszudrücken für den Fall, wo die Fläche einerseits von der Bildkurve irgendeiner Funktion

$$y = f(x),$$

andererseits von der x-Achse und außerdem von den zu $x = a$ und $x = b$ gehörigen Ordinaten begrenzt wird. Wir nehmen dabei $b > a$ an und setzen voraus, daß die Fläche vollständig oberhalb der x-Achse liege. Die Schlußfolgerung ist wie auf S. 251 mit folgenden Unterschieden: Als Moment des Streifens $y\,dx$ mit der Grundlinie dx und der Höhe y in bezug auf die x-Achse ist nicht $\frac{1}{2}y^2\,dx$, sondern nach (20) der Wert $\frac{1}{3}y^3 dx$ zu setzen, so daß statt (13) kommt:

$$T_x = \int\limits_{x=a}^{x=b} \tfrac{1}{3} y^3\,dx$$

oder, da die Summe aller $\frac{1}{3}y^3\,dx$ das Drittel der Summe aller $y^3\,dx$ ist:

$$(21)\qquad T_x = \tfrac{1}{3}\int\limits_{x=a}^{x=b} y^3\,dx\,.$$

Fernerhin ist in den Betrachtungen, die zu (15) führten, jetzt statt $l = x$ der Wert x^2 zu setzen, so daß kommt:

$$(22)\qquad T_y = \int\limits_{x=a}^{x=b} x^2\,y\,dx\,.$$

12. Beispiel: Das im 10. Beispiel berechnete Trägheitsmoment T_x kann man nach (21) auch in der Form

$$T_x = \tfrac{1}{3}\int\limits_0^h \sqrt{x}^3\,dx$$

bilden. Der Integrand $\sqrt{x}^3$ oder $x^{\frac{3}{2}}$ ist der Differentialquotient von $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$. Deshalb hat das Integral mit veränderlicher oberer Grenze x den Wert

$$\tfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \text{konst.}$$

Da es für $x = 0$ verschwindet, muß die Konstante gleich Null sein. Setzt man schließlich $x = h$ ein, so kommt:

$$T_x = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} h^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{15} h^2 \sqrt{h}.$$

Weil $k = \sqrt{h}$ ist, stimmt dieser Wert mit dem im 10. Beispiel überein.

E. Aufgaben über Bewegungen.

Ein Punkt oder, wie man auch sagt, ein Mobil beschreibe irgendeine gerade oder krumme Bahn. Die Länge des Weges werde von einer bestimmten Stelle, dem Nullpunkt O, an gemessen. Zur Zeit x befinde sich das Mobil um y Längeneinheiten vom Nullpunkt entfernt, immer gemessen längs der Bahn selbst. Findet die Bewegung gesetzmäßig statt, so ist y eine Funktion $f(x)$ von x. Wir erörterten auf S. 70, daß der Differentialquotient $dy : dx$ die Geschwindigkeit des Mobils zur Zeit x ist. Ihr Wert hängt wesentlich von den Einheiten der Länge und der Zeit ab. So bedeutet z. B. 2,35 m/sek. eine Geschwindigkeit für den Fall, wo die Längeneinheit das Meter und die Zeiteinheit die Sekunde ist. Wenn nicht die Weglänge y selbst, sondern die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit x gegeben ist, kommt die Frage nach der Art der Bewegung auf die Frage zurück, welche Funktionen y von x diese gegebene Geschwindigkeit als Differentialquotienten haben, also auf eine Frage der Integralrechnung.

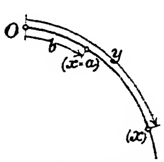


Fig. 205.

Die Zeit braucht nicht vom Beginne der Bewegung an gemessen zu sein, ebensowenig braucht das Mobil zu Anfang der Bewegung gerade im Nullpunkte zu sein. Wir nehmen daher allgemeiner an (siehe Fig. 205):

Zur Zeit $x = a$ sei das Mobil an der Stelle $y = b$ des Weges; zu beliebigen Zeiten x sei seine Geschwindigkeit v als stetige Funktion $v(x)$ der Zeit x gegeben. Gefragt wird, welche längs der Bahn zu messende Entfernung y von O das Mobil zu beliebiger Zeit x hat.

Gesucht wird also eine Funktion y von x, die erstens für $x = a$ den Wert $y = b$ und zweitens für beliebiges x die gegebene Funktion $v(x)$ als Differentialquotienten hat. Nun erfüllt das Integral

$$\int_a^x v(x)\,dx$$

die zweite Bedingung. Nach Satz 2, S. 213, muß daher die gesuchte

Funktion y von x die Form

$$y = \int_a^x v(x)\,dx + \text{konst.}$$

haben. Da das Integral für $x = a$ gleich Null ist, aber y für $x = a$ nach der ersten Bedingung gleich b sein soll, muß die additive Konstante gleich b sein. Demnach ist

$$y = \int_a^x v(x)\,dx + b$$

die einzige Funktion, die beiden Bedingungen genügt. Wir wollen diese Schlußfolgerung durch einen Satz festlegen:

Satz 9: Die einzige Funktion y von x, die für $x = a$ den Wert b hat und deren Differentialquotient eine gegebene stetige Funktion $v(x)$ ist, wird dargestellt durch:

$$y = \int_a^x v(x)\,dx + b.$$

Ferner hat sich ergeben:

Satz 10: Hat ein Mobil zur Zeit x die Geschwindigkeit $v(x)$ und ist es zur Zeit $x = a$ vom Anfangspunkte der Wegmessung um b Längeneinheiten entfernt, so ist es zur Zeit x um

$$y = \int_a^x v(x)\,dx + b$$

Längeneinheiten von dieser Stelle entfernt. Der Weg ist dabei längs der geraden oder krummen Bahn des Mobils in einem bestimmten Sinne zu messen.

Man sieht auch leicht ein, wie man die mittlere oder durchschnittliche Geschwindigkeit des Mobils für eine gewisse Zeitspanne, etwa von $x = x_0$ bis $x = x_1$, berechnen kann. Nach S. 70 ist sie nämlich gleich dem in dieser Zeitspanne zurückgelegten Weg, dividiert mit $x_1 - x_0$. Wenn nun das Mobil zur Zeit x_0 an der Stelle y_0 und zur Zeit x_1 an der Stelle y_1 der Bahn ist, schließt man so: Zur Zeit $x = x_0$ ist $y = y_0$, und allgemein ist y eine Funktion von x, deren Differentialquotient die gegebene Funktion $v(x)$ vorstellt. Nach Satz 9 muß demnach

$$y = \int_{x_0}^x v(x)\,dx + y_0$$

sein, also insbesondere für $x = x_1$:

$$y_1 = \int_{x_0}^{x_1} v(x)\,dx + y_0,$$

so daß

$$y_1 - y_0 = \int_{x_0}^{x_1} v(x)\,dx$$

ist. Division mit $x_1 - x_0$ liefert die mittlere Geschwindigkeit v_m in der Zeitspanne von $x = x_0$ bis $x = x_1$:

$$v_m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} v(x)\,dx. \tag{23}$$

Nach Satz 8, S. 244, bedeutet dies: Die mittlere Geschwindigkeit v_m ist das arithmetische Mittel aller Momentangeschwindigkeiten v, die sich ergeben, wenn die Zeit x von x_0 bis x_1 immer um dieselbe unendlich kleine Größe dx wächst.

Zur Formel des Satzes 10 ist noch zu bemerken: Die Weglänge y nimmt nach Satz 7, S. 104, zu oder ab, je nachdem ihr Differentialquotient oder die Geschwindigkeit $v(x)$ positiv oder negativ ist. Eine Umkehr der Bewegung kann also nur zu denjenigen Zeiten x stattfinden, für die die Geschwindigkeit $v(x)$ gleich Null wird. Dies ist auch begrifflich einleuchtend: „Stillstand bedeutet Rückgang". Man beachte aber, daß die Geschwindigkeit, falls sie zuerst positiv war und gleich Null geworden ist, nachher doch unter Umständen wieder positiv werden kann. Dann tritt keine Umkehr ein.

13. Beispiel: Eine Bewegung heißt gleichförmig, wenn die momentane Geschwindigkeit konstant, gleich c ist. Nach Satz 10 ist dann:

$$y = \int_a^x c\,dx + b = c(x - a) + b.$$

d. h. der Weg ist eine lineare Funktion der Zeit, vgl. S. 34.

14. Beispiel: Ein Punkt bewege sich so, daß seine Geschwindigkeit x Sekunden nach Beginn der Bewegung gleich x^n ist. Welchen Weg y legt er in x Sekunden zurück? Hier ist $v(x) = x^n$, $a = 0$, $b = 0$, also nach Satz 10:

$$y = \int_0^x x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Die mittlere Geschwindigkeit in der Zeitspanne von x_0 bis x_1 ist nach (23):

$$v_m = \frac{1}{n+1} \frac{x_1^{n+1} - x_0^{n+1}}{x_1 - x_0}.$$

15. Beispiel: Um das Gesetz des freien Falls im luftleeren Raum zu finden, macht man Gebrauch vom Trägheitsgesetze: Wenn ein Mobil[1] infolge der Einwirkung von Kräften zur Zeit x eine gewisse Geschwindigkeit v erreicht hat und von diesem Augenblick an alle Kräftewirkungen aufhören, bewegt sich das Mobil weiterhin beständig mit dieser erreichten Geschwindigkeit, also mit konstanter Geschwindigkeit, so daß es von da an in jeder Zeiteinheit v Längeneinheiten zurücklegt. Mit Hilfe der Atwoodschen Fallmaschine kann man ein plötzliches Aufheben der Anziehungskraft der Erde bewirken und feststellen, daß, wenn dies nach einer Sekunde des Falles geschieht, von da an in jeder Sekunde rund 10 m zurückgelegt werden. Geschieht es jedoch nach x Sekunden, so zeigt die Maschine, daß von da an in jeder Sekunde rund $10\,x$ Meter zurückgelegt werden, d. h.: Durch den freien Fall erreicht das Mobil in x Sekunden eine momentane Geschwindigkeit $v = 10\,x$, genauer $v = gx$, wo g die Gravitationskonstante 9,81 ist. Also hat man beim freien Fall $v(x) = gx$ zu setzen. Rechnen wir den Weg vom Beginne des Falls an, so ist daher nach Satz 10 die Weglänge in Metern:

$$y = \int_0^x gx\,dx = \tfrac{1}{2}gx^2.$$

F. Berechnung von Mittelkräften.

Das Newtonsche Gravitationsgesetz (vgl. 6. Beispiel, S. 142) gilt für Massen, deren Volumina als materielle Punkte aufgefaßt werden können. Um die Wirkung ausgedehnter Massen aufeinander zu berechnen, denkt man sich die Massen in unendlich kleine Teilchen zerlegt und stellt die gegenseitige Wirkung eines jeden Teilchens der einen Masse auf jedes der anderen fest. So kommt man zu unendlich vielen unendlich kleinen Kräften, deren Gesamtwirkung zu ermitteln eine Aufgabe der Integralrechnung ist, die wir hier jedoch nur in einfachen Fällen lösen wollen, wo alle Einzelkräfte längs derselben Geraden wirken.

16. Beispiel: Ein homogener materieller Rundstab AB übt auf eine in der Verlängerung seiner Achse über A hinaus gelegene und in einem Punkte M vereinigte Masse m eine Anziehung aus, die bestimmt werden soll. Die Längeneinheit des Stabes habe die Masse μ. Wir denken uns den Stab AB in lauter unendlich kleine Stücke zerlegt, indem wir die Entfernung x von M Schritt für Schritt vom Werte $MA = a$ an um dx bis zum Werte $MB = b$ wachsen lassen, so daß jedes Stück die Länge dx und daher die Masse $\mu\,dx$ hat; siehe Fig. 206. Wird die Kraft, die

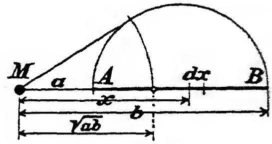


Fig. 206.

[1] Wir beschränken uns auf den Fall, wo das Mobil als ein materieller Punkt aufgefaßt werden darf.

von der Masse 1 auf die Masse 1 in der Entfernung 1 ausgeübt wird gleich 1 gesetzt, so ist die Kraft, mit der ein um die Strecke x von M entferntes Stückchen $\mu\,dx$ auf die in M vereinigte Masse m wirkt, nach dem Gravitationsgesetze gleich

$$\frac{m\mu\,dx}{x^2}.$$

Da alle Einzelkräfte in der Richtung nach M wirken, addieren sie sich zu einer Mittelkraft:

$$\int_a^b \frac{m\,\mu\,dx}{x^2} = m\,\mu\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{m\,\mu}{a\,b}(b-a).$$

Der Leser möge selbst diese Berechnung durchführen. Man kann fragen, wo man die in einem Punkte vereinigt gedachte Gesamtmasse $\mu(b-a)$ des Stabes anbringen müßte, damit sie dieselbe Wirkung auf die Masse m ausübe wie der Stab. Offenbar müßte sie eine Lage auf AB in einer Entfernung x von M derart haben, daß ihre Wirkung $m\,\mu\,(b-a) : x^2$ gleich der soeben berechneten wird. Also müßte $x = \sqrt{ab}$ sein, so daß sich dieselbe Konstruktion wie in Fig. 196 für das 1. Beispiel (S. 245) ergibt. Man darf sich daher nicht vorstellen, die Masse $\mu\,(a-b)$ sei in der Mitte von AB vereinigt.

17. Beispiel: Die Dehnung soll festgestellt werden, die ein lotrecht hängender elastischer homogener Stab durch sein Gewicht und ein unten angehängtes Gewicht erfährt. Wenn wir uns den Stab zunächst auf wagerechter Ebene liegend denken, ihn an einem Ende befestigen und am anderen einen Zug auf ihn ausüben, ergibt sich die Dehnung, die er erleidet, mit Hilfe des Elastizitätsmoduls E, dessen Wert vom Material abhängt. In Zentimetern bedeutet nämlich $1 : E$ die Verlängerung, die ein Stab von 1 cm Länge und 1 qcm Querschnitt durch einen Zug von 1 kg erfährt. Ist der Stab von anderer Länge und Dicke sowie die Zugkraft eine andere, so gilt der Satz, daß die Dehnung zur Länge und zur Zugkraft geradezu, zum Querschnitte dagegen umgekehrt proportional ist. Nun werde der Stab, der etwa l cm lang sei und einen Querschnitt von Q qcm habe, lotrecht aufgehängt und unten durch ein angehängtes Gewicht von P kg belastet. Wir denken uns den Stab von oben her in lauter gleichlange unendlich kleine Teile zerlegt, indem wir die Entfernung x vom oberen Ende Schritt für Schritt von 0 an bis l um dx anwachsen lassen. Das Teilchen, das x cm vom oberen Ende entfernt ist, hat die Last von P kg sowie die des unteren Stabrestes zu tragen. Dieser Rest ist ein Zylinder von $(l-x)$ cm Länge und Q qcm Querschnitt, mithin von $Q\,(l-x)$ ccm oder $0{,}001\,Q\,(l-x)$ cdm Inhalt. Ist s das spezifische Gewicht des Stabes, so hat dieser Rest, da 1 cdm s kg wiegt, ein Gewicht von $0{,}001\,s\,Q\,(l-x)$ kg, so daß auf jenes Stabteilchen das Gewicht $0{,}001\,s\,Q\,(l-x) + P$ (in kg) wirkt. Da das Teilchen die Länge dx in Zentimetern und den Querschnitt Q in Quadratzentimetern hat, erfährt es folglich die Verlängerung:

$$[0{,}001\,s\,Q\,(l-x) + P]\,\frac{dx}{EQ},$$

ausgedrückt in Zentimetern. Die Gesamtdehnung des Stabes ist die Summe:

$$\int_0^l [0{,}001\,s\,Q\,(l-x) + P]\,\frac{dx}{EQ}.$$

Versteht man unter a und b die Konstanten

$$a = \frac{0{,}001\, s\, Q\, l + P}{E\, Q}, \quad b = \frac{0{,}001\, s}{E},$$

so läßt sich das Integral einfacher schreiben und ausrechnen. Es kommt:

$$\int_0^l (a - b\,x)\, dx = a\,l - \tfrac{1}{2}\, b\, l^2.$$

Hiernach ist, wenn die Werte von a und b wieder eingesetzt werden, die Gesamtdehnung in Zentimetern:

$$\frac{P}{E\,Q}\, l + 0{,}0005\, \frac{s\, l^2}{E}.$$

Da das Eigengewicht G des Stabes $0{,}001\, s\, Q\, l$ Kilogramm beträgt, können wir hierfür schreiben:

$$\frac{P + \frac{1}{2} G}{E\, Q}\, l. \tag{24}$$

Hängt kein Gewicht am Stab, ist also $P = 0$, so ergibt sich

$$\frac{\frac{1}{2} G}{E\, Q}\, l$$

als Dehnung des Stabes durch sein eigenes Gewicht. Die Vergleichung mit (24) zeigt, daß die eigene Schwere des Stabes auf seine Dehnung gerade so wirkt, als ob das halbe Gewicht des Stabes als Last unten anhänge, der Stab selbst aber gewichtslos sei. Für Kupfer z. B. ist $s = 9$ und $E = 1\,300\,000$. Hat der Stab 10 m Länge und 4 qcm Querschnitt und trägt er eine Last von 100 kg, so ist $l = 1000$, $Q = 4$, $P = 100$, woraus sich eine Dehnung um rund 0,023 cm ergibt.

Diese Auswahl von Anwendungen des Integralbegriffs mag zunächst genügen. Wir haben uns eine Beschränkung auferlegt, weil wir nur Beispiele vorführen wollten, in denen die Rechnung auf Grund der bisher gefundenen Sätze durchführbar war. Insbesondere ist dies der Grund dafür, daß wir in den Beispielen unter B., C. und D. immer die Bildkurve der besonders einfachen Funktion $y = \sqrt{x}$ benutzt haben.

Sechstes Kapitel.

Die logarithmischen Funktionen.

§ 1. Der natürliche Logarithmus.

Im vorletzten Kapitel brachten wir einiges aus der analytischen Geometrie, im letzten den Integralbegriff. Deshalb ist es an der Zeit, uns wieder einmal die Regeln für das Differentiieren ins Gedächtnis zurückzurufen. Es waren ihrer sieben: die Summenregel, die Faktorregel, die Produktregel, die Bruchregel, die Potenzregel, die Kettenregel und die Umkehrregel. Hoffentlich weiß der Leser über alle noch Bescheid; einen gelinden Zweifel hegen wir bezüglich der Umkehrregel, die bisher nur einmal angewandt wurde. Wir legen sie daher dem Leser ans Herz! Man darf übrigens nicht glauben, daß es mit jenen sieben Regeln sein Bewenden habe; einige kommen noch dazu, aber sie werden sich ebenso leicht merken lassen. Von den bisher aufgestellten Regeln ist eine andersartig als die andern, nämlich die Potenzregel, weil sie sich auf eine Funktion von bestimmter Form bezieht, auf die Potenz x^n mit konstantem Exponenten n. Sie besagt, daß x^n den Differentialquotienten nx^{n-1} hat, d. h. daß $x^n : n$ den Differentialquotienten x^{n-1} hat. Bezeichnen wir $n-1$ mit m, daher n mit $m+1$, so besagt sie: Die Funktion

$$\frac{x^{m+1}}{m+1}$$

hat den Differentialquotienten

$$x^m.$$

Deshalb können wir das Integral

$$\int_a^x x^m\,dx$$

mit irgendeinem Anfangswert a berechnen. Denn eine Funktion mit dem Differentialquotient x^m ist die Funktion $x^{m+1} : (m+1)$. Also

sind nach Satz 2, S. 213, alle derartigen Funktionen die von der Form

$$\frac{x^{m+1}}{m+1} + \text{konst.} \tag{1}$$

Aber die Tatsache, daß jede Funktion, deren Differentialquotient x^m ist, die Form (1) hat, kann uns leicht verleiten, unsere Fähigkeiten zu überschätzen. Die Sache hat nämlich einen Haken: In (1) kommt $m+1$ im Nenner vor, und man darf nicht mit Null dividieren. Also darf $m+1$ nicht gleich Null, d. h. m nicht gleich -1 angenommen werden. Demnach wissen wir noch nicht, wie das Integral

$$\int_a^x x^{-1}\,dx \qquad \text{oder} \qquad \int_a^x \frac{dx}{x}$$

zu berechnen ist. Das ist eine sehr merkwürdige Lücke. Sie führt uns zu der wichtigen Aufgabe:

Diejenigen Funktionen y von x zu ermitteln, die den Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \tag{2}$$

haben.

Das gegenwärtige Kapitel ist der Lösung dieser Aufgabe gewidmet. Wir werden zu äußerst wichtigen Funktionen gelangen.

Da der Bruch $1:x$ für jedes x außer $x=0$ stetig ist, gehört nach der Vorschrift (2) zu jedem unendlich kleinen Zuwachs dx von x ein unendlich kleiner Zuwachs von y, nämlich $dy = dx:x$, außer an der Stelle $x=0$. Die gesuchten Funktionen sind daher für alle Werte von x außer $x=0$ stetig. Man kann sich leicht eine Vorstellung vom ungefähren Verlauf ihrer Bildkurven machen. Dazu dient das auf S. 214 auseinandergesetzte Verfahren: Ist P oder $(x;y)$ ein Punkt einer Bildkurve, so bekommen wir nach (2) seine Tangente in Fig. 207, indem wir von P das Lot PQ auf die y-Achse fällen, vom Fußpunkte Q die y-Einheit auf der y-Achse rückwärts, im negativen Sinne, bis T abtragen und schließlich T mit P durch die Gerade verbinden, denn diese Gerade hat die Steigung $1:x$, wie es (2) verlangt. Führen wir dies an möglichst vielen Stellen aus, siehe Fig. 208 (die wir willkürlich durch einen Kreis begrenzt haben), so bekommen wir wie auf S. 215 eine Schar von Wegweisern, die eine

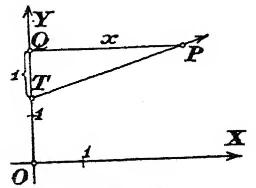


Fig. 207.

Strömung andeuten. Die Stromlinien sind die Bildkurven der gesuchten Funktionen. Man sieht, daß die Kurven um so steiler verlaufen, je näher sie der y-Achse sind. Die y-Achse teilt die Figur symmetrisch, d. h. zwei Punkte, die zur y-Achse symmetrisch liegen (sich nur durch das Vorzeichen von x unterscheiden), haben symmetrisch zur y-Achse gelegene Tangenten. Die Bildkurven kommen von unten her, sich springbrunnenartig nach beiden Seiten in immer flacher werdenden Bogen ausbreitend.

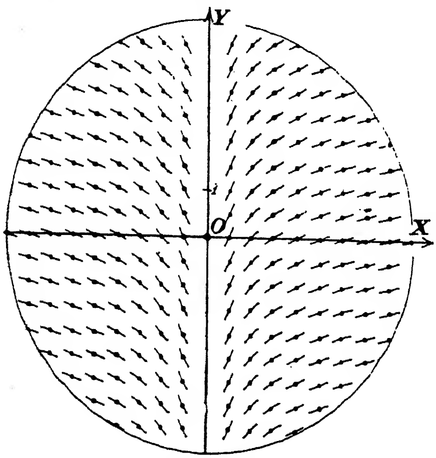


Fig. 208.

Wegen der Symmetrie zur y-Achse braucht nur die rechte Hälfte der Figur untersucht zu werden. Wir behaupten, daß sich alle Stromlinien, die dort verlaufen, aus einer einzigen ableiten lassen und zwar durch zwei verschiedene Verfahren. Um dies vollkommen deutlich zu verstehen, wird der Leser gebeten, mit dem Bleistift in Fig. 208 eine der Stromlinien ungefähr nachzuzeichnen, etwa diejenige, die durch den Einheitspunkt der x-Achse geht. Dieser Einheitspunkt ist (absichtlich, wie nachher erklärt werden wird) in Fig. 208 nicht eingezeichnet. Man entnehme die x-Einheit aus der Hilfsfigur 207 und ziehe, vom Einheitspunkte der x-Achse nach oben und unten hin möglichst den Wegweisern folgend, die Stromlinie, so gut man kann. Wir gehen darauf aus, sie genau zu bestimmen, aber wir wissen noch nicht, von welcher Funktion sie die Bildkurve ist. Deshalb helfen wir uns vorläufig so, daß wir sagen: Unter $y = F(x)$ soll bis auf weiteres diejenige noch unbekannte Funktion von x verstanden werden, deren Bild diese bestimmt vorhandene, aber uns noch nicht genügend genau bekannte Stromlinie durch den Einheitspunkt der x-Achse ist.

Nun nehme man ein Stück Pauspapier, lege es auf Fig. 208 und ziehe auf ihm die gezeichnete Stromlinie sowie die y-Achse nach. Dann verschiebe man das Papier beliebig weit so, daß die y-Achse in sich verschoben wird. Man wird bemerken: In jeder Lage des Papiers paßt die Linie in das Strömungsbild hinein. Dies war nach Satz 2, S. 213, vorauszusehen. Denn alle Stromlinien sind die Bilder von Funktionen

mit dem in (2) angegebenen Differentialquotienten $1 : x$, und falls $F(x)$ eine Funktion ist, die diesen Differentialquotienten hat, wird nach jenem Satz auch $F(x) +$ konst. eine Funktion sein, die den Differentialquotienten $1 : x$ hat. Die Bildkurve von $y = F(x) +$ konst. geht aus der von $y = F(x)$ hervor, wenn man alle Ordinaten um dieselbe Konstante vergrößert oder verkleinert, und das geschieht eben, wenn man das Pauspapier so verschiebt, daß sich die y-Achse in sich bewegt, wobei man die Bewegung nach oben oder unten hin ausführen kann. Hiernach sind alle rechts verlaufenden Stromlinien einander kongruent, nämlich die Bilder aller Funktionen von der Form $y = F(x) +$ konst.

Was nun zu erörtern ist, fällt manchem schwer, obgleich es an sich einfach ist; es ist bloß eine ungewohnte Schlußfolgerung. Das haben uns verschiedene Anfragen von Lesern der früheren Auflagen dieses Buches gezeigt. Wir wollen deshalb ausführlich zu Werke gehen.

Zur Vorbereitung tue man folgendes: Vorhin war die durch den Einheitspunkt der x-Achse gehende Stromlinie gezeichnet worden. Jetzt fälle man von möglichst vielen Punkten dieser Kurve auf die y-Achse die Lote (die also zur x-Achse parallel sind) und bestimme auf diesen Loten die Mitten. Man wird dann beobachten, daß die von diesen Mitten gebildete neue Kurve wieder in das Strombild von Fig. 208 gut hineinpaßt. Statt die Mitten zu nehmen, kann man auch z. B. von jedem der Lote nur ein Drittel nehmen oder auch zwei Drittel usw., ja man kann auch jedes der Lote nach rechts hin z. B. verdoppeln oder, weil das für die kleine Figur zu viel ist, jedes Lot nach rechts hin um seine Hälfte vermehren, usw. Allgemein: Man kann alle Lote von den Punkten jener Stromlinie auf die y-Achse nach irgendeinem konstanten Verhältnisse verkleinern oder vergrößern, immer wird man dadurch zu einer Kurve kommen, die gut in das Strombild von Fig. 208 hineinpaßt. Wir bitten den Leser dringend, das, was soeben gesagt wurde, nicht nur zu lesen, sondern wirklich auszuführen! Worauf beruht nun dieser zunächst nur erfahrungsmäßig festgestellte Umstand? Der Schlüssel des Geheimnisses liegt einfach darin, daß die x-Einheit zwar in Fig. 207 angegeben, aber tatsächlich gar nicht benutzt worden ist. Deshalb haben wir auch die x-Einheit in Fig. 208 gar nicht angegeben. In Fig. 208 ist es also ganz gleichgültig, wie groß man die x-Einheit wählt. Hat man nun irgendein bestimmtes Zahlenpaar x, y als Koordinaten eines Punktes angenommen, z. B. $x = 3$, $y = 5$, und ersetzt man die x-Einheit z. B. durch die halbe Strecke, so wird der Punkt, der in dem neuen System die Koordinaten $x = 3$, $y = 5$ hat, dadurch aus dem alten Punkte gewonnen, daß man auf dem Lote vom alten Punkt auf die y-Achse die Mitte nimmt, das Lot also durch das halbe Lot ersetzt,

denn jetzt bedeutet $x = 3$ nur noch eine halb so große Strecke wie vorher. Hieraus erhellt: Jede Stromlinie geht wieder in eine Stromlinie über, wenn alle Lote von ihren Punkten auf die y-Achse nach irgendeinem konstanten Verhältnisse verkleinert oder vergrößert werden.

Nebenbei bemerkt: Nach S. 88 sind deshalb alle Stromlinien zueinander affin; dabei ist die y-Achse die Affinitätsachse, weil die Lote auf diese Achse nach konstantem Verhältnisse geändert werden.

Wenn wir nun aber die zuerst gewählte x-Einheit beibehalten wollen, kommt das geometrische Verfahren augenscheinlich darauf hinaus, daß die Abszissen x mit irgendeiner positiven Konstante a multipliziert werden dürfen. Mithin sind alle rechterhand der y-Achse verlaufenden Stromlinien die Bilder aller Funktionen $F(ax)$, wo a irgend eine positive Konstante bezeichnet.

Zum Überfluß wollen wir dies nun auch rechnerisch beweisen. Angenommen war, daß $F(x)$ die zuerst in Fig. 208 eingezeichnete Stromlinie durch den Einheitspunkt der x-Achse zum Bilde habe, d. h. daß $y = F(x)$ das Bild derjenigen Kurve sei, der die in (2) angegebene Steigung $1 : x$ zukommt und die für $x = 1$ die Ordinate $y = 0$ hat, so daß $F(1) = 0$ ist. Die Voraussetzungen sind demnach:

(3) $$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

und

(4) $$F(1) = 0.$$

Zu beweisen ist, daß die Funktion $F(ax)$ unter diesen Voraussetzungen ebenfalls den Differentialquotienten $1 : x$ hat. Wir setzen $ax = z$ und benutzen die Kettenregel. Wegen $F(ax) = F(z)$ kommt:

$$\frac{dF(ax)}{dx} = \frac{dF(z)}{dx} = \frac{dF(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Nach (3) ist aber:

$$\frac{dF(z)}{dz} = \frac{1}{z},$$

und wegen $z = ax$ ist:

$$\frac{dz}{dx} = a.$$

Einsetzen dieser Worte gibt:

$$\frac{dF(ax)}{dx} = \frac{1}{z} \cdot a = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x},$$

wie zu beweisen war.

Blicken wir auf das bisher Gesagte insgesamt zurück, so folgt:

Erstens: Jede rechts von der y-Achse verlaufende Stromlinie ist das Bild einer der Funktionen $F(x)+k$, wo k irgendeine positive oder negative Konstante bedeuten kann.

Zweitens: Jede rechts von der y-Achse verlaufende Stromlinie ist das Bild einer der Funktionen $F(ax)$, wo a irgendeine positive Konstante bedeuten kann.

Aus beiden Ergebnissen zusammen wird geschlossen: Jede Funktion $F(x)+k$ muß sich auch in der Form $F(ax)$ darstellen lassen, d. h.: hat man irgendeine positive Konstante a angenommen, so gibt es auch immer eine Konstante k derart, daß

$$F(ax) = F(x) + k \tag{5}$$

ist und zwar für alle positiven Abszissen x. Wir dürfen insbesondere $x=1$ wählen. Dann kommt $F(a) = F(1) + k$ oder nach (4) einfach $F(a) = k$. Somit ist k nichts anderes als der Wert $F(a)$ der Funktion $F(x)$ für $x=a$. Setzen wir ihn in (5) ein, so kommt: Für alle positiven Werte von x ist

$$F(ax) = F(x) + F(a).$$

Bezeichnen wir nun irgendeine positive Abszisse x mit b, so folgt:

$$F(ab) = F(b) + F(a).$$

Wir haben daher gefunden:

Diejenige uns noch unbekannte Funktion $F(x)$, der die beiden Eigenschaften

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad F(1) = 0 \tag{6}$$

zukommen, hat für beliebige positive Werte a und b die Eigenschaft:

$$F(ab) = F(a) + F(b). \tag{7}$$

Dies bedeutet geometrisch: Die Summe der zu irgend zwei Abszissen $x=a$ und $x=b$ gehörigen Ordinaten $F(a)$ und $F(b)$ ist gleich der Ordinate $F(ab)$ desjenigen Punktes, dessen Abszisse das Produkt $x=ab$ der beiden Abszissen a und b ist.

Wer einmal etwas von Logarithmen erfahren hat, wird durch (7) an die Formel $\log ab = \log a + \log b$ erinnert. Wir wollen jedoch die Logarithmen nicht als bekannt voraussetzen. Nur deshalb erinnern wir an sie, weil wir dadurch eine neue Bezeichnung begründen: Eine Funktion von x nämlich, der die Eigenschaft

zukommt, daß ihr Wert für ein Produkt $x = ab$ immer gleich der Summe ihrer Werte für $x = a$ und $x = b$ ist, heißt eine logarithmische Funktion oder ein Logarithmus. Die uns allerdings immer noch unbekannte Funktion $F(x)$ ist demnach ein Logarithmus. Aber es gibt, wie sich später zeigen wird, noch andere Logarithmen. Daher müssen wir der Bezeichnung noch einen Zusatz geben: Der Leser wird uns beistimmen, wenn wir meinen, daß wir auf natürlichem Weg zur Betrachtung dieser Funktion $F(x)$ geführt worden sind. Denn wir gingen von dem auffallenden Umstand aus, daß die Differentiation aller möglichen Potenzen von x wieder alle möglichen Potenzen von x mit Ausnahme von x^{-1} oder $1:x$ liefert, und wurden dadurch veranlaßt, nach denjenigen Funktionen zu forschen, die den Differentialquotienten $1:x$ haben. Darum bezeichnen wir die Funktion $F(x)$ als den natürlichen Logarithmus von x, abgekürzt: log nat x, gelesen: Logarithmus naturalis (von) x. Kürzer ist die Bezeichnung $\ln x$, die wir künftig anwenden wollen. Nach ihrem ersten Entdecker Neper (1614) heißen diese Logarithmen auch Nepersche Logarithmen.

Unter $\ln x$ verstehen wir also einfach diejenige Funktion einer positiven Abszisse x, deren Differentialquotient gleich $1:x$ ist und die für $x = 1$ den Wert Null hat.

Hier sind nun zwei Bemerkungen am Platze: Erstens die, daß wir nur einen neuen Namen eingeführt haben, bloße neue Benennungen aber ernsthafte Leser nicht abschrecken dürfen. Zweitens die, daß die natürlichen Logarithmen nicht diejenigen sind, die in den gewöhnlichen Logarithmentafeln stehen und zum Rechnen angewandt werden. Zu diesen kommen wir später.

Zusammengefaßt sind unsere Ergebnisse diese:

Satz 1: 'Der natürliche Logarithmus von x, d. h. diejenige für alle positiven Werte von x stetige Funktion $\ln x$, deren Differentialquotient

$$\frac{d\ln x}{dx} = \frac{1}{x}$$

ist und die für $x = 1$ den Wert Null hat:

$$\ln 1 = 0,$$

mit anderen Worten die Funktion

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{x}\,dx$$

hat die Eigenschaft, daß für beliebige positive Werte a

und b stets

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

ist, in Worten: der Logarithmus eines **Produktes** ist gleich der **Summe** der Logarithmen der Faktoren.

Um den Wert von $\ln x$ für ein positives x besser abschätzen zu können als nach Fig. 208 durch die Strömung, stellen wir das Integral

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{x}\,dx$$

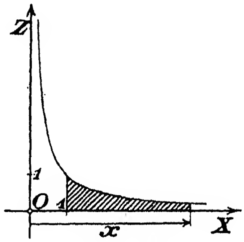


Fig. 209.

nach Satz 5, S. 229, als Fläche dar. Wir zeichnen nämlich in Fig. 209, indem wir die Einheiten auf beiden Achsen gleich groß wählen, die Bildkurve der Funktion

$$z = \frac{1}{x},$$

also eine gleichseitige Hyperbel (vgl. S. 197), deren Asymptoten die Koordinatenachsen sind. Wir brauchen sie nur für positive Werte von x. Die Fläche, die von der x-Achse, der Hyperbel, der zu $x = 1$ und der zu einem beliebigen x gehörigen Ordinate begrenzt wird, ist gleich $\ln x$, gemessen mit der Flächeneinheit. Ist x größer als Eins (wie in Fig. 209), so ist $\ln x$ positiv, ist x dagegen kleiner als Eins (aber immer noch positiv), so ist $\ln x$ negativ, weil die Abszisse dann von 1 bis x abnimmt (vgl. S. 229, 3. Fall).

Also ist $\ln x > 0$ für $x > 1$ und $\ln x < 0$ für $0 < x < 1$.

Man nennt $\ln x$ auch den hyperbolischen Logarithmus ($\log \operatorname{hyp} x$), weil er durch die Hyperbelfläche dargestellt wird.

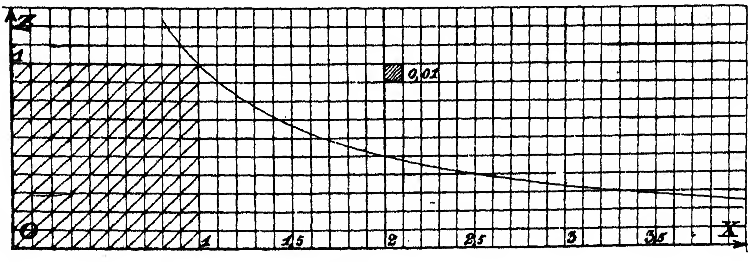


Fig. 210.

In Fig. 210 haben wir einen Teil der Fig. 209 in größerem Maßstabe gezeichnet. Das große geschraffte Quadrat ist die Flächeneinheit, die kleinen bedeuten also die Fläche 0,01. Wir zählen die kleinen Qua-

drate ab, die zwischen der x-Achse und der Hyperbel in den einzelnen von Ordinaten begrenzten Streifen liegen, wobei wir die Bruchstücke der obersten Quadrate abschätzen. In den Streifen zwischen den zu $x = 1{,}0$, $x = 1{,}1$, $x = 1{,}2\ldots$ gehörigen Ordinaten liegen folgende Anzahlen von kleinen Quadraten:

Von 1,0 bis 2,0:	9,6	8,6	8,0	7,4	6,9	6,5	6,1	5,7	5,4	5,1.
Von 2,0 bis 3,0:	4,9	4,7	4,5	4,3	4,1	3,9	3,8	3,6	3,4	3,3.
Von 3,0 bis 4,0:	3,2	3,1	3,0	3,0	2,9	2,9	2,8	2,7	2,7	2,6.

Wir bitten den Leser, dies durch einige Stichproben zu bestätigen; für die Dezimale allerdings können wir nicht genau einstehen. Um nun $\ln x$ z. B. für $x = 2{,}3$ zu berechnen, addieren wir alle diese Zahlen von 9,6 an bis 4,5 und erhalten 83,4 als Anzahl der kleinen Quadrate von $x = 1$ bis $x = 2{,}3$. Da jedes dieser Quadrate 0,01 Flächeneinheiten hat, kommt $\ln 2{,}3 = 0{,}834$, abgerundet 0,83. In dieser Weise entsteht folgende Tafel von Werten, die der Leser durch einige Proben bestätigen möge [1].

x	$\ln x$	x	$\ln x$	x	$\ln x$	x	$\ln x$	x	$\ln x$	x	$\ln x$
1,1	0,10	1,6	0,47	2,1	0,74	2,6	0,96	3,1	1,13	3,6	1,28
1,2	0,18	1,7	0,53	2,2	0,79	2,7	0,99	3,2	1,16	3,7	1,31
1,3	0,26	1,8	0,59	2,3	0,83	2,8	1,03	3,3	1,19	3,8	1,33
1,4	0,34	1,9	0,64	2,4	0,88	2,9	1,06	3,4	1,22	3,9	1,36
1,5	0,41	2,0	0,69	2,5	0,92	3,0	1,10	3,5	1,25	4,0	1,39

Prüfen wir die logarithmische Eigenschaft an einem Beispiel: Nach der Tafel ist $\ln 1{,}3 + \ln 2{,}7 = 0{,}26 + 0{,}99 = 1{,}25$. Andererseits ist $1{,}3 \cdot 2{,}7 = 3{,}51$. Die Tafel gibt $\ln 3{,}5 = 1{,}25$. Also ist, soweit wir es hier prüfen können, wirklich $\ln 1{,}3 + \ln 2{,}7 = \ln (1{,}3 \cdot 2{,}7)$. Die logarithmische Eigenschaft kommt in Fig. 209 und 210 so zum Ausdruck: Die Hyperbelfläche von $x = 1$ bis $x = a$ vermehrt um die Fläche von $x = 1$ bis $x = b$ ist gleich der Fläche von $x = 1$ bis $x = ab$.

Dieser Weg, vermöge der Hyperbelfläche zur Kenntnis der Funktion $\ln x$ zu kommen, ist aber nur ein Notbehelf.

§ 2. Berechnung des natürlichen Logarithmus.

Wir können gar nicht so nachdrücklich, wie wir es wohl möchten, den Umstand betonen, daß der so großartig klingende Name: natürlicher

[1] Einige Male ist die dritte Dezimalzahl eine Fünf, so daß die Abrundung unsicher wird. Wir haben in diesen Fällen die zweite Dezimalzahl erhöht oder erniedrigt in der Weise, daß der Wert so hervorgeht, wie man ihn aus genau berechneten Tafeln entnehmen kann.

Logarithmus eben doch nur ein Name ist. Von bloß pompösen Benennungen sollte man sich nicht einschüchtern lassen, aber leider ist das nur allzu häufig der Fall. Nicht der Name, sondern die Sache ist immer das Wesentliche, und hier ist die Sachlage einfach: Wir betrachten diejenige Funktion der positiven Veränderlichen x, die für $x = 1$ den Wert Null hat und deren Differentialquotient gleich $1 : x$ ist; sie heißt $\ln x$. Man verzeihe, daß wir dies immer wiederholen; wird es dem Leser auf die Dauer langweilig, so ist das ein gutes Zeichen, denn dann hat er den richtigen Standpunkt erreicht. Wir wiederholen es auch in Formeln:

$$(1)\qquad \ln 1 = 0, \qquad\qquad (2)\qquad \frac{d \ln x}{d x} = \frac{1}{x} \quad \text{für } x > 0.$$

Auch erinnern wir daran, wie man in Fig. 208, S. 264, den ungefähren Verlauf der Bildkurve der Funktion $\ln x$ erkennt: sie kommt, sich an die negative y-Achse zunächst anschmiegend, aus dem Unendlichen her, steigt stark empor, um die x-Achse im Einheitspunkte zu durchsetzen, und verläuft dann mit immer schwächer werdender Steigung nach dem Unendlichen rechts oben, wenn wir das Achsenkreuz in der gebräuchlichen Lage annehmen. Wir wollen sie die Bildkurve k nennen; sie ist in Fig. 211 gezeichnet, wo A den Einheitspunkt der x-Achse bedeutet.

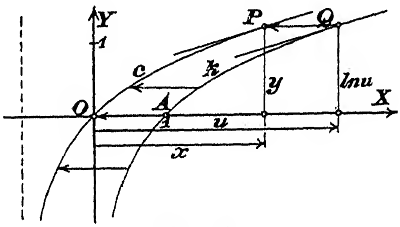


Fig. 211.

Ein beliebiger Punkt Q dieser Kurve k habe die Abszisse u, so daß seine Ordinate $\ln u$ ist. Wenn wir die Kurve k parallel zur x-Achse um die Strecke Eins rückwärts verschieben, also so weit, bis der Punkt A in den Anfangspunkt O kommt, erhalten wir eine kongruente Kurve c. Von welcher Funktion ist sie die Bildkurve? Der Punkt Q von k geht in einen Punkt P von c über. Bezeichnen wir die Abszisse dieses Punktes mit x, seine Ordinate mit y, so ist augenscheinlich $x = u - 1$, d. h. $u = 1 + x$, und $y = \ln u$, d. h.

$$(3)\qquad y = \ln (1 + x).$$

Mithin ist die Kurve c das Bild von $\ln (1 + x)$. Die Tangente des Punktes P von c ist zur Tangente des Punktes Q von k parallel. Die Steigung dieser Tangente aber ist gleich $1 : u$, nämlich nach (2), weil die Abszisse von Q mit u bezeichnet wurde. Also ist auch die Steigung der Tangente des Punktes P von c gleich $1 : u$ oder $1 : (1 + x)$. Anders

gesagt: Der Differentialquotient der Funktion (3) ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x}. \tag{4}$$

Dies kann man auch mittels der Kettenregel ableiten: Wir haben ja

$$y = \ln u, \qquad u = 1 + x,$$

also:

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}, \qquad \frac{du}{dx} = 1, \qquad \text{d. h.} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot 1 = \frac{1}{1+x}.$$

Weil die Kurve k nur Punkte mit positiven Abszissen hat und weil die Verschiebung um -1 längs der x-Achse ausgeführt wurde, kommen der Kurve c nur Punkte zu, deren Abszissen größer als -1 sind. Ferner geht die Kurve c durch den Anfangspunkt, d. h. wenn x nahe bei Null gewählt wird, ist auch der Wert von $y = \ln(1+x)$ nahe bei Null. Diesen Umstand hat man benutzt, um einen Weg zur Berechnung des natürlichen Logarithmus zu finden, und wir wollen jetzt zeigen, wie dies geschehen ist.

Zu diesem Zwecke beschäftigen wir uns zunächst nur mit dem als Differentialquotient von $\ln(1+x)$ in (4) gefundenen Bruche $1:(1+x)$, den wir anders schreiben können:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{(1+x)-x}{1+x}$$

oder:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - \frac{x}{1+x}.$$

Wenn wir diese Gleichung nach und nach mit $-x, x^2, -x^3, x^4, -x^5$ multiplizieren, kommt, indem wir sie selbst noch einmal an die Spitze stellen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} &= \quad 1 - \frac{x}{1+x}, \\
-\frac{x}{1+x} &= -x + \frac{x^2}{1+x}, \\
\frac{x^2}{1+x} &= \quad x^2 - \frac{x^3}{1+x}, \\
-\frac{x^3}{1+x} &= -x^3 + \frac{x^4}{1+x}, \\
\frac{x^4}{1+x} &= \quad x^4 - \frac{x^5}{1+x}, \\
-\frac{x^5}{1+x} &= -x^5 + \frac{x^6}{1+x}.
\end{aligned}$$

Bilden wir die Summe der fünf ersten Gleichungen und die Summe aller sechs Gleichungen, so kommt, da sich viele Glieder dann beiderseits fortheben:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \frac{x^5}{1+x}$$

und

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \frac{x^6}{1+x}.$$

Man sieht hieraus, daß man so fortfahren kann und allgemein bekommt:

$$(5) \qquad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \mp x^{n-1} \pm \frac{x^n}{1+x},$$

Hierin bedeutet n eine beliebig große ganze positive Zahl, und in den Schlußgliedern gelten die oberen oder unteren Vorzeichen, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Die rechte Seite der Gleichung (5) ist nichts als eine sogenannte identische Umformung des Bruches $1:(1+x)$, d. h. die Formel gilt für jedes x. Das kann man nachträglich dadurch bestätigen, daß man (5) mit $1+x$ multipliziert. Dann kommt nämlich:

$$\begin{aligned}1 = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \mp x^{n-1}& \\ + x - x^2 + x^3 - \cdots \pm x^{n-1} \mp x^n& \pm x^n,\end{aligned}$$

und hier heben sich in der Tat alle Glieder fort.

Die Umformung (5) wollen wir aber nur für solche Werte von x benutzen, die zwischen -1 und $+1$ liegen, deren absoluter Betrag $|x|$ also kleiner als Eins ist. Für solche Werte von x hat nämlich x^n die Eigenschaft, nach Null zu streben, wenn die ganze positive Zahl n nach $+\infty$ strebt, während dies nicht zutrifft, wenn $x = +1$ oder -1 oder der absolute Betrag von x größer als Eins ist. Wenn also $|x| < 1$ ist und $\lim n = +\infty$ ist, ergibt sich aus (5):

$$(6) \qquad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots \quad \text{für } |x| < 1.$$

Hier hat die Summe rechterhand kein Ende; sie besteht aus unendlich vielen Summanden. Man nennt sie deshalb eine unendliche Reihe. Demnach haben wir den Bruch $1:(1+x)$ für $|x| < 1$ in eine unendliche Reihe verwandelt.

Wenn man $1:(1+x)$ für einen bestimmten Wert von x, der zwischen -1 und $+1$ liegt, berechnen will, wäre es allerdings ein riesiger Umweg, sich dieser unendlichen Reihe zu bedienen, z. B. für $x = \frac{1}{2}$ zu setzen: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \cdots$, da doch in diesem Falle

der Bruch gleich $1:(1+\frac{1}{2})$ oder $\frac{2}{3}$ ist. Aber wir brauchen die Umformung (6) für andere Zwecke.

Tatsächlich kann man eine unendliche Reihe niemals vollständig ausrechnen; man muß ja immer einmal aufhören, also die Reihe irgendwo abbrechen. Nehmen wir an, es geschehe nach dem n-ten Gliede, d. h. vor dem Summanden mit der n-ten Potenz von x. Wir bilden also die Summe:

$$1-x+x^2-x^3+\cdots\mp x^{n-1}. \tag{7}$$

Sie ist nicht gleich $1:(1+x)$, vielmehr ist ein Rest vernachlässigt, der noch dazutreten müßte und den wir mit R_n bezeichnen, nämlich nach (5):

$$R_n=\pm\frac{x^n}{1+x}.$$

Dieser Fehler R_n, den wir machen, wenn wir die unendliche Reihe (6) nach dem n-ten Glied abbrechen, weicht um so weniger von Null ab, je größer n ist; immer nur unter der Voraussetzung, daß x zwischen -1 und $+1$ liegt. Zusammengefaßt:

Satz 2: Wenn der absolute Betrag von x kleiner als Eins ist, gilt die Formel

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\dots.$$

Bricht man diese unendliche Reihe nach ihrem n-ten Glied ab, so begeht man einen Fehler R_n, indem der vernachlässigte Rest

$$R_n=\pm\frac{x^n}{1+x}$$

ist. Aber man kann den absoluten Betrag dieses Fehlers dadurch, daß man die ganze positive Zahl n hinreichend groß wählt, so klein machen, wie man will.

Dies war eine Zwischenbetrachtung, die sich auf den Bruch $1:(1+x)$ bezog. Kehren wir nun zu unserer eigentlichen Aufgabe zurück. Wir suchen ja die Funktion $y=\ln(1+x)$ zu berechnen. Nach (4) und (5) ist ihr Differentialquotient:

$$\frac{dy}{dx}=1-x+x^2-x^3+\cdots\mp x^{n-1}\pm\frac{x^n}{1+x},$$

also

$$\frac{dy}{dx}-1+x-x^2+x^3-\cdots\pm x^{n-1}=\pm\frac{x^n}{1+x}.$$

Hier steht links eine Summe von $n+1$ Gliedern. Das erste ist der Differentialquotient von y oder $\ln(1+x)$. Das zweite ist der Differential-

quotient von $-x$, das dritte der von $\frac{1}{2}x^2$, das vierte der von $-\frac{1}{3}x^3$ usw., das letzte der von $\pm x^n : n$. Also können wir die Gleichung so schreiben:

$$(8) \qquad \frac{d\left[\ln(1+x) - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots \pm \frac{x^n}{n}\right]}{dx} = \pm \frac{x^n}{1+x}.$$

Auf der linken Seite haben wir bei x den an sich überflüssigen Nenner 1 hinzugefügt, weil so der regelmäßige Aufbau der Formel besser zum Ausdruck kommt. An dieser Gleichung (8) ist das für uns Wichtige der Umstand, daß der Wert der rechten Seite (nämlich R_n in der früheren Bezeichnung) nach Null strebt, sobald x zwischen -1 und $+1$ liegt und die ganze positive Zahl n nach $+\infty$ strebt. Deshalb nämlich können wir über die Funktion, die links in den scharfen Klammern steht, einiges aussagen. Dabei wird es bequem sein, dieser Funktion hier vorübergehend eine Bezeichnung zu geben; nennen wir sie etwa z. Dann können wir sagen:

Die Funktion

$$(9) \qquad z = \ln(1+x) - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots \pm \frac{x^n}{n}$$

hat nach (8) den Differentialquotienten

$$(10) \qquad \frac{dz}{dx} = \pm \frac{x^n}{1+x},$$

der unter der Voraussetzung $|x| < 1$ für $\lim n = +\infty$ nach Null strebt. Außerdem zeigt (9), daß die Funktion z für $x = 0$ den Wert $\ln 1$ hat, der nach (1) gleich Null ist. Auch wissen wir, daß die Funktion z für $|x| < 1$ stetig ist.

Betrachten wir bloß ein Intervall von $-a$ bis $+a$, wobei wir unter a irgendeine positive Zahl verstehen, die kleiner als Eins ist. Dann hat gewiß jedes im Intervalle gelegene x einen absoluten Betrag, der kleiner als Eins ist. Geht x von $-a$ bis $+a$, so geht der Nenner in (10) von $1-a$ bis $1+a$, und zwar ist $1-a$ der kleinste Wert. Er ist positiv. Ferner nimmt dabei x^n absolut genommen alle Werte zwischen 0 und a^n an. Der größte davon ist a^n. Mithin ist im Intervalle $-a \leqq x \leqq a$:

$$\left|\frac{\pm x^n}{1+x}\right| \leqq \frac{a^n}{1-a},$$

daher nach (10) auch

$$(11) \qquad \left|\frac{dz}{dx}\right| \leqq \frac{a^n}{1-a}.$$

Weil a eine bestimmt gewählte positive Zahl bedeutet, die kleiner als

Eins ist, leuchtet ein: Wenn man die ganze positive Zahl n hinlänglich groß wählt, kommt die rechte Seite von (11), die positiv ist, so nahe an Null heran, wie man nur immer will. Schreiben wir also eine beliebig kleine positive Zahl ε vor, so können wir uns n so groß angenommen denken, daß im ganzen Intervalle von $-a$ bis $+a$

$$\left|\frac{dz}{dx}\right| < \varepsilon$$

ist. Mithin hat die Funktion z eine Bildkurve, die erstens durch den Anfangspunkt geht (weil $z=0$ für $x=0$ ist), die zweitens im Intervalle von $-a$ bis $+a$ stetig ist und die drittens in diesem Intervall überall solche Tangenten hat, deren Steigung absolut genommen geringer als eine beliebig kleine positive Größe ε ist. In Fig. 212 sollen g und h diejenigen Geraden durch den Anfangspunkt O sein, deren Steigungen ε und $-\varepsilon$ sind. Nach dem soeben Gesagten kann die Bildkurve von z in dem Intervalle von $-a$ bis $+a$ nicht aus den geschrafften Winkelfeldern zwischen g und h herauskommen, da sie durch O geht und nie steiler als g oder h wird. Die Gerade g hat für eine beliebige Abszisse x die Ordinate εx, die Gerade h die Ordinate $-\varepsilon x$. Im Intervall von $-a$ bis $+a$ ist demnach der absolute Betrag von z immer kleiner als $\varepsilon\,|\,x\,|$ und dabei kann ε beliebig nahe bei Null gewählt werden, wenn man nur n hinreichend groß annimmt. Dies heißt: Im Intervalle von $-a$ bis $+a$ strebt z nach Null, wenn n nach $+\infty$ strebt.

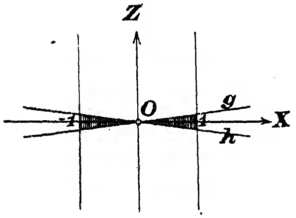


Fig. 212.

Das Intervall von $-a$ bis $+a$ haben wir in Fig. 212 nicht angegeben und zwar aus folgendem Grunde: a sollte irgendeine positive Zahl kleiner als Eins bedeuten. Aber a kann jetzt so nahe an Eins gewählt werden, wie wir wollen, nur nicht gleich Eins selbst. Also: In jedem Intervalle, das im Innern des Intervalles von -1 bis $+1$ liegt, strebt z nach Null, wenn n nach $+\infty$ strebt.

Nun wollen wir die Frucht dieser Betrachtung ernten: Aus (9) folgt: In jedem im Innern des Intervalles von -1 bis $+1$ gelegenen Intervall ist

$$\lim \left[\ln(1+x) - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots \pm \frac{x^n}{n}\right] = 0$$

für $\lim n = +\infty$. Anders gesagt: Für jedes x, dessen absoluter Betrag kleiner als Eins ist, gilt:

$$\ln(1+x) - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \cdots = 0.$$

Mithin ist:

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad \text{für } |x| < 1. \tag{12}$$

Diese wichtige Formel (12) gestattet uns nun, $\ln(1+x)$ für irgend ein x, dessen absoluter Betrag kleiner als Eins ist, mit jedem gewünschten Grade der Genauigkeit zu berechnen. Dies sieht man so ein: Die rechts in (12) stehende unendliche Reihe muß man bei der wirklichen Berechnung irgendwo abbrechen, sagen wir nach dem n-ten Gliede. Wenn man aber $\ln(1+x)$ durch

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \mp \frac{x^n}{n}$$

ersetzt (wo zuletzt $-$ oder $+$ steht, je nachdem n gerade oder ungerade ist), begeht man einen Fehler, weil man dann den Rest

$$R_n = \pm \frac{x^{n+1}}{n+1} \mp \frac{x^{n+2}}{n+2} \pm \frac{x^{n+3}}{n+3} \mp \cdots,$$

der selbst eine unendliche Reihe ist, vernachlässigt hat. Der absolute Betrag einer Summe ist nun nach Satz 8, S. 59, nicht größer als die Summe der absoluten Beträge der Summanden, daher:

$$|R_n| \leqq \frac{|x|^{n+1}}{n+1} + \frac{|x|^{n+2}}{n+2} + \frac{|x|^{n+3}}{n+3} + \cdots$$

oder, wenn man $|x|^{n+1}$ herauszieht:

$$|R_n| \leqq |x|^{n+1}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{|x|}{n+2} + \frac{|x|^2}{n+3} + \cdots\right).$$

Hier stehen rechts lauter positive Glieder. Von den Nennern $n+1$, $n+2$, $n+3, \cdots$ ist der erste der kleinste. Deshalb wird die rechte Seite nur vergrößert, wenn man alle Nenner $n+2, n+3, \cdots$ durch $n+1$ ersetzt. Erst recht ist daher

$$|R_n| < \frac{|x|^{n+1}}{n+1}(1 + |x| + |x|^2 + \cdots).$$

Da $|x| < 1$ ist und Satz 2 für jedes x zwischen -1 und $+1$ gilt, also auch, wenn man in diesem Satze x durch $-|x|$ ersetzt, haben wir nach Satz 2:

$$\frac{1}{1-|x|} = 1 + |x| + |x|^2 + \cdots.$$

Mithin kommt:

$$|R_n| < \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{1-|x|}. \tag{13}$$

Durch diese Formel wird der Fehler R_n selbst nicht bestimmt, aber sie besagt, daß sein absoluter Betrag kleiner als eine gewisse berechenbare Größe ist. Die Formel dient also zur Abschätzung des Fehlers. Man muß dabei beachten, daß die $(n+1)$-te Potenz von $|x|$ mit wachsendem n nach Null strebt, weil $|x| < 1$ ist, so daß also auch die Fehlerabschätzung nach (13) immer kleinere Beträge liefert, je größer man n annimmt. Wir haben also den

Satz 3: Ist x zwischen -1 und $+1$ gelegen, so gilt für den natürlichen Logarithmus von $1+x$ die Formel:

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots.$$

Bricht man die unendliche Reihe nach ihrem n-ten Glied ab, so begeht man einen Fehler; aber der absolute Betrag des dann unberücksichtigt gebliebenen Restes ist kleiner als

$$\frac{|x|^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{1-|x|},$$

und diese Größe strebt nach Null, wenn die Anzahl n über jede Zahl wächst.

Auf Grund dieses Satzes können wir $\ln(1+x)$ für $|x| < 1$ so genau berechnen, wie wir wollen.

1. Beispiel: Um $\ln 1{,}1$ zu berechnen, setzen wir $1 + x = 1{,}1$, also $x = 0{,}1$ Wählen wir $n = 4$, d. h. benutzen wir bloß die vier Glieder

$$0{,}1 - \frac{0{,}1^2}{2} + \frac{0{,}1^3}{3} - \frac{0{,}1^4}{4},$$

so liefert die Rechnung:

$$\begin{array}{r} 0{,}1 = 0{,}1 \\ \frac{1}{3}\cdot 0{,}1^3 = 0{,}000\,333\ldots \\ \hline 0{,}100\,333\ldots, \end{array} \qquad \begin{array}{r} \frac{1}{2}\cdot 0{,}1^2 = 0{,}005 \\ \frac{1}{4}\cdot 0{,}1^4 = 0{,}000\,025 \\ \hline 0{,}005\,025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0{,}100\,333\ldots \\ -0{,}005\,025 \\ \hline 0{,}095\,308\,33\ldots \end{array}$$

Wegen $n = 4$ ist der Fehler absolut genommen kleiner als

$$\frac{0{,}1^5}{5\cdot(1-0{,}1)} = 0{,}000\,002\,22\ldots.$$

Mithin liegt $\ln 1{,}1$ zwischen

$$\begin{array}{r} 0{,}095\,308\,33\ldots \\ -0{,}000\,002\,22\ldots \\ \hline 0{,}095\,306\,11\ldots \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{r} 0{,}095\,308\,33\ldots \\ +0{,}000\,002\,22\ldots \\ \hline 0{,}095\,310\,55\ldots \end{array}$$

Beide Werte geben, auf 5 Dezimalstellen abgerundet, dasselbe. Daher ist abgerundet:

$$\ln 1{,}1 = 0{,}09531.$$

Ehe wir weitergehen, eine Zwischenbemerkung: Auch wenn der Leser, wie wir hoffen, Schritt für Schritt den Gedankengang verstanden hat, wird er den Eindruck haben, daß er allein nicht dazu imstande gewesen wäre, diesen Weg zu verfolgen. In der Mathematik gibt es wie in allen Wissenschaften Stellen, an denen eigenartige Schwierigkeiten besondere Mittel zu ihrer Überwindung erfordern, und da müssen wir den Meistern der Forschung dankbar sein, die zu ihrer Zeit diese Mittel ausfindig gemacht haben. Also bitte nicht zu klagen; man muß zuweilen statt bequemer Pfade auch steile und steinige wandeln, wo es keine andern gibt, und sie sind für manche sogar genußreicher. Zum Troste für diejenigen, die das nicht finden, sei erwähnt, daß man sich das Vorhergehende nicht zu merken braucht; man muß es nur einmal wirklich vollständig durchdacht haben. Was später für die Anwendung gebraucht wird und dem Gedächtnis aufgebürdet werden muß, ist ziemlich wenig; es wird an geeigneter Stelle aufgezählt werden.

Aus dem Satz 3 kann man viel mehr Nutzen ziehen, als es zunächst den Anschein hat. Nach ihm kann man $\ln(1+x)$ für x zwischen -1 und $+1$, d. h. für $1+x$ zwischen 0 und 2 berechnen. Aber wir behaupten, daß wir jetzt auch den natürlichen Logarithmus einer beliebigen positiven Zahl berechnen können. Der Grund dafür liegt in dem, was man die logarithmische Eigenschaft nennt, nämlich darin, daß für beliebige positive Werte von a und b stets

$$\ln ab = \ln a + \ln b \tag{14}$$

ist, vgl. Satz 1. Hiernach ist

$$\ln b = \ln ab - \ln a\,.$$

Bezeichnen wir ab mit c, so ist $b = c : a$ zu setzen; also kommt:

$$\ln \frac{c}{a} = \ln c - \ln a\,. \tag{15}$$

Satz 4: Der Logarithmus eines Bruches ist gleich dem Logarithmus des Zählers, vermindert um den Logarithmus des Nenners.

Wenn nun x zwischen -1 und $+1$ liegt, sind $1+x$ und $1-x$ positiv. Also folgt:

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x). \tag{16}$$

Nehmen wir z. B. $x = \frac{9}{11}$ an, so ist $1+x = \frac{20}{11}$, $1-x = \frac{2}{11}$, so daß kommt:

$$\ln 10 = \ln \frac{20}{11} - \ln \frac{2}{11}.$$

Da $\frac{20}{11}$ und $\frac{2}{11}$ kleiner als Eins sind, lassen sich die rechts stehenden Logarithmen nach Satz 3 berechnen. Mithin kann auch ln 10 ermittelt werden!

Diejenige Zahl, deren Logarithmus man sucht, nennt man gern den Numerus. Dies lateinische Wort bedeutet eigentlich auch nur Zahl, man bedient sich aber dieses Fremdwortes nur dann, wenn es sich um eine Zahl handelt, deren Logarithmus in Frage kommt. Nun sei der Numerus eine beliebig gewählte positive Zahl N. Um zur Berechnung von $\ln N$ die Gleichung (16) anwenden zu können, muß man x so wählen, daß

$$\frac{1+x}{1-x} = N,$$

d. h.

$$1 + x - N + Nx = 0$$

oder also

$$x = \frac{N-1}{N+1} \tag{17}$$

ist. Wenn die positive Zahl N kleiner als Eins ist, ergibt sich hieraus für x augenscheinlich ein negativer Wert, dessen absoluter Betrag kleiner als Eins ist. Wenn dagegen N größer als Eins ist, liefert (17) ein x, das positiv und kleiner als Eins ist. Stets also gibt (17) für ein beliebiges positives N ein zwischen -1 und $+1$ gelegenes x. Mit Hilfe von (16) und Satz 3 ist man also imstande, $\ln N$ für jeden positiven Numerus zu berechnen.

Wir erörtern noch, daß man dabei jeden gewünschten Grad der Genauigkeit erreichen kann. Nach Satz 3 ist, wenn darin die ganze Zahl n als eine gerade Zahl $2m$ gewählt wird:

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{x^{2m-1}}{2m-1} - \frac{x^{2m}}{2m} + R_{2m},$$

und der Rest R_{2m} strebt nach Null, wenn m nach $+\infty$ strebt. Wenn x zwischen -1 und $+1$ liegt, gilt dasselbe von $-x$. Also dürfen wir auch $-x$ statt x setzen. Dann kommt:

$$\ln(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{2m-1}}{2m-1} - \frac{x^{2m}}{2m} + S_{2m},$$

wo der Rest S_{2m} ein anderer als R_{2m} ist (weil $-x$ statt x steht), aber auch S_{2m} nach Null strebt, wenn m nach $+\infty$ strebt. Subtraktion beider Gleichungen liefert mit Rücksicht auf (16)

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2m-1}}{2m-1}\right) + R_{2m} - S_{2m}.$$

Da $R_{2m} - S_{2m}$ auch für $\lim m = +\infty$ nach Null strebt, dürfen wir also schreiben:

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2m-1}}{2m-1}\right) + \Re_{2m},$$

wobei $\lim \Re_{2m} = 0$ für $\lim m = +\infty$ ist, anders gesagt, es ergibt sich für $\lim m = +\infty$ die unendliche Reihe:

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right). \tag{18}$$

Bei der wirklichen Berechnung für irgendein zwischen -1 und $+1$ gelegenes x muß man diese Reihe abbrechen; geschieht es nach dem Gliede mit x^{2m-1}, so begeht man einen Fehler, der gleich dem vernachlässigten Rest ist, nämlich:

$$\Re_{2m} = 2\left(\frac{x^{2m+1}}{2m+1} + \frac{x^{2m+3}}{2m+3} + \cdots\right).$$

Alle Glieder dieses Restes sind positiv, wenn x positiv ist, dagegen negativ, wenn x negativ ist, also:

$$|\Re_{2m}| = 2\left(\frac{|x|^{2m+1}}{2m+1} + \frac{|x|^{2m+3}}{2m+3} + \cdots\right).$$

Ersetzt man alle Nenner $2m+3$, $2m+5$ usw. durch den ersten Nenner $2m+1$, der kleiner ist, so wird die rechte Seite vergrößert. Mithin ist:

$$|\Re_{2m}| < \frac{2|x|^{2m+1}}{2m+1}\left(1 + |x|^2 + |x|^4 + \cdots\right).$$

Wegen $|x| < 1$ ist auch $|x|^2 < 1$. Also ist der absolute Betrag von $-|x|^2$, nämlich $|x|^2$, kleiner als Eins. Deshalb kann Satz 2 angewandt werden, wenn man darin x durch $-|x|^2$ ersetzt. Er liefert:

$$1 + |x|^2 + |x|^4 + \cdots = \frac{1}{1-|x|^2}.$$

Folglich kommt:

$$|\Re_{2m}| < \frac{2|x|^{2m+1}}{2m+1} \cdot \frac{1}{1-|x|^2}.$$

Diese Restabschätzung bestätigt, was wir schon wissen: $\Re_{2m}$ strebt nach Null für $\lim m = +\infty$. Somit hat sich ergeben:

Satz 5: Der natürliche Logarithmus eines beliebigen positiven Numerus N läßt sich mittels einer unendlichen Reihe so darstellen:

$$\ln N = \ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right).$$

Darin ist die Zahl

$$x = \frac{N-1}{N+1},$$

und sie liegt stets zwischen -1 und $+1$. Bricht man die Reihe nach der $(2m-1)$-ten Potenz von x ab, so begeht man einen Fehler: Der vernachlässigte Rest ist positiv, wenn x positiv ist, negativ, wenn x negativ ist; sein absoluter Betrag ist kleiner als die Größe:

$$\frac{2\,|x|^{2m+1}}{2m+1} \cdot \frac{1}{1-|x|^2},$$

die nach Null strebt, wenn m über jede Zahl wächst.

2. Beispiel: Soll ln 2 berechnet werden, so ist $N = 2$, $x = \frac{1}{3}$. Die Reihe werde nach der 11. Potenz von x abgebrochen, d. h. es sei $2m - 1 = 11$ oder $m = 6$. Demnach ist ln 2 angenähert gleich

$$2\left[\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1}{3}\right)^5 + \cdots + \tfrac{1}{11}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{11}\right].$$

Der Rest ist positiv und kleiner als

$$\frac{2}{13} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{13} \cdot \frac{9}{8} = \frac{1}{52 \cdot 3^{11}} < 0{,}000\,000\,11.$$

Bei der Abrundung auf acht Dezimalstellen kommt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} &= 0{,}333\,333\,33 \\
\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} &= 0{,}012\,345\,6\bar{8} \\
\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} &= 0{,}000\,823\,0\bar{5} \\
\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^7} &= 0{,}000\,065\,32 \\
\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3^9} &= 0{,}000\,005\,6\bar{5} \\
\frac{1}{11} \cdot \frac{1}{3^{11}} &= 0{,}000\,000\,51 \\
\hline
&\ 0{,}346\,573\,54 \cdot 2 = 0{,}693\,147\,08\,.
\end{aligned}$$

Weil drei Summanden nach oben und drei nach unten abgerundet worden sind, ist die doppelte Summe wegen der Abrundung fehlerhaft innerhalb der Grenzen von $-2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}$ und $+2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}$ oder -3 und $+3$ Einheiten der letzten Dezimalstelle. Da der fehlende Rest zwischen 0 und 11 Einheiten der letzten Dezimalstelle liegt, ist also der Gesamtfehler zwischen -3 und 14 Einheiten der letzten Dezimalstelle gelegen, d. h. ln 2 liegt zwischen

$$0{,}693\,147\,05 \quad \text{und} \quad 0{,}693\,147\,22\,.$$

Demnach ist auf sechs Dezimalstellen abgerundet

$$\ln 2 = 0{,}693\,147\,.$$

3. Beispiel: Soll $\ln 10$ berechnet werden, so ist $N = 10$, $x = \frac{9}{11}$. Da dieser Wert nahe bei 1 liegt, nehmen seine Potenzen sehr langsam ab. Man schlägt daher, um nicht zu viele Glieder der Reihe berücksichtigen zu müssen, hier wie überhaupt bei größeren Zahlen einen anderen Weg ein, indem man die 10 in Faktoren zerlegt. Da $10 = 5 \cdot 2$ ist, hat man nach Satz 1:

$$\ln 10 = \ln 5 + \ln 2 .$$

Ferner ist $5 = \frac{5}{4} \cdot 4$, also nach demselben Satze:

$$\ln 5 = \ln \tfrac{5}{4} + \ln 4$$

und ebenso wegen $4 = 2 \cdot 2$:

$$\ln 4 = \ln 2 + \ln 2,$$

so daß kommt:

$$\ln 10 = 3 \ln 2 + \ln \tfrac{5}{4}.$$

Da wir $\ln 2$ soeben berechnet haben, brauchen wir nur noch $\ln \frac{5}{4}$ zu berechnen. Für $N = \frac{5}{4}$ ist $x = \frac{1}{9}$. Wählen wir die Zahl m des Satzes 5 gleich 3, so ist die Summe

$$2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9^5}\right)$$

zu berechnen. Sie ist zu klein (da x positiv ist) um einen Betrag, der kleiner ist als

$$\frac{2}{7}\left(\frac{1}{9}\right)^7 \cdot \frac{81}{80} = \frac{1}{280 \cdot 9^5} < 0{,}000\,000\,07.$$

Das Rechenschema ist:

$$\frac{1}{9} = 0{,}111\,111\,11$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9^3} = 0{,}000\,457\,2\bar{5}$$

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9^5} = 0{,}000\,003\,3\bar{9}$$

$$\overline{0{,}111\,571\,75 \,.\, 2} = 0{,}223\,143\,50 \,.$$

Wegen der Abrundungen ist der Fehler der letzten Dezimalziffer zwischen -2 und $+1$ gelegen. Wegen des vernachlässigten Restes tritt ein Fehler zwischen 0 und $+7$ hinzu, so daß der Gesamtfehler zwischen -2 und $+8$ Einheiten der letzten Dezimalstelle, also $\ln \frac{5}{4}$ zwischen

$$0{,}223\,143\,48 \quad \text{und} \quad 0{,}223\,143\,58$$

liegt. Da $\ln 2$ nach dem 2. Beispiel zwischen

$$0{,}693\,147\,05 \quad \text{und} \quad 0{,}693\,147\,22$$

liegt, ist $\ln 10$ oder $3 \ln 2 + \ln \frac{5}{4}$ zwischen

$$2{,}302\,584\,63 \quad \text{und} \quad 2{,}302\,585\,24$$

enthalten. Also ist auf sechs Dezimalstellen abgerundet:

$$\ln 10 = 2{,}302\,585 \,.$$

4. Beispiel: Schließlich soll noch $\frac{1}{\ln 10}$ berechnet werden. Dieser Wert liegt zwischen

$$\frac{1}{2{,}302\,584\,63} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2{,}302\,585\,24}$$

oder

$$0{,}434\,294\,57 \quad \text{und} \quad 0{,}434\,294\,45.$$

Wir müssen daher auf nur fünf Dezimalstellen abrunden:

$$\frac{1}{\ln 10} = 0{,}434\,29\,.$$

Diese Beispiele mögen genügen. Jedenfalls dürfen wir jetzt sagen, daß der natürliche Logarithmus von x eine uns bekannte Funktion ist, weil wir $\ln x$ für jeden positiven Wert von x mit jeder gewünschten

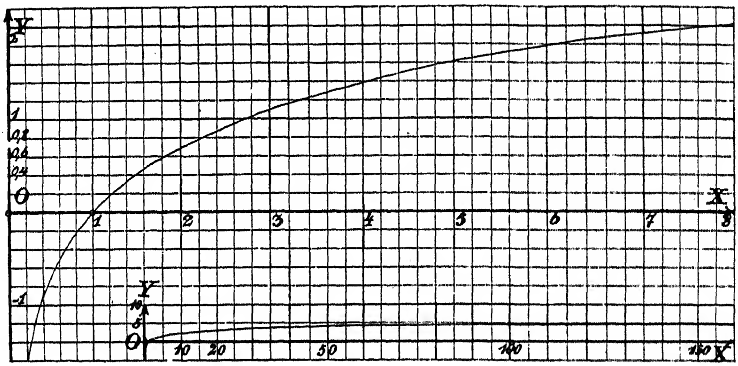


Fig. 213.

Genauigkeit berechnen können. Wir können es, aber wir brauchen es nicht zu tun, denn diese Arbeit haben uns andere gute Menschen abgenommen, die in sorgfältigster Weise Tafeln der natürlichen Logarithmen hergestellt haben. Da wir jetzt selber wissen, wie man $\ln N$ berechnet, haben wir ein höheres Anrecht auf die Benutzung dieser Tafeln als das bloß durch ihr Kaufen erwerbbare. Wir haben Goethes Mahnung befolgt: „Was du ererbt von deinen Vätern hast, erwirb es, um es zu besitzen."

Im Anhang sind die Werte von $\ln N$ in Tafel II für eine Anzahl von Numeri angegeben und zwar in der Abrundung auf vier Dezimalstellen.

Eine Gewissensfrage: Weiß der Leser noch, wie $\ln x$ erklärt wurde? Wir wiederholen: $\ln x$ stellt diejenige Funktion von x vor, die den Differentialquotienten $1:x$ hat und für $x=1$ den Wert

Null annimmt. Wir haben gesehen: sie ist nur für positive Werte von x vorhanden und für diese überall stetig.

In der Doppelfigur 213 ist die logarithmische Kurve $y = \ln x$ in zwei Maßstäben gezeichnet. Die Hauptfigur gibt das Stück von $x = 0{,}2$ bis $x = 8$, und zwar sind hier die x- und y-Einheit gleich groß gewählt. Dies ist auch in der Nebenfigur der Fall, doch haben wir hier alles auf $\frac{1}{25}$ verkleinert, so daß wir $\ln x$ noch bis $x = 170$ darstellen konnten. Hier ist der Teil der Kurve, der unterhalb der x-Achse liegt, d. h. für den x kleiner als Eins ist, zu nahe bei der y-Achse und nicht mehr erkennbar. Man sieht, daß die logarithmische Kurve für größere Werte von x außerordentlich flach verläuft. Sie steigt aber beständig, da ihre Steigung $1 : x$ wegen $x > 0$ überall positiv ist, und bekommt für $\lim x = \infty$ unendlich große Ordinaten.

§ 3. Eigenschaften des natürlichen Logarithmus.

Nach Satz 1 ist, wenn a und b positive Zahlen bedeuten:

$$\ln a b = \ln a + \ln b . \tag{1}$$

Hieraus folgt, wenn auch c eine positive Zahl bedeutet:

$$\ln a b c = \ln (a b \,.\, c) = \ln a b + \ln c = \ln a + \ln b + \ln c ,$$

und so kann man weiter schließen, daher:

$$\ln a_1 a_2 \ldots a_n = \ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n .$$

Satz 6: Der Logarithmus eines Produktes von beliebig vielen Faktoren ist gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren.

Wenn wir in (1) für b die Zahl $\frac{1}{a}$ setzen, kommt:

$$\ln 1 = \ln a + \ln \frac{1}{a}$$

oder, da $\ln 1 = 0$ ist:

$$\ln \frac{1}{a} = -\ln a .$$

Satz 7: Der Logarithmus des reziproken Wertes $1 : a$ einer Zahl a ist entgegengesetzt gleich dem Logarithmus der Zahl a selbst.

Hiernach ist weiterhin:

$$\ln \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{b_1 b_2 \ldots b_m} = \ln \left(a_1 a_2 \ldots a_n \cdot \frac{1}{b_1 b_2 \ldots b_m} \right) = \ln a_1 a_2 \ldots a_n - \ln b_1 b_2 \ldots b_m ,$$

also nach Satz 6:

$$\ln \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{b_1 b_2 \ldots b_m} = \ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n - \ln b_1 - \ln b_2 - \cdots - \ln b_m.$$

Satz 8: Der Logarithmus eines Bruches ist gleich der Summe der Logarithmen der Zählerfaktoren, vermindert um die Logarithmen der Nennerfaktoren.

Ein Sonderfall hiervon war Satz 4.

Beim Berechnen des Logarithmus eines Ausdruckes, oder, wie man auch sagt, beim Logarithmieren tritt also an die Stelle der Multiplikation die Addition und an die Stelle der Division die Subtraktion.

1. Beispiel: Wegen $\frac{2}{21} = 2:(3.7)$ gibt Tafel II:

$$\ln \frac{2}{21} = \ln 2 - \ln 3 - \ln 7 = -2{,}3514\,.$$

Nach Satz 6 ist, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet:

$$\ln(a^n) = \ln \underbrace{a \,.\, a \,.\, a \ldots a}_{n\text{-mal}} = \underbrace{\ln a + \ln a + \cdots + \ln a}_{n\text{-mal}} = n \ln a.$$

Mithin gilt die Formel

$$\ln(a^n) = n \ln a \tag{2}$$

für jede ganze positive Zahl n. Man wird nun vermuten, daß sie für beliebige Werte von n richtig ist, und wir wollen dies beweisen, falls a positiv ist und a^n den positiven Wert der Potenz bedeutet[1]. Wir betrachten die Funktion[2]:

$$y = \ln(x^n),$$

worin x eine positive Veränderliche und x^n der positive Wert der Potenz sei. Die Kettenregel gibt ihren Differentialquotienten:

$$\begin{array}{r|l} y = \ln z & \dfrac{dy}{dz} = \dfrac{1}{z} \\ z = x^n & \dfrac{dz}{dx} = n x^{n-1} \\ \hline & \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{n x^{n-1}}{z} = \dfrac{n x^{n-1}}{x^n} = \dfrac{n}{x}\,. \end{array}$$

Nun hat aber die Funktion $y = n \ln x$ nach der Faktorregel ebenfalls diesen Differentialquotienten. Deshalb ist nach Satz 2, S. 213:

$$\ln(x^n) = n \ln x + \text{konst.}$$

[1] Dies muß betont werden, denn wenn z. B. $n = \frac{1}{2}$ ist, bedeutet a^n die Quadratwurzel aus a, die positiv oder negativ angenommen werden kann.

[2] Wir schreiben nicht $\ln x^n$, weil man dies auch so lesen könnte: $(\ln x)^n$.

Für $x = 1$ insbesondere ist auch $x^n = 1$ und also sowohl $\ln(x^n)$ als auch $\ln x$ gleich Null, so daß die Konstante gleich Null sein muß. Daher kommt:

$$\ln(x^n) = n \ln x, \tag{3}$$

und folglich gilt der

Satz 9: Der Logarithmus des positiven Wertes einer Potenz einer positiven Zahl ist gleich dem mit dem Exponenten multiplizierten Logarithmus der Zahl selbst.

2. Beispiel: $\ln \sqrt{3} = \ln(3^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \ln 3 = 0{,}5493$ nach Tafel II.

3. Beispiel: $\ln \sqrt[3]{10} = \ln(10^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3} \ln 10 = 0{,}7675$.

4. Beispiel: $\ln \sqrt[5]{1{,}6^4} = \ln(1{,}6^{\frac{4}{5}}) = \frac{4}{5} \ln 1{,}6 = 0{,}3760$.

Fig. 213, S. 284, stellt die Bildkurve von $\ln x$ dar. Man kann daraus entnehmen, wie groß ungefähr derjenige Numerus ist, dessen natürlicher Logarithmus den Wert Eins hat. Denn die Ordinate Eins kommt dort einem Punkte mit einer zwischen 2,6 und 2,8 gelegenen Abszisse zu. Dasselbe kann man aus der Tafel II des Anhanges entnehmen. Erst in einiger Zeit wird sich ein bequemer Weg zur genauen Berechnung dieses Numerus herausstellen; vorläufig begnügen wir uns damit, daß er zwischen 2,6 und 2,8 liegt. Man bezeichnet diesen Numerus, also diejenige Zahl, deren natürlicher Logarithmus gleich Eins ist, immer mit dem Buchstaben e:

$$\ln e = 1. \tag{4}$$

Das ist auf der ganzen Erde ebenso Brauch geworden wie die Bezeichnung π für das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser. Die beiden Zahlen π und e spielen in der höheren Mathematik gleich wichtige Rollen. Die Zahl π erfreut sich nur deshalb eines größeren Bekanntenkreises, weil ihre Erklärung einfacher ist. Den Buchstaben e werden wir niemals anders gebrauchen als zur Bezeichnung desjenigen Numerus, zu dem der natürliche Logarithmus Eins gehört. Deshalb haben wir ihn auch schon früher vermieden, siehe eine Bemerkung auf S. 96.

Eine sehr wichtige Eigenschaft der Zahl e geht sofort aus Satz 9 hervor, wenn wir ihn auf die positive Potenz e^x von e mit beliebigen positiven oder negativen Exponenten x anwenden. Der natürliche Logarithmus von e^x ist nach Satz 9 gleich dem mit x multiplizierten Logarithmus von e, also infolge von (4) einfach gleich x selbst.

Satz 10: Der natürliche Logarithmus der positiven Potenz e^x ist der Exponent x selbst:

$$\ln(e^x) = x.$$

Wenn wir e^x als Numerus mit N bezeichnen, besagt dies also, daß aus

$$N = e^x \qquad \text{folgt:} \qquad \ln N = x$$

oder $x = \ln N$. Wird dies in die erste Formel eingesetzt, so kommt:

$$N = e^{\ln N}$$

d. h.:

Satz 11: Der natürliche Logarithmus einer positiven Zahl ist diejenige Zahl, mit der man die Basis e potenzieren muß, um den Numerus zu bekommen.

Hat einer unserer Leser ein anderes Lehrbuch der höheren Mathematik zur Hand, so möge er nachsehen, wie der natürliche Logarithmus dort eingeführt wird. Man wird meistens finden, daß dieser Satz 11 als Erklärung dient; dann aber wird vorher erklärt, was die Zahl e ist. Das darf dann selbstverständlich nicht so geschehen, wie wir es durch (4) getan haben. Vielmehr gibt es noch eine vom Logarithmus ganz unabhängige Erklärung der Zahl e. Wir werden sie im nächsten Kapitel finden.

Auf Grund des letzten Satzes 11 kann man die Sätze 6 bis 9 aufs neue ableiten und zwar aus bekannten Sätzen der Potenzrechnung. Wir begnügen uns mit einigen Andeutungen: Die positiven Zahlen A und B mögen die natürlichen Logarithmen a und b haben. Nach Satz 11 ist dann $A = e^a$, $B = e^b$, also:

$$\ln AB = \ln (e^a . e^b) = \ln e^{a+b},$$

aber nach Satz 11 ist $\ln e^{a+b} = a + b$. Also kommt:

$$\ln AB = a + b = \ln A + \ln B.$$

Der Logarithmus eines Produktes ist also in der Tat gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren. Ferner ist

$$\ln (A^n) = \ln [(e^a)^n] = \ln e^{na} = na = n \ln A,$$

d. h. der Logarithmus der n-ten Potenz einer Basis A ist gleich dem mit n multiplizierten Logarithmus der Basis A.

Nun wenden wir uns zu etwas anderem: In § 1 zeigte sich (S. 263), daß die Frage nach denjenigen Funktionen von x, deren Differentialquotienten gleich $1:x$ sind, noch nicht zu beantworten war. Wir haben aber jetzt eine von diesen Funktionen kennen gelernt, nämlich diejenige, die für $x = 1$ den Wert Null hat, die Funktion $\ln x$. Nach S. 265 gehen die übrigen derartigen Funktionen, bei denen x eine positive Veränderliche ist, aus ihr durch Addition irgendeiner Konstanten hervor:

$$y = \ln x + \text{konst.}$$

Die anderen Funktionen, bei denen x eine negative Veränderliche ist, sind, da die rechte Seite der Fig. 208, S. 264, durch Umklappen um die y-Achse in die linke Seite übergeht, die Funktionen:

$$y = \ln(-x) + \text{konst.}$$

Folglich gilt der

Satz 12: Jede Funktion y von x, deren Differentialquotient gleich $1:x$ ist, hat eine der beiden Formen

$$y = \ln x + \text{konst.} \qquad \text{oder} \qquad y = \ln(-x) + \text{konst.}$$

Die der ersten Art gelten nur für positives, die der zweiten nur für negatives x.

Nach S. 263 können wir dies auch so ausdrücken: Der Wert des Integrals

$$\int_a^x \frac{1}{x}\,dx$$

ist von der Form $\ln x + \text{konst.}$ oder von der Form $\ln(-x) + \text{konst.}$ Beim Integrieren von a bis x darf man den Wert Null nicht überschreiten, da $1:x$ für $x = 0$ unendlich groß wird, d. h.: Ist $a > 0$, so ist auch $x > 0$ zu wählen, ist $a < 0$, so ist auch $x < 0$ zu wählen. Daher kommt für positives a:

$$\int_a^x \frac{1}{x}\,dx = \ln x + \text{konst.} \qquad (a > 0, x > 0)$$

und für negatives a:

$$\int_a^x \frac{1}{x}\,dx = \ln(-x) + \text{konst.} \qquad (a < 0, x < 0).$$

Die Konstante ist leicht zu bestimmen, da das Integral für $x = a$ gleich Null sein muß. Im ersten Fall ist also $\ln a + \text{konst.} = 0$, d. h. die Konstante gleich $-\ln a$, während sie im zweiten Falle gleich $-\ln(-a)$ wird. Wir haben also

$$\int_a^x \frac{1}{x}\,dx = \ln x - \ln a \qquad (a > 0, x > 0),$$

$$\int_a^x \frac{1}{x}\,dx = \ln(-x) - \ln(-a) \qquad (a < 0, x < 0).$$

Nach Satz 4, S. 279, können wir beide Formeln zusammenfassen, so daß sich ergibt:

Satz 13: Die Formel

$$\int_a^x \frac{1}{x}\, dx = \ln \frac{x}{a}$$

gilt für alle Werte von x, die dasselbe Vorzeichen wie a haben.

Die Stromlinien in Fig. 208, S. 264, sind also die Bildkurven aller Funktionen $\ln (x : a)$, vgl. das auf S. 266 Erkannte.

Schließlich wollen wir auseinandersetzen, bei was für Aufgaben man darauf gefaßt sein kann, auf den natürlichen Logarithmus zu stoßen.

In einer Untersuchung trete eine unabhängige Veränderliche x und eine von ihr abhängige Veränderliche y auf. Wir geben dem x zuerst einen Wert a, dann den c-fachen Wert $a\,c$, dann wieder den c-fachen Wert $a\,c^2$ usw., so daß x nach und nach Werte

$$x = a, \qquad a\,c, \qquad a c^2, \qquad a\,c^3 \ldots$$

bekommt, die eine sogenannte geometrische Progression bilden. Wir wollen nun annehmen, es zeige sich, daß die zugehörigen Werte von y eine sogenannte arithmetische Progression

$$y = b, \qquad b + k, \qquad b + 2k, \qquad b + 3k \ldots$$

bilden, wo also jeder folgende Wert nicht ein und dasselbe Vielfache des vorhergehenden ist, sondern aus dem vorhergehenden durch Addition einer und derselben Größe k hervorgeht. Wir wollen ferner annehmen, daß wir immer eine solche Beobachtung machen, ganz gleichgültig, ob wir in der Progression für x die Schritte groß oder klein wählen, d. h. ob c nahe bei Eins liegt oder andere Werte hat. Durch den Versuch sei also festgestellt, daß, wenn x von a aus die Werte irgendeiner **geometrischen** Progression durchläuft, alsdann y von dem zugehörigen Werte b aus stets die Werte einer **arithmetischen** Progression durchläuft.

Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden: Ist der Faktor c der geometrischen Progression positiv, so haben alle Werte $a, a\,c, a c^2, a c^3 \ldots$ von x einerlei Vorzeichen; die Progression nimmt daher beständig zu oder beständig ab. Ist dagegen c negativ, so wechselt das Vorzeichen fortwährend. Dem absoluten Betrage nach aber werden die Werte auch dann immer größer oder immer kleiner. Man denke z. B. an eine hin- und herpendelnde Magnetnadel, deren Ausschlagwinkel nach rechts

und links immer kleiner werden. Der zweite Fall kommt auf den ersten zurück, wenn wir nur die absoluten Beträge der aufeinander folgenden Werte von x ins Auge fassen.

Im ersten Fall erreicht, wenn x den Wert ac^n erhalten hat, y den Wert $b + nk$:

(5) $$x = ac^n, \qquad y = b + nk.$$

Dabei ist $n = 1, 2, 3 \ldots$. Die erste Formel gibt:

$$c^n = \frac{x}{a}$$

oder nach Satz 9, wenn wir beiderseits den Logarithmus bilden:

$$n \ln c = \ln \frac{x}{a}, \quad \text{d. h.} \quad n = \frac{\ln \frac{x}{a}}{\ln c}.$$

Setzen wir dies in die zweite Formel (5) ein, so kommt:

$$y = b + \frac{\ln \frac{x}{a}}{\ln c} k.$$

Bezeichnen wir die Konstante $k : \ln c$ mit β, so ergibt sich:

(6) $$y = b + \beta \ln \frac{x}{a}.$$

Dieser Schluß gilt für die Werte von x und y, die in den beiden Progressionen vorkommen. Wenn aber stets, wie wir auch c wählen mögen, eine geometrische Progression von x-Werten eine arithmetische Progression von y-Werten nach sich zieht, muß (6) für alle Werte von x gelten, die in Betracht kommen. Wenn wir im zweiten Fall, wo $c < 0$ ist, nur die absoluten Beträge in der Wertereihe der x ins Auge fassen, können wir ebenso schließen. Deshalb folgt der

Satz 14: Hängt y von x in der Art ab, daß immer, wenn die Größe x von einem Wert a an eine **geometrische** Progression durchläuft, die Größe y von einem Werte b an eine **arithmetische** Progression durchläuft, so sind zwei Fälle möglich: x behält entweder beständig dasselbe Vorzeichen wie a oder wechselt es beständig. Im ersten Fall ist y von der Form:

$$y = b + \beta \ln \frac{x}{a},$$

wo β konstant ist. Dies gilt auch im zweiten Fall, sobald man x und a durch ihre absoluten Beträge ersetzt.

19*

5. Beispiel: Schwingt ein Pendel im luftleeren Raum und ist die Reibung seiner Schneide gleich Null, so wird es stets gleich große Ausschläge nach beiden Seiten haben. Dasselbe gilt, wenn ein Körper an einem Draht hängt und wagerechte Schwingungen um den Draht macht, wobei der Draht gedrillt wird, vorausgesetzt, daß sonst keine Widerstände wirken. Dies ist jedoch eine niemals erreichbare Voraussetzung. In Wahrheit nehmen alle Schwingungsweiten mehr oder weniger schnell ab, und zwar tritt alsdann schließlich folgendes ein: Wenn $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ die aufeinander folgenden Ausschlagwinkel nach der einen und anderen Seite sind, bilden sie eine geometrische Progression, während die sogenannte Schwingungsdauer, nämlich die Zeit der Schwingung von einer Umkehr bis zur nächsten Umkehr auf der anderen Seite, immer dieselbe bleibt, die Schwingungen also, wie man auch sagt, isochron (zeitgleich) sind. Ist die Schwingungsdauer gleich T (etwa in Sekunden gemessen), so gehören zu den Zeiten $t = 0, T, 2T$ usw. die absolut gemessenen Ausschlagwinkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ usw. Die Zeiten bilden eine arithmetische Progression. Hat der Ausschlagwinkel bis zu einem Wert α abgenommen und ist bis dahin die Zeit t verflossen, so besteht nach Satz 14 eine Beziehung von der Form:

$$t = b + \beta \ln \frac{\alpha}{a}.$$

Für $t = nT$ ist $\alpha = \alpha_n$, für $t = (n-1)T$ ist $\alpha = \alpha_{n-1}$, also:

$$nT = b + \beta \ln \frac{\alpha_n}{a}, \quad (n-1)T = b + \beta \ln \frac{\alpha_{n-1}}{a}.$$

Subtraktion beider Formeln voneinander gibt nach Satz 8:

$$T = \beta (\ln \alpha_n - \ln \alpha_{n-1})$$

oder

$$\ln \alpha_n - \ln \alpha_{n-1} = \frac{1}{\beta} T.$$

Die Differenz der Logarithmen zweier aufeinander folgender Ausschlagwinkel ist also proportional zur Schwingungsdauer. Man nennt diese Differenz das logarithmische Dekrement.

6. Beispiel: Die Empfindung, die ein Reiz auf einen unserer Sinne ausübt, z. B. die Druckempfindung, die ein Gewicht auf der Handfläche macht, ist nicht proportional zur Größe des Reizes. Wenn die Empfindungsstärken in einer arithmetischen Progression stehen, bilden die Reize selbst eine geometrische, wie man beobachtet hat. Der Reiz ist dabei meßbar, z. B. bei Druckempfindungen durch die Gewichte. Die Empfindung ist dagegen nur durch die Versuchsperson abschätzbar. Das ist natürlich etwas Unsicheres. Aber falls die angegebene Beziehung gilt, kann man ihre Richtigkeit in folgender Weise durch Messungen prüfen: Nach Satz 14 muß die Empfindung E eine Funktion des Reizes R sein von der Form:

$$E = b + \beta \ln \frac{R}{a}.$$

Nun sei R_0 der kaum noch zu verspürende Reiz, die sogenannte Reizschwelle, z. B. das kleinste Gewicht, das man noch auf der Handfläche fühlt, also die zugehörige Empfindung E ganz nahe bei Null, so daß für $R = R_0$ statt E Null gesetzt werden darf:

$$0 = b + \beta \ln \frac{R_0}{a}.$$

Wird dies von der vorigen Gleichung subtrahiert, so kommt nach Satz 8:

(7) $$E = \beta \ln \frac{R}{R_0} = \beta (\ln R - \ln R_0)\,.$$

Hierin ist R die unabhängige, E die abhängige Veränderliche, während β und R_0 konstant sind. Also ergibt sich durch Differentiation:

(8) $$\frac{dE}{dR} = \frac{\beta}{R}\,.$$

Vermehrt man den Reiz R nur so wenig, daß man gerade knapp eine Änderung der Empfindung E verspürt, so kann man beide Änderungen angenähert als Differentiale dR und dE auffassen. Nach (8) ist dann:

$$\frac{dE}{\beta} = \frac{dR}{R}\,.$$

Man darf dE, die eben noch bemerkbare Empfindungsänderung, als für die Empfindlichkeit der Versuchsperson kennzeichnend, also als konstant auffassen. Dann sagt die letzte Formel: Wenn jenes erwähnte sogenannte Weber-Fechnersche Gesetz der Psychophysik gilt, muß das Verhältnis aus der eben noch verspürbaren Reizänderung dR und dem vorher ausgeübten Reize R für dieselbe Person immer denselben Wert haben, wie groß man auch den Reiz R wählen mag. Diese Schlußfolgerung benutzt man, um die Richtigkeit des Gesetzes zu prüfen, denn der Reiz R und die eben noch merkbare Reizänderung dR sind physikalisch meßbar.

7. Beispiel: Bei einer chemischen Reaktion gehe ein Stoff vom Gewicht a allmählich eine neue Verbindung ein. Kommen dabei keine Temperaturänderungen vor und sorgt man dafür, daß der noch unverbrauchte Teil beständig in inniger Berührung mit den Reagenzien bleibt, so verlangsamt sich der Vorgang wie folgt: Wenn die Zeiten eine arithmetische Progression bilden, nimmt die jeweils noch unverbrauchte Menge des Stoffes in geometrischer Progression ab. Nach t Minuten sei noch eine Menge vom Gewicht m unverbraucht. Nach Satz 14 ist dann

$$t = b + \beta \ln \frac{m}{a}\,.$$

Für $t = 0$ ist $m = a$, also $b = 0$, so daß bleibt:

$$t = \beta \ln \frac{m}{a}\,.$$

Daher ist nach Satz 8:

$$\ln m - \ln a = t : \beta\,,$$

wo die Konstante β natürlich negativ ist. Die Differenz der Logarithmen der nach t Minuten noch unverbrauchten Menge und der zuerst vorhandenen Menge ist mithin zur Zeit t proportional. Alles ist zersetzt, wenn $m = 0$ wird, dann aber wird $|\ln m|$ unendlich groß, also auch t unendlich groß. Der betrachtete natürlich nur ideale Vorgang wäre also erst nach unendlich langer Zeit völlig beendet.

8. Beispiel: Ein Kilogramm eines Gases sei in einem Behälter von v cbm eingeschlossen und übe auf das Quadratmeter der Wandung einen Druck von p kg, die spezifische Spannung, aus. Ändert sich das Volumen, bleibt aber die Temperatur konstant, so gilt das Boylesche Gesetz, wonach das Produkt pv konstant

ist. Bedeutet v_0 das Anfangsvolumen und p_0 die Anfangsspannung, so ist also $p v = p_0 v_0$ oder:

$$p = \frac{p_0 v_0}{v}, \tag{9}$$

wodurch p als eine Funktion von v gegeben wird, deren Bildkurve in einem p-v-Koordinatensystem nach S. 197 eine gleichseitige Hyperbel ist, von der wir in Fig. 214 nur den positiven Ast (für $v > 0$) angedeutet haben. Ihre Asymptoten sind die v- und p-Achse. Wächst das Volumen von v bis $v + dv$, so verrichtet das Gas die Arbeit $p\,dv$. Die Gesamtarbeit bei der Ausdehnung von v_0 bis v ist also das Integral:

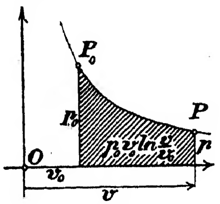


Fig. 214.

$$\int\limits_{v_0}^{v} p\,dv,$$

das nach Satz 5, S. 229, durch die Fläche zwischen der Abszissenachse, der Hyperbel und den zu v_0 und v gehörigen Ordinaten dargestellt wird. Nach (9) ist diese Arbeit gleich:

$$\int\limits_{v_0}^{v} \frac{p_0 v_0}{v}\, dv = p_0 v_0 \ln \frac{v}{v_0}.$$

§ 4. Der gewöhnliche Logarithmus.

Der Zweck, den wir bisher in diesem Kapitel verfolgt haben, war, den Leser mit einer vielfach bei den Anwendungen der Mathematik auftretenden Funktion, mit $\ln x$, vertraut zu machen. Der Zweck jedoch, den man sonst mit der Einführung der Logarithmen verfolgt, ist ein anderer: Man will ein Mittel haben, um schwierigere Zahlenrechnungen zu vereinfachen. Da auch dieser Zweck wichtig ist, müssen wir uns damit beschäftigen.

Stellen wir uns vor, wir hätten eine Tafel, aus der wir zu jeder Zahl den natürlichen Logarithmus und zu jedem Logarithmus die zugehörige Zahl entnehmen könnten, so würden wir viele Rechnungen erleichtern können. Denn wir sahen ja in Satz 8, daß

$$\ln \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{b_1 b_2 \ldots b_m} = \ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n - \ln b_1 - \ln b_2 - \cdots - \ln b_m$$

ist. Wollen wir also den Bruch

$$\frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{b_1 b_2 \ldots b_m}$$

berechnen, so ermitteln wir die Logarithmen von $a_1 \ldots a_n$, $b_1 \ldots b_m$ aus der Tafel, addieren und subtrahieren sie nach jener Formel und erhalten so den Logarithmus des gesuchten Bruches, zu dem wir in der Tafel den zugehörigen Numerus aufsuchen. Wollen wir die n-te Potenz

oder n-te Wurzel einer Zahl a berechnen, so gehen wir nach den Formeln

$$\ln(a^n) = n \ln a\,, \qquad \ln \sqrt[n]{a} = \ln\left(a^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} \ln a$$

(vgl. Satz 9) vor, indem wir $\ln a$ in der Tafel suchen, mit n oder $1:n$ multiplizieren und zu der gefundenen Zahl (als Logarithmus) aus der Tafel den zugehörigen Numerus entnehmen. Multiplikationen und Divisionen werden also durch das logarithmische Rechnen auf Additionen und Subtraktionen, Potenzieren und Radizieren auf Multiplikationen und Divisionen zurückgeführt, und das ist gewiß eine große Erleichterung.

Allerdings müßten wir hierfür eine Tafel haben, aus der wir ohne große Mühe zu jeder Zahl den Logarithmus und zu jedem Logarithmus die zugehörige Zahl finden könnten, abgerundet auf eine gewisse Anzahl von Dezimalstellen. Diese Tafel, von der unsere Tafel II im Anhang ein kurzer Auszug ist, hat aber einen großen Übelstand. Nach Satz 10 ist nämlich:

$$\ln(e^x) = x\,,$$

wo e jene zwischen 2,6 und 2,8 gelegene Zahl bedeutet, deren natürlicher Logarithmus gleich Eins ist. Hiernach ist:

$$\ln 1 = 0\,, \quad \ln e = 1\,, \quad \ln(e^2) = 2\,, \quad \ln(e^3) = 3, \ldots$$

Da $\ln x$ mit x wächst, haben also die Zahlen zwischen 1 und e einen Logarithmus zwischen 0 und 1, die Zahlen zwischen e und e^2 einen Logarithmus zwischen 1 und 2, usw. Die Ganzen also, die beim Logarithmus vorkommen, kann man erst bestimmen, wenn man weiß, zwischen welchen ganzzahligen Potenzen von e die gegebene Zahl liegt. Nun aber sind die Potenzen von e recht unbequeme Zahlen. Auch beruht unser Zahlensystem nicht auf den Potenzen von e, sondern auf den Potenzen von 10, da 10^0, 10^1, 10^2 ... die ersten ein-, zwei-, dreistelligen ... ganzen Zahlen angeben. Unser Zahlensystem heißt deshalb ein Dezimalsystem. Es wäre viel angenehmer, wenn nicht die Potenzen von e, sondern die von 10 die vorhin gekennzeichnete Rolle für die Bestimmung der Ganzen eines Logarithmus spielten. Dann nämlich könnten wir sofort aus der Stellenzahl der in der gegebenen Zahl vorkommenden Ganzen schließen, wie viele Ganze der zugehörige Logarithmus hat.

Nun beachte man, daß die vorhin erwähnten Vorzüge des logarithmischen Rechnens, wodurch Produkte auf Summen und Brüche auf Differenzen sowie Potenzen auf Produkte und Wurzeln auf Brüche zurückgeführt werden, ihre Quelle in der sogenannten logarith-

mischen Eigenschaft:

$$\ln ab = \ln a + \ln b \tag{1}$$

haben. Denn bei der Ableitung der Sätze 6 bis 9 auf S. 285—287 haben wir nur von dieser Eigenschaft Gebrauch gemacht. Zunächst allerdings auch davon, daß $\ln 1 = 0$ ist; doch diese Eigenschaft können wir ja auch aus (1) ableiten, denn wenn wir in (1) für b Eins setzen, folgt $\ln a = \ln a + \ln 1$, also $\ln 1 = 0$. Außer dem natürlichen Logarithmus gibt es nun noch andere Funktionen $f(x)$ mit der in (1) ausgedrückten logarithmischen Eigenschaft

$$f(ab) = f(a) + f(b). \tag{2}$$

In der Tat, auch

$$y = c \ln x$$

ist eine derartige Funktion, wenn c eine Konstante bedeutet. Denn für $x = ab$ hat diese Funktion den Wert $c \ln ab$, für $x = a$ und $x = b$ die Werte $c \ln a$ und $c \ln b$, und es ist in der Tat:

$$c \ln ab = c \ln a + c \ln b,$$

da dies sofort aus (1) durch Multiplikation mit c folgt. Mithin ist $c \ln x$ eine Funktion mit der logarithmischen Eigenschaft, welchen Wert auch die Konstante c haben mag.

Jene Rechenerleichterungen, von denen wir oben sprachen, würden wir also auch dann haben, wenn wir nicht eine Tafel der Werte von $\ln x$, sondern eine Tafel der Werte von $c \ln x$ aufgestellt hätten. Nun wollen wir die Konstante c so wählen, daß diese Funktion $c \ln x$ nicht für $x = e$, sondern für $x = 10$ den Wert Eins hat. Zu fordern ist:

$$c \ln 10 = 1, \quad \text{also} \quad c = \frac{1}{\ln 10}.$$

Mithin kommen wir zu der logarithmischen Funktion

$$y = \frac{\ln x}{\ln 10}, \tag{3}$$

die für $x = 1$ und $x = 10$ die Werte Null und Eins hat. Noch mehr: Wegen $\ln(10^n) = n \ln 10$ hat diese Funktion für $x = 10^n$ den Wert $y = n$. Wir haben also das gewünschte Ziel erreicht: Statt mit $\ln x$ führt man mit $\ln x : \ln 10$ alle logarithmischen Zahlenrechnungen aus. Daher heißt $\ln x : \ln 10$ der gewöhnliche Logarithmus von x oder auch nach seinem ersten Berechner Briggs (1618) der Briggssche Logarithmus. Man nennt ihn auch den Logarithmus mit der Basis 10, während man den natürlichen Logarithmus

als den Logarithmus mit der Basis e bezeichnet[1]. Zum Unterschied von $\ln x$ benutzt man für den gewöhnlichen Logarithmus von x das Zeichen $\log x$ oder $\log \operatorname{vulg} x$ (logarithmus vulgaris x). Wir werden stets das Zeichen $\log x$ und den Namen: gewöhnlicher Logarithmus anwenden. Unter $\log x$ verstehen wir also die Funktion:

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}. \tag{4}$$

Sie ist wie $\ln x$ nur für positive Werte von x vorhanden, hat ferner die logarithmische Eigenschaft

$$\log ab = \log a + \log b \tag{5}$$

und ist für $x = 1$ gleich Null:

$$\log 1 = 0. \tag{6}$$

Nach den vorhergehenden Auseinandersetzungen gelten die Sätze 6 bis 9 auch für den gewöhnlichen Logarithmus. Das ist der Grund, weshalb wir damals in den Sätzen nur vom Logarithmus, nicht vom natürlichen Logarithmus gesprochen haben. Deshalb brauchen wir die Sätze nicht zu wiederholen. Wir begnügen uns damit, die Formeln für das Rechnen mit gewöhnlichen Logarithmen zusammenzustellen:

$$\left\{\begin{aligned} \log a_1 a_2 \ldots a_n &= \log a_1 + \log a_2 + \cdots + \log a_n, \\ \log \frac{1}{a} &= -\log a, \\ \log \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{b_1 b_2 \ldots b_m} &= \log a_1 + \log a_2 + \cdots + \log a_n \\ &\quad - \log b_1 - \log b_2 - \cdots - \log b_m, \\ \log (a^n) &= n \log a. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Da ferner

$$\log (10^n) = n \tag{8}$$

ist, können wir für die gewöhnlichen Logarithmen noch den Satz aufstellen, der dem Satz 11 über natürliche Logarithmen entspricht:

Satz 15: Der gewöhnliche Logarithmus einer Zahl ist diejenige Zahl, mit der man die Basis 10 potenzieren muß,

[1] Allgemein versteht man unter dem Logarithmus von x mit irgendeiner konstanten Basis B diejenige Zahl y, mit der man die Basis B potenzieren muß, um x als Wert der Potenz zu erhalten, so daß also $B^y = x$ ist. Durch Logarithmieren der Gleichung ergibt sich daraus, daß $y \ln B$ gleich $\ln x$ wird. Wenn man nun die Konstante $1 : \ln B$ mit c bezeichnet, erhält man $y = c \ln x$. Man kommt also wieder zu den auf S. 296 betrachteten Funktionen.

um den Numerus zu erhalten:

$$10^{\text{Gew. Logarithmus}} = \text{Numerus}.$$

Im Schulunterrichte, wo die Logarithmen allein zum Zwecke der Erleichterung des Rechnens benutzt werden, pflegt man diesen Satz als Erklärung der gewöhnlichen Logarithmen an die Spitze zu stellen und aus ihm die Eigenschaften der Logarithmen abzuleiten.

Nach (4) sind die gewöhnlichen Logarithmen zu den natürlichen proportional: Kennt man die natürlichen Logarithmen, so braucht man sie nur mit dem von 10 zu dividieren, um die gewöhnlichen Logarithmen zu erhalten. Nach dem 3. Beispiel auf S. 283 ist abgerundet:

$$\ln 10 = 2{,}302\,585$$

und nach dem 4. Beispiel auf S. 284 abgerundet:

$$\frac{1}{\ln 10} = 0{,}434\,29.$$

Aus den natürlichen Logarithmen gehen also die gewöhnlichen durch Multiplikation mit dem sogenannten Modul (vom lateinischen modulus, Maßstab)

(9) $$M = \frac{1}{\ln 10} = 0{,}434\,29$$

hervor. Die Definition (4) der gewöhnlichen Logarithmen läßt sich mit Benutzung dieses Zeichens M auch so schreiben:

(10) $$\log x = M \ln x.$$

1. Beispiel: Nach dem 2. Beispiel, S. 282, liegt $\ln 2$ zwischen

$$0{,}693\,147\,05 \quad \text{und} \quad 0{,}693\,147\,22\,,$$

nach dem 4. Beispiel, S. 284, liegt M zwischen

$$0{,}434\,294\,45 \quad \text{und} \quad 0{,}434\,294\,57\,.$$

Multiplizieren wir die kleineren Zahlen miteinander und ebenso die größeren, so erhalten wir zwei Werte, zwischen denen $\log 2$ liegt, nämlich:

$$0{,}301\,029\,9 \quad \text{und} \quad 0{,}301\,030\,1\,,$$

so daß auf sechs Dezimalstellen abgerundet kommt:

$$\log 2 = 0{,}301\,030\,.$$

Dies Beispiel genügt; wir sind jedenfalls imstande, im Notfalle den gewöhnlichen Logarithmus irgendeiner positiven Zahl so genau zu berechnen, wie wir nur wollen. Die Logarithmentafeln, über deren Gebrauch wir noch sprechen werden, enthalten stets die gewöhnlichen Logarithmen (nur gelegentlich in einem Auszug auch die natürlichen).

Um aus den gewöhnlichen Logarithmen die natürlichen berechnen zu können, fügen wir in der Tafel III des Anhanges eine Zusammenstellung der Vielfachen von $1 : \ln 10$ und $\ln 10$ oder also von M und $1 : M$ hinzu. Wie man sie zu benutzen hat, zeigen die folgenden beiden Beispiele.

2. Beispiel: Aus einer Logarithmentafel ist $\log 3 = 0{,}4771$ entnommen worden. Um hieraus $\ln 3$ zu finden, müssen wir $1 : M$ mit $0{,}4771$ multiplizieren. Hier kommen die Produkte von $1 : M$ mit 4, 7, 7, 1 vor, die wir der Tafel III entnehmen und richtig untereinander stellen, wobei der Punkt als Hilfe dient:

```
     0,9.2 1 0 3
       1 6.1 1 8
         1 6.1 2
             2.3
ln 3 = 1,0 9 8 5 6 ,  abgerundet 1,0986.
```

3. Beispiel: Im 1. Beispiel, S. 278, fanden wir in $\ln 1{,}1 = 0{,}0953$. Um hieraus $\log 1{,}1$ abzuleiten, multiplizieren wir M mit $0{,}0953$. Tafel III gibt:

```
       0,0 3.9 0 9
             2.1 7
               1.3
log 1,1 = 0,0 4 1 3 9 ,  abgerundet 0,0414.
```

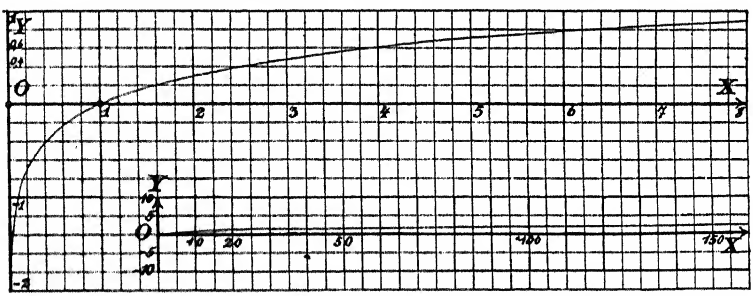


Fig. 215.

Da die gewöhnlichen Logarithmen zu den natürlichen proportional sind, könnten wir die in Fig. 213, S. 284, gezeichnete Kurve auch als Bildkurve von $\log x$ benutzen, wenn wir als y-Einheit die zu $x = 10$ gehörige Ordinate wählten, weil $\log 10 = 1$ ist. Nehmen wir dagegen auf beiden Achsen gleich große Einheiten an, so geht als Bildkurve von $\log x$ die in Fig. 215 hervor, die mit Hilfe der Logarithmentafel leicht zu zeichnen ist, zumal man auch die Steigungen ihrer Tangenten leicht berechnen kann. Denn der Differentialquotient des gewöhnlichen Logarithmus ist nach (10):

$$\frac{d \log x}{dx} = M \frac{d \ln x}{dx} = \frac{M}{x} = \frac{1}{x \ln 10}. \tag{11}$$

Für $x \geqq 5$ ist die Steigung kleiner als 0,1. Aber schon etwa vom Numerus $x = 3$ an weicht die Bildkurve nur sehr wenig von einer geraden Linie ab. In der Nebenfigur ist alles auf $\frac{1}{25}$ verkleinert, so daß der Ast der Kurve unterhalb der x-Achse, für $x < 1$, nicht mehr zu erkennen ist, weil er zu nahe bei der y-Achse verläuft.

Will man Zahlenrechnungen mit Hilfe der gewöhnlichen Logarithmentafel ausführen, so muß man die Tafel zu handhaben wissen. Man muß wissen, wie man zum Numerus den Logarithmus und zum Logarithmus den Numerus bestimmt. Wir erörtern hier die Anwendung einer fünfstelligen Tafel. Nähere Anweisungen sind den Tafeln stets vorgedruckt und zu beachten, da ihre Einrichtung nicht immer dieselbe ist.

Der gewöhnliche Logarithmus ist eine Zahl, die aus Ganzen, der sogenannten Kennziffer, und aus einem Bruche, der sogenannten Mantisse, besteht. Das Wort Mantisse soll aus dem Etruskischen stammen und eigentlich eine wertlose Zugabe bedeuten. Hoffentlich nimmt der Leser das nicht zu wörtlich! Auch haben die alten Etrusker nichts von Logarithmen geahnt. Das Wort Mantisse bedeutet hier den Bruchteil, der zu den Ganzen hinzutritt. Der Name Kennziffer für die Ganzen der Logarithmen hat seinen Ursprung darin, daß man aus der Kennziffer sofort erkennt, wie viele Stellen von Ganzen der Numerus eines vorgelegten Logarithmus hat. Da nämlich

$$\log(10^n) = n$$

ist, haben die Numeri

$$\ldots\ 0{,}001,\ \ 0{,}01,\ \ 0{,}1,\ \ 1,\ \ 10,\ \ 100,\ \ 1000\ \ldots$$

die gewöhnlichen Logarithmen:

$$\ldots\ -3,\ \ -2,\ \ -1,\ \ 0,\ \ 1,\ \ 2,\ \ 3\ \ldots$$

Also hat z. B. ein Numerus von der Form 327, . . . einen Logarithmus zwischen 2 und 3, d. h. mit der Kennziffer 2. Um die Kennziffer des Logarithmus zu finden, braucht man also keine Logarithmentafel!

Die Tafeln enthalten meistens die Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis 10 000, aber nur ihre Mantissen. Man kann daraus sofort die Logarithmen aller Zahlen ablesen, die nur vier Ziffern hintereinander außer Nullen davor oder dahinter aufweisen. Suchen wir z. B. die Logarithmen von

$$26\,450, \qquad 2{,}645, \qquad 0{,}002\,645\,.$$

Die linke und rechte Zahl sind gleich der mittleren, multipliziert mit

einer ganzen Potenz von 10. Es handelt sich nämlich um die Logarithmen von:

$$2{,}645 \cdot 10^4, \qquad 2{,}645, \qquad 2{,}645 \cdot 10^{-3}.$$

Da $\log ab = \log a + \log b$ und $\log 10^n = n$ ist, sind es die Zahlen:

$$\log 2{,}645 + 4, \quad \log 2{,}645, \quad \log 2{,}645 - 3.$$

Die Zahl 2,645 liegt zwischen 0 und 10 oder 10^0 und 10^1, ihr Logarithmus also zwischen 0 und 1. Er beginnt daher mit 0, . . . Die fünfstellige Tafel gibt zum Numerus 2645 die Mantisse 42 243. Also sind

$$0{,}422\,43 + 4, \qquad 0{,}422\,43, \qquad 0{,}422\,43 - 3$$

die gesuchten Logarithmen. Man schreibt sie so:

$$4{,}422\,43, \qquad 0{,}422\,43, \qquad 7{,}422\,43 - 10.$$

Im letzten Falle nämlich führt man die Subtraktion nicht aus, sondern bringt den Subtrahenden auf den Betrag 10, indem man zum Minuenden die entsprechende Zahl von Ganzen hinzufügt. Das Verwandeln des Subtrahenden in 10 ist nicht nötig, aber für manche Rechnungen bequem.

Umgekehrt: Zu den Logarithmen

$$2{,}577\,61, \qquad 0{,}577\,61, \qquad -2{,}422\,39$$

werden die Numeri gesucht. Den letzten negativen Logarithmus schreiben wir zunächst als Differenz aus einem positiven Bruch und einer ganzen Zahl, indem wir 3 addieren und dann subtrahieren. Also liegen die drei Logarithmen vor:

$$2{,}577\,61, \qquad 0{,}577\,61, \qquad 0{,}577\,61 - 3.$$

Die Beispiele sind so gewählt, daß überall die Mantisse 577 61 ist. Ferner kommt diese Mantisse wirklich in der fünfstelligen Tafel vor. Sucht man 577 61 in der Logarithmenspalte auf, so findet man, daß dabei der Numerus 3781 steht. Nun liegt der erste Numerus, da 2 die Kennziffer seines Logarithmus ist, zwischen 10^2 und 10^3, ist also dreistellig in seinen Ganzen. Der zweite Numerus ist, da sein Logarithmus die Kennziffer 0 hat, zwischen 10^0 und 10^1 gelegen, mithin einstellig in den Ganzen. Der dritte endlich ist, da sein Logarithmus die Kennziffer -3 hat, zwischen 10^{-2} und 10^{-3} gelegen, beginnt also mit 0,00. Demnach sind die Numeri:

$$378{,}1\,, \qquad 3{,}781\,, \qquad 0{,}003\,781.$$

Wenn der gegebene Numerus nicht in der Tafel steht oder mehr als 4 Ziffern nacheinander hat (außer vielleicht vorhergehenden oder

nachfolgenden Nullen), verwendet man das Interpolations- oder Einschaltungsverfahren. Dies Näherungsverfahren beruht darauf, daß die Bildkurve von $\log x$ für ein kleines Stückchen mit großer Annäherung als Gerade aufgefaßt werden darf [1], woraus nach § 1 des 2. Kapitels folgt, daß in einem kleinen Intervalle das Wachsen des Logarithmus angenähert proportional zu dem des Numerus ist. Zur Erleichterung der Rechnung pflegen die Tafeln kleine Nebentäfelchen zu enthalten, überschrieben mit P. P. (d. h. partes proportionales oder Verhältnisteile), in denen das 1., 2., ... bis 9. Zehntel der Differenz zwischen je zwei aufeinander folgenden Mantissen steht. Das Einschaltungsverfahren ist genau so wie auf S. 117 u. f. bei der Regula falsi:

Gegeben sei der Numerus 26,457. Wir suchen in der Tafel die Mantisse zu 2645, nämlich 42 243. Die nächste Mantisse, d. h. die zu 2646 gehörige, ist um 16 größer. Auf das Intervall von 26450 bis 26460 oder 10 kommt also die Differenz 16. Da wir die Zahl 26457 brauchen, addieren wir zur Mantisse 42243 also $\frac{7}{10}$ der Differenz 16. Die Nebentafel P. P. gibt hierfür 11,2, wovon man die Dezimale nur zu Abrundungen benutzen darf. Also ist 42254 die gesuchte Mantisse. Da 26,457 der Numerus war, ist die Kennziffer des Logarithmus gleich 1, weil der Numerus zwischen 10^1 und 10^2 liegt. Also ist 1,422 54 der gesuchte Logarithmus.

Umgekehrt: Gegeben sei der Logarithmus 2,577 68. In der Tafel findet man die Mantisse 57768 nicht, wohl aber als nächst kleinere 57761, während die folgende um 11 größer ist. Bei 57761 steht der Numerus 3781. Da der Logarithmus die Kennziffer 2 hat, liegt der Numerus zwischen 10^2 und 10^3, ist also etwas größer als 378,1. Weil die gegebene Mantisse 57768 um 7 größer als die aufgesuchte ist, wird die nächste Dezimale des Numerus die sein, die angibt, wie viele Zehntel von 11 die Zahl 7 rund beträgt. Die Tafel P. P. zeigt, daß es 6 Zehntel sind. Also ist 378,16 der zugehörige Numerus.

Man muß immer daran denken, daß die Einschaltung ein Näherungsverfahren ist, es also töricht wäre, zu großes Gewicht auf die Genauigkeit der dadurch gewonnenen letzten Ziffer zu legen. Das Verfahren ist um so besser, je kleiner die Differenz der Mantissen an derjenigen Stelle der Tafel ist, die man gerade benutzt.

4. Beispiel: Die Kante eines Würfels von 10 Liter Inhalt ist (vgl. das 1. Beispiel auf S. 118 u. f.) in cm gleich der dritten Wurzel aus 10 000. Da nun

$$\log \sqrt[3]{10\,000} = \log (10\,000^{\frac{1}{3}}) = \tfrac{1}{3} \log 10\,000$$

[1] Vgl. die Nebenfigur von Fig. 215, wo die Kurve überhaupt kaum von einer Geraden zu unterscheiden ist.

ist, gibt die Rechnung:

$$\log 10\,000 = 4, \qquad \log \sqrt[3]{10\,000} = 1{,}333\,33\,,$$
$$\sqrt[3]{10\,000} = 21{,}544\,.$$

5. Beispiel: Die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels[1], d. h. die Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Durchgängen durch die Lotrechte, ist angenähert für kleine Schwingungen in Sekunden die Zeit

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}\,,$$

wenn l die Pendellänge in Metern und g die Gravitationskonstante 9,81 bedeutet. Wie groß ist hiernach die Schwingungsdauer eines Pendels von 3,98 Meter Länge?

$$\begin{array}{l} \log l \;= 0{,}5999 \\ \underline{\log g \;= 0{,}9917} \\ \log \dfrac{l}{g} = 0{,}6082 - 1\,. \end{array}$$

Um den Logarithmus der Quadratwurzel aus $l : g$ zu erhalten, müssen wir mit 2 dividieren. Vorher addieren wir beim Minuenden und Subtrahenden eine Eins, damit der Subtrahend auch nach der Division mit 2 eine ganze Zahl wird:

$$\log \frac{l}{g} = 1{,}6082 - 2\,, \qquad \log \sqrt{\frac{l}{g}} = 0{,}8041 - 1$$
$$\log \pi = \log 3{,}142 = \underline{0{,}4972}$$
$$\log t = 0{,}3013\,,$$
$$t = 2{,}001\,.$$

Hat man Rechnungen auszuführen, bei denen es nicht auf allzu große Genauigkeit ankommt, so kann man statt der Logarithmentafel den logarithmischen Rechenschieber benutzen, dessen Vorzüge darin bestehen, daß er eine Logarithmentafel ersetzt und die Additionen und Subtraktionen von Logarithmen mechanisch auszuführen gestattet. Um ihn zu begreifen, tut der Leser gut, sich ihn nach folgender Anleitung in einfacher Form aus zwei Papierstreifen herzustellen.

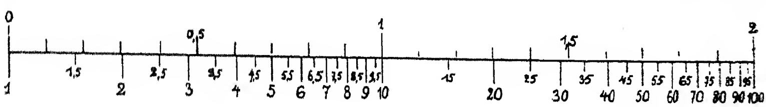


Fig. 216.

In Fig. 216 haben wir oberhalb der Geraden eine gewöhnliche Zahlenskala von 0 bis 2 aufgetragen. Unterhalb der Geraden haben wir mit Hilfe der Logarithmentafel die Logarithmen der Zahlen 1, 2, 3 ... 100, die ja zwischen 0 und 2 liegen. angedeutet und dabei statt log 1, log 2,

[1] Nämlich einer gewichtslosen Stange mit daranhängendem schweren Punkte.

log 3 ... einfach die Numeri 1, 2, 3 ... angeschrieben, so daß z. B. die 3 an der Stelle steht, die nach der oberen Skala das Ende der Strecke log 3 = 0,477 ... ist. Die Einteilung ersetzt eine Logarithmentafel: Sie gibt die Numeri durch die Ziffern 1 bis 100, dagegen die zugehörigen Logarithmen durch die Längen der Strecken von links an bis zu den Numerusmarken, gemessen mit der auf der oberen Skala angegebenen Längeneinheit. Wir bitten nun den Leser, die untere Einteilung auf zwei schmale Streifen aus dünner Pappe zu übertragen, so daß die Teilungen beim Aneinanderlegen der beiden Streifen ebenfalls aneinanderliegen. Den oberen Streifen wollen wir mit A, den unteren mit B bezeichnen.

Will man ein Produkt ab ausrechnen, so sucht man die Zahl a auf dem Streifen A und legt den Streifen B so daran, daß seine Marke 1 gerade bei a liegt. In Fig. 217 ist $a = 2{,}5$ und $b = 3{,}5$ gewählt. Nun suche man auf B die Marke b. Ihr liegt eine Stelle c von A gegenüber. Die Strecke von 1 bis a auf A und die Strecke von 1 bis b auf B stellen $\log a$ und $\log b$ dar, also ist ihre Summe, d. h. die Strecke von 1 bis c

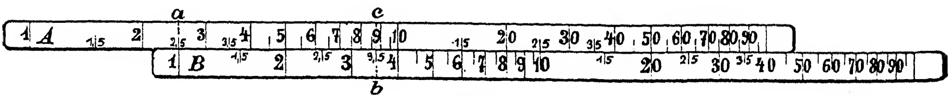


Fig. 217.

auf A, gleich $\log ab$. Da aber auf A statt der Logarithmen die zugehörigen Numeri durch Zahlen angegeben sind, ist bei c auf A der Wert des Produktes ab abzulesen, die Zahl $c = 8{,}7$, so daß sich $2{,}5 \,.\, 3{,}5$ oder rund $8{,}7$ ergibt.

Natürlich kann man durch das umgekehrte Verfahren auch die Divisionen ausführen. Wenn $c : b$ berechnet werden soll, sucht man c auf A und b auf B, legt die Streifen so aneinander, daß diese beiden Stellen einander gegenüberliegen, und liest auf A den Wert a ab, der der Stelle 1 von B gegenüberliegt. Denn dann ist $\log a = \log c - \log b = \log (c : b)$.

Dies ist die einfachste Form des Rechenschiebers. Die käuflichen Rechenschieber sind meistens $\frac{1}{4}$ m lang. Die Teile der Skalen von 10 bis 100 sind statt mit 10, 11 ... mit 1, 1,1 ... 10 bezeichnet, was erlaubt ist, weil es nur auf die Mantissen der Logarithmen, nicht auf ihre Kennziffern ankommt, da man die Stellenzahl der Ganzen des Ergebnisses abschätzen kann.

In Fig. 218 ist der Anfang und Querschnitt des Schiebers dargestellt. Die Skala A ist auf dem Hauptstab angebracht, während die Skala B

auf einer in einer Rille verschiebbaren Zunge Z verzeichnet ist. Die Skala E ist ein für uns nebensächlicher Zentimeterstab. Um das Einstellen auf bestimmte Marken zu ermöglichen, ist noch ein Läufer L angebracht, eine in Metall gefaßte Glasplatte, die längs des Hauptstabes verschiebbar ist und auf dem Glas eine feine Querlinie, den Index I,

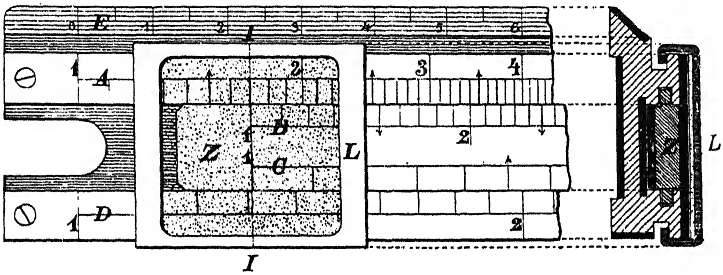


Fig. 218.

trägt. Da $\log(x^2) = 2 \log x$ ist, stellt die Skala C, die neben B auf der Zunge angebracht und in doppelt so großem Maßstabe wie B entworfen ist, die Logarithmen der Quadrate der Zahlen dar. Dieselbe Skala ist in D auf dem Hauptstabe wiederholt. Diese beiden Skalen dienen zur bequemeren Ausrechnung von Potenzen und Wurzeln, worüber man näheres in den Gebrauchsanweisungen findet. Um den Rechenschieber von Witterungseinflüssen unabhängig zu machen, sind die Skalen durch Zellstoffbelag auf dem Holze hergestellt. Solcher Belag (im Querschnitt schwarz angedeutet) findet sich außerdem noch an einigen anderen Stellen. Der Rechenschieber trägt auf seiner Unterseite noch einige Skalen, die wir nicht besprechen.

Wer oft Multiplikationen, Divisionen, Potenzerhebungen und Wurzelausziehen überschläglich machen muß, hat am Rechenschieber einen äußerst bequemen Helfer. Manche verlassen sich bei allen Rechnungen so blindlings auf ihn, daß sie sogar z. B. 2 . 2 damit berechnen, dabei etwa 3,95 als Ergebnis finden und dann auf 4 abrunden!

§ 5. **Rückblick und Folgerungen.**

Manche Leute glauben, die Mathematiker hätten die Logarithmen nur deshalb erfunden, um sie damit zu quälen. Sie tun damit den Erfindern und den Logarithmen großes Unrecht. Jeder, der Rechnungen auszuführen hat, findet in der Logarithmentafel ein bequemes Hilfsmittel. Gewiß lassen sich viele Rechnungen ohne Logarithmen ausführen, viele jedoch nicht. In den Anwendungen kommen z. B. oft

Potenzen x^n vor, deren Exponenten abgerundete Dezimalbrüche wie 1,41 sind; man möge einmal versuchen, $x^{1,41}$ für $x = 2{,}3$ ohne die Logarithmentafel zu berechnen! Dieser Versuch ist das beste Mittel, die Abneigung gegen die Logarithmen in Hochschätzung zu verwandeln.

Was manchem die Logarithmen so verhaßt macht, ist ihre Theorie. Hat aber unser Leser die Betrachtungen dieses Kapitels sorgfältig durchgelesen, so braucht er sich für immer nur noch recht wenig davon zu merken, was wir kurz zusammenstellen:

Zunächst die Erklärung des natürlichen Logarithmus $\ln x$ als derjenigen Funktion der positiven Veränderlichen x, die den Differentialquotienten $1 : x$ hat und deren Wert für $x = 1$ gleich Null ist. Nach Fig. 213, S. 284, wird der Leser den ungefähren Verlauf der Funktion innehaben. Merken muß man sich, daß $\ln x$ positiv oder negativ ist, je nachdem x größer oder kleiner als Eins ist. Aber dies ist schon zur Hälfte dem Gedächtnis eingeprägt, da man weiß, daß $\ln 1$ gleich Null ist. Wie man die Logarithmen berechnet, vgl. § 2, braucht man sich nicht zu merken. Die logarithmische Eigenschaft $\ln ab = \ln a + \ln b$ wird dem Leser noch von der Schulzeit her bekannt genug sein mit allen daraus für das logarithmische Rechnen zu ziehenden Folgerungen, wonach das Multiplizieren und Dividieren auf das Addieren und Subtrahieren, das Potenzieren und Radizieren auf das Multiplizieren und Dividieren zurückkommt.

Eines aber sich fest zu merken, ist äußerst wichtig: Unter e haben wir diejenige Zahl verstanden, deren natürlicher Logarithmus gleich Eins ist. Siehe S. 287. Daß e zwischen 2,6 und 2,8 liegt, kann man sich auch merken. Aus $\ln e = 1$ folgt $\ln (e^2) = 2$, $\ln (e^3) = 3$ usw., allgemein $\ln (e^n) = n$. Weil hier e^n der Numerus, n der Logarithmus ist, heißt dies:

$$e^{\text{Nat. Logarithmus}} = \text{Numerus}.$$

Ferner muß man wissen, wie die gewöhnlichen Logarithmen aus den natürlichen hervorgehen. Man merke sich nur, daß sie zu ihnen proportional und zwar so beschaffen sind, daß $\log 10 = 1$ ist, wodurch man sofort zur Definition kommt:

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

Daß man $1 : \ln 10$ mit M (Modul) bezeichnet, ist ziemlich nebensächlich.

Da der gewöhnliche Logarithmus von 10 gleich Eins ist und auch für die gewöhnlichen Logarithmen die logarithmischen Rechenregeln

gelten, folgt sofort $\log(10^2) = 2$, $\log(10^3) = 3$ usw., allgemein $\log(10^n) = n$. Hier ist 10^n der Numerus, n der Logarithmus, also:

$$10^{\text{Gew. Logarithmus}} = \text{Numerus}.$$

Daß man sich außerdem im Aufschlagen der Logarithmen und Numeri in der Logarithmentafel die nötige Gewandtheit erwerben muß, ist selbstverständlich. —

Die ist alles, was man für immer im Gedächtnis haben muß! Alles andere folgt leicht daraus, z. B. daß $\log x$ positiv oder negativ ist, wenn x größer oder kleiner als Eins ist, ebenso, wie groß der Differentialquotient von $\log x$ ist. Da nämlich $\log x = M \ln x$ ist, ergibt sich sofort der Wert $M : x$.

Wir sind jetzt imstande, Funktionen zu differentiieren, in denen der natürliche Logarithmus vorkommt. Denn zu unseren bisher aufgestellten Differentiationsregeln (vgl. S. 84, 85, 127, 155) tritt hinzu die

8. Regel (Logarithmusregel): Der Differentialquotient von $\ln x$ ist $1 : x$.

Da der Differentialquotient von $\log x$ den nicht so einfachen Wert $M : x$ hat, wobei noch dazu der Modul M eine unbequeme Zahl ist, bevorzugt man bei allen mathematischen Betrachtungen den natürlichen Logarithmus so lange, als man keine Rechnungen mit bestimmten Zahlenwerten auszuführen hat. Will man dann zu Zahlenrechnungen übergehen, so setzt man schließlich überall $\log x : M$ statt $\ln x$ und benutzt die Logarithmentafel.

Man möge irgendein Buch physikalischer oder technischer Natur nachsehen. Man wird finden, daß darin bei den allgemeinen Formeln immer der natürliche Logarithmus auftritt. Allerdings wird er selten mit ln, meistens mit log bezeichnet, deutlicher auch gelegentlich mit log nat. Man hüte sich also vor Verwechslungen!

1. Beispiel: Soll $y = \ln(a + bx + cx^2)$ differentiiert werden, so setzt man:

$$y = \ln z, \qquad z = a + bx + cx^2.$$

Dann gibt die Kettenregel[1]:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\,\frac{dz}{dx} = \frac{d\ln z}{dz} \cdot \frac{d(a + bx + cx^2)}{dx} = \frac{b + 2cx}{z}$$

[1] Das in § 4 des 3. Kap. angegebene Schema für die Anwendung der Kettenregel ist nur für Anfänger. Man muß lernen, schneller nach der Kettenregel zu differentiieren.

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b + 2cx}{a + bx + cx^2}.$$

2. **Beispiel:** Soll $y = [\ln(a + \sqrt{x})]^n$ differentiiert werden, so setzt man:

$$y = z^n, \quad z = \ln t, \quad t = a + \sqrt{x}.$$

Nach der Kettenregel kommt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz^n}{dz} \cdot \frac{d\ln t}{dt} \cdot \frac{d(a + \sqrt{x})}{dx} = \frac{n z^{n-1}}{t \cdot 2\sqrt{x}},$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n[\ln(a + \sqrt{x})]^{n-1}}{2(a + \sqrt{x})\sqrt{x}}.$$

Besonders nützlich ist der Logarithmus für die Differentiation eines Produktes

(1) $$y = u_1 u_2 u_3 \ldots u_n,$$

wo $u_1, u_2, u_3 \ldots u_n$ Funktionen von x bedeuten sollen. Aus

$$\ln y = \ln u_1 + \ln u_2 + \ln u_3 + \cdots + \ln u_n$$

folgt:

(2) $$\frac{d\ln y}{dx} = \frac{d\ln u_1}{dx} + \frac{d\ln u_2}{dx} + \frac{d\ln u_3}{dx} + \cdots + \frac{d\ln u_n}{dx}.$$

Nach der Kettenregel aber ist, wenn $\ln y = z$ gesetzt wird:

$$\frac{d\ln y}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d\ln y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}.$$

Ebenso ist:

$$\frac{d\ln u_1}{dx} = \frac{1}{u_1}\frac{du_1}{dx}, \quad \frac{d\ln u_2}{dx} = \frac{1}{u_2}\frac{du_2}{dx}, \ldots$$

Mithin gibt (2):

(3) $$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u_1}\frac{du_1}{dx} + \frac{1}{u_2}\frac{du_2}{dx} + \frac{1}{u_3}\frac{du_3}{dx} + \cdots + \frac{1}{u_n}\frac{du_n}{dx}.$$

Multiplizieren wir diese Formel mit y oder $u_1 u_2 u_3 \ldots u_n$, so geht der gesuchte Differentialquotient $dy : dx$ hervor. Also gilt der

Satz 16: Der Differentialquotient eines Produktes, dividiert mit dem Produkt selbst, ergibt sich, indem man den Differentialquotienten jedes Faktors mit dem Faktor selbst dividiert und alle diese Brüche addiert, in Formel:

$$\frac{\dfrac{d(u_1 u_2 \ldots u_n)}{dx}}{u_1 u_2 \ldots u_n} = \frac{\dfrac{du_1}{dx}}{u_1} + \frac{\dfrac{du_2}{dx}}{u_2} + \cdots + \frac{\dfrac{du_n}{dx}}{u_n}.$$

Dies Verfahren heißt die logarithmische Differentiation. Man kann auch sagen:

Satz 17: Um den Differentialquotienten eines Produktes von beliebig vielen Faktoren zu finden, differentiiert man jeden Faktor für sich, multipliziert ihn mit allen übrigen Faktoren und bildet die Summe aller dieser Ausdrücke, in Formel:

$$\frac{d(u_1 u_2 \ldots u_n)}{dx} = \frac{du_1}{dx} u_2 u_3 \ldots u_n + u_1 \frac{du_2}{dx} u_3 \ldots u_n + \ldots + u_1 u_2 \ldots u_{n-1} \frac{du_n}{dx}.$$

3. Beispiel: Die Funktion

$$y = (a_1 + b_1 x)(a_2 + b_2 x)(a_3 + b_3 x)(a_4 + b_4 x)$$

soll differentiiert werden. Logarithmische Differentiation gibt:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{b_1}{a_1 + b_1 x} + \frac{b_2}{a_2 + b_2 x} + \frac{b_3}{a_3 + b_3 x} + \frac{b_4}{a_4 + b_4 x}$$

oder, wenn mit y multipliziert wird:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = {} & b_1 (a_2 + b_2 x)(a_3 + b_3 x)(a_4 + b_4 x) + \\ & + b_2 (a_1 + b_1 x)(a_3 + b_3 x)(a_4 + b_4 x) + \\ & + b_3 (a_1 + b_1 x)(a_2 + b_2 x)(a_4 + b_4 x) + \\ & + b_4 (a_1 + b_1 x)(a_2 + b_2 x)(a_3 + b_3 x).\end{aligned}$$

4. Beispiel: Gesucht wird der Differentialquotient von:

$$y = x^3 (1 + \sqrt{x}) \ln (1 - x).$$

Logarithmische Differentiation gibt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{3x^2}{x^3} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1 + \sqrt{x}} - \frac{\frac{1}{1-x}}{\ln(1-x)} \\ &= \frac{3}{x} + \frac{1}{2(\sqrt{x} + x)} - \frac{1}{(1-x)\ln(1-x)}.\end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 3x^2 (1 + \sqrt{x}) \ln(1-x) + \tfrac{1}{2}\frac{x^3}{\sqrt{x}} \ln(1-x) - \frac{x^3(1+\sqrt{x})}{1-x} \\ &= x^2 (3 + \tfrac{7}{2}\sqrt{x}) \ln(1-x) - \frac{x^3(1+\sqrt{x})}{1-x}.\end{aligned}$$

Siebentes Kapitel.

Die Exponentialfunktionen.

§ 1. Das Gesetz des organischen Wachsens.

Die Betrachtungen des vorigen Kapitels werden wesentlich vervollständigt durch das, was wir jetzt vortragen werden. Das sechste und siebente Kapitel gehören aufs engste zusammen.

Wir gehen von folgender Überlegung aus: Die Ursache die das Wachsen oder Abnehmen einer Größe bedingt, liegt manchmal gewissermaßen in ihrer eigenen Kraft. Ein organisches Wesen z. B. besteht aus lauter Zellen, und jede Zelle beteiligt sich an neuer Zellenbildung, wodurch der ganze Organismus wächst. Wenn so jedes neu gebildete Teilchen aus sich heraus immer wieder neue Teilchen erzeugt, liegt die Vermutung nahe, daß die Geschwindigkeit, mit der die Größe dieses Organismus wächst, proportional zur jeweils schon erreichten Größe ist. Dies wird ungefähr für den Holzbestand einer Waldung gelten, aber auch z. B. für die Bevölkerungszahl eines Landes. Denn je größer die Bevölkerungszahl ist, um so stärker wird sie sich vermehren. Auch in der anorganischen Natur treten ähnliche Erscheinungen auf. Wird z. B. ein Körper auf verschiedene Temperaturen erhitzt, so wird die Wärmemenge, die er, sich abkühlend, an die Umgebung abgibt, um so größer sein, je höher seine eigene Temperatur ist. Dieselbe Erscheinung tritt auf einem ganz anderen Gebiete, in der sogenannten politischen Arithmetik auf, d. h. in der mathematischen Theorie der Zinsrechnung: Ein Kapital trägt um so mehr Zinsen, wächst also um so mehr, je größer es ist. Nur einige Beispiele haben wir herausgegriffen, um auf die Wichtigkeit derjenigen Annahme hinzuweisen, die wir jetzt genau formulieren: Die Größe y soll eine Funktion von x sein, und die Geschwin-

digkeit, womit sie bei wachsendem x zunimmt, soll proportional zum schon jeweils für das betrachtete x erreichten Werte y sein. Nimmt x um dx und infolgedessen die abhängige Veränderliche y um dy zu, so ist (vgl. S. 70) der Differentialquotient $dy : dx$ das Maß dieser Geschwindigkeit, ganz gleichgültig, ob wir unter x die Zeit oder eine andere veränderliche Größe verstehen. Unsere Annahme ist mithin diese: y soll eine Funktion von x sein, deren Differentialquotient $dy : dx$ proportional zu dem Werte y selbst ist:

(1)
$$\frac{dy}{dx} = cy,$$

wo also c eine Konstante bedeute.

Da dieses Wachstumsgesetz, wie gesagt, namentlich bei organischen Größen vorkommt, nennen wir es das Gesetz des organischen Wachsens.

Die Aufgabe, diejenigen Funktionen y von x zu ermitteln, die der Bedingung (1) genügen, hat Ähnlichkeit mit der Aufgabe, die wir uns zu Anfang des vorigen Kapitels (S. 263) stellten. Hier wie dort ist y eine zunächst noch unbekannte Funktion von x, da hier wie dort vorerst nur ihr Differentialquotient vorliegt. Aber es besteht doch ein wesentlicher Unterschied. Damals war der Differentialquotient in der Form $1 : x$ gegeben, also ausgedrückt durch die unabhängige Veränderliche x. Jetzt aber ist der Differentialquotient in der Form (1) durch die uns noch unbekannte Funktion y selbst ausgedrückt. Die neue Aufgabe ist jedoch nicht schwieriger als die alte. Wir können sie auf drei Weisen in Angriff nehmen. Jeder Weg führt zu neuen Ergebnissen, und alle diese Ergebnisse zusammen werden dazu dienen, unsere Kenntnisse von Funktionen wesentlich zu vervollständigen.

Zunächst wollen wir die Aufgabe ein wenig vereinfachen, nämlich die Konstante c in (1) gleich Eins wählen, also die Frage aufwerfen:

Welche Funktionen y von x haben den Differentialquotienten

(2)
$$\frac{dy}{dx} = y,$$

mit anderen Worten: welche Funktionen stimmen mit ihren Differentialquotienten überein?

Der erste Weg, diese Frage zu beantworten, bietet sich naturgemäß so dar: Einer Funktion y von x, die den Differentialquotienten

(2) hat, kommt eine stetige Bildkurve zu, denn für jeden endlichen Wert von y ist nach (2) auch $dy : dx$ endlich, also wird mit dx auch dy unendlich klein, d. h. die unbekannte Funktion y ist überall da, wo sie endlich ist, auch stetig. Wenn nun P oder $(x; y)$ ein Punkt der Bildkurve ist, siehe Fig. 219, muß dort die Steigung ihrer Tangente nach (2) gleich $y : 1$ sein. Vom Fußpunkte Q der Ordinate $QP = y$ aus tragen wir daher die x-Einheit auf der x-Achse im negativen Sinne bis T ab und ziehen die Gerade TP. Sie ist die Tangente der Bildkurve in P. Da wir noch nicht wissen, wie die Bildkurve verläuft, werden wir für möglichst viele Punkte P die Gerade TP zeichnen, also an recht vielen Stellen P die Richtung angeben, der die Kurve folgen müßte, wenn sie durch den betreffenden Punkt hindurchginge. Wir gelangen so zum Bild einer Strömung, wie schon früher auf S. 214 u. f., 264, und entnehmen daraus, daß es unendlich viele derartige Funktionen y gibt.

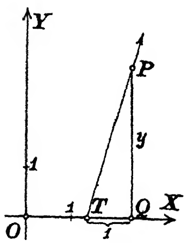


Fig. 219.

Eine Figur hierzu ist jedoch unnötig. Denn die Fig. 219 ist nichts anderes als die frühere Fig. 207, S. 263, mit dem einzigen Unterschiede, daß die x-Achse mit der y-Achse vertauscht ist. Das Strombild wird daher durch Fig. 208, S. 264, gegeben, wenn wir darin die x-Achse als y-Achse und die y-Achse als x-Achse bezeichnen. Anders gesagt: Die jetzt gesuchten Funktionen gehen aus den Funktionen

$$y = \ln \frac{x}{a},$$

bei denen die Konstante dasselbe Vorzeichen wie x hat, siehe S. 290, durch das Verfahren der Inversion (S. 151) hervor. Wir haben x mit y zu vertauschen, d. h. jetzt ist:

$$(3) \qquad x = \ln \frac{y}{a}.$$

Zum Numerus $y : a$ gehört also der natürliche Logarithmus x. Nach Satz 10, S. 287, ist aber x der natürliche Logarithmus von e^x. Daher kommt:

$$e^x = \frac{y}{a}$$

oder schließlich

$$(4) \qquad y = ae^x.$$

Weil y dasselbe Vorzeichen wie a hat, muß e^x positiv sein. Wir ver-

stehen daher unter e^x stets den **positiven** Wert der Potenz. Ist z. B. $x = \frac{1}{2}$, so soll e^x die positive Quadratwurzel aus e bedeuten.

Satz 1: Diejenigen Funktionen y von x, die mit ihren Differentialquotienten übereinstimmen, haben die Form

$$y = \text{konst.}\, e^x,$$

wo e^x den positiven Wert der Potenz bedeutet.

Insbesondere ist e^x selbst eine derartige Funktion. Also folgt:

Satz 2: Der Differentialquotient von e^x ist e^x, in Formel:

$$\frac{d e^x}{d x} = e^x.$$

Wir sind hier auf Funktionen gestoßen, die Potenzen mit veränderlichen Exponenten sind. Sie heißen ebenso wie a^x, x^x, $(\ln x)^x$, $a^{\sqrt{x}}$ usw. Exponentialfunktionen und unterscheiden sich durchaus von den in § 1 des 3. Kapitels betrachteten ganzen Funktionen wie z. B. x^n, wo der Exponent n konstant ist. Daher befolgen sie andere Differentiationsregeln, worauf wir schon gelegentlich (S. 161) hingewiesen haben. —

Wir schlagen jetzt einen zweiten Weg ein, um Funktionen zu finden, die mit ihren Differentialquotienten übereinstimmen.

Die Funktionen $1, x, x^2, x^3 \ldots$ haben die Differentialquotienten $0, 1, 2x, 3x^2 \ldots$ Daher haben die Funktionen

$$1, \quad \frac{x}{1}, \quad \frac{x^2}{1.2}, \quad \frac{x^3}{1.2.3}, \quad \frac{x^4}{1.2.3.4} \ldots$$

die Differentialquotienten:

$$0, \quad 1, \quad \frac{x}{1}, \quad \frac{x^2}{1.2}, \quad \frac{x^3}{1.2.3} \ldots$$

Die Funktion also, die ihre Summe bis zur n^{ten} Potenz ist und die wir vorläufig mit $f(x)$ bezeichnen wollen, nämlich:

$$(5) \qquad f(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots + \frac{x^n}{1.2 \ldots n},$$

hat einen Differentialquotienten, der geradeso aussieht mit einem Unterschiede: Der letzte Summand fehlt. Also ist:

$$(6) \qquad \frac{d f(x)}{d x} = f(x) - \frac{x^n}{1.2 \ldots n}.$$

Wir behaupten nun: Je größer wir die ganze positive Zahl n wählen, um so weniger weicht das rechts abzuziehende Glied

$$\frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots n}$$

von Null ab. In der Tat. Wie auch x gewählt sei, immer gibt es eine ganze positive Zahl m, die größer als der absolute Betrag von x ist. Wählen wir nun n noch größer als m, so können wir das in Rede stehende Glied so zerlegen:

(7) $$\frac{x^{m-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)} \cdot \frac{x^{n-m+1}}{m(m+1) \ldots n}.$$

Im zweiten Bruche stehen oben und unten je $n - m + 1$ Faktoren. Da $m+1, m+2, \ldots n$ größer als m sind, ist der absolute Betrag des zweiten Bruches kleiner als der des Bruches

$$\left(\frac{x}{m}\right)^{n-m+1},$$

und da der absolute Betrag von $x:m$ kleiner als Eins ist, kommt diese Potenz der Null um so näher, je größer n ist, während sich der erste Bruch in (7) nicht ändert, wenn wir n immer mehr wachsen lassen. Demnach gilt in der Tat der

Satz 3: Der Bruch

$$\frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n},$$

worin n eine ganze positive Zahl ist, strebt für $\lim n = +\infty$ stets nach Null, wie auch immer x gewählt werde.

Gehen wir nun zu (6) und (5) zurück, so folgt daraus:

Satz 4: Der Unterschied der Funktion

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$$

von ihrem Differentialquotienten kann dadurch, daß man die ganze positive Zahl n hinreichend groß wählt, so klein gemacht werden, wie man nur will.

Wenn wir nun n über jede Zahl wachsen lassen, strebt die Funktion nach dem Werte der unendlichen Reihe:

(8) $$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

Wir würden somit in dieser Reihe den Ausdruck einer Funktion vor uns haben, die mit ihrem Differentialquotienten übereinstimmt, wenn nicht noch ein Einwand zu machen wäre:

Unendliche Reihen erheischen eine besondere Behandlung, weil für sie diejenigen Gesetze, die in der Arithmetik für Summen bestehen,

nicht immer gelten, obgleich die unendlichen Reihen auch Summen sind. Wir wollen dies näher begründen, machen also hier eine kleine Abschweifung von unserer eigentlichen Betrachtung:

In der Arithmetik gilt das Gesetz: Haben die Glieder einer Summe endliche Werte, so hat auch die Summe einen endlichen Wert. Daß dies nicht für Summen von unendlichvielen Gliedern zu gelten braucht, auch wenn die Werte der Glieder sich mehr und mehr der Null nähern, zeigt das Beispiel:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots,$$

d. h. die Summe aller sogenannten Stammbrüche. Denn es ist

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{2}{4} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{4}{8} \quad \text{oder} \ \frac{1}{2}$$

Ebenso ist die Summe der nächsten 8 Glieder größer als $\frac{1}{2}$, dann die der nächsten 16 Glieder usw. Also hat die unendliche Reihe die Summe ∞.

Ferner können Summen von unendlichvielen Gliedern überhaupt keinen bestimmten Wert haben. Ein Beispiel bietet die Reihe

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

Der Leser möge selbst über ihre vermeintliche Summe nachgrübeln.

In der Arithmetik gilt ferner der Satz, daß eine Summe ihren Wert bei anderer Anordnung der Glieder nicht ändert, da $a + b = b + a$ ist. Auch dies gilt nicht immer für unendliche Reihen. Ein Beispiel ist dies:

$$(9) \qquad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots,$$

also die Reihe aller Stammbrüche, aber mit abwechselnden Vorzeichen. Wenn man nämlich in der Reihenfolge, wie die Glieder hier vorliegen, nach und nach addiert und subtrahiert, überzeugt man sich leicht davon, daß die Summe kleiner als Eins, aber positiv ausfällt. Nebenbei bemerkt, kann man beweisen, daß sie gleich ln 2 oder 0,693 . . . ist[1]. Wenn man nun dieselbe Reihe so anordnet:

$$(10) \quad 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} + \cdots,$$

[1] Dies würde allerdings aus Satz 3, S. 278, für $x = 1$ folgen, aber das ist kein Beweis, weil x in diesem Satz auf Werte zwischen -1 und $+1$ beschränkt wurde.

also immer zwei positive Glieder nimmt und darauf ein negatives folgen läßt und zwar so, wie die Reihe (9) es nach und nach gibt, enthält (10) genau dieselben Glieder wie (19). Aber die Summe, in der Anordnung (10) berechnet, gibt einen anderen Wert als vorher, nämlich das $\frac{3}{2}$-fache (also $\frac{3}{2} \ln 2$). Wir wollen den Beweis hierfür nur in der Anmerkung[1] andeuten, um nicht zu weit von unserer eigentlichen Aufgabe abzuschweifen.

In der Arithmetik werden die Gesetze für Summen immer unter der stillschweigenden Voraussetzung bewiesen, daß die Anzahl der Summanden endlich sei, und das Vorhergehende zeigt, daß sie für Summen von unendlich vielen Gliedern nicht zu gelten brauchen. Deshalb darf man nicht ohne weiteres glauben, daß die oben aufgestellte Summe (8) für irgendein bestimmtes x einen bestimmten endlichen Wert habe, vielmehr muß man das erst noch beweisen. Wäre es nicht der Fall, so wäre ja die in Satz 4 aufgestellte Funktion nicht bestimmt. Nun wird sich aber der Leser vielleicht fragen, warum wir denn bei den unendlichen Reihen in § 2 des vorigen Kapitels alle diese Bedenken gegenüber unendlichen Reihen nicht geäußert haben. Das liegt an Folgendem: Damals stand, bevor unendliche Reihen vorkamen, fest, daß $\ln x$ für positives x eine überall stetige Funktion ist (vgl. Satz 1, S. 268), und dann ergab sich, daß $\ln(1+x)$ gleich der unendlichen Reihe in Satz 3, S. 278, für $-1 < x < +1$ sein muß. Mithin folgt: Damals war es von vornherein sicher, daß die unendliche Reihe für $-1 < x < +1$ eine stetige Funktion darstellt.

Anders liegt die Sache jetzt. Wir müssen noch dartun, daß die unendliche Reihe (8) für jedes endliche x einen bestimmten endlichen Wert hat. Zu diesem Zwecke brechen wir die Reihe nach dem mit x^n behafteten Glied ab; wir bilden also die Summe

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}, \tag{11}$$

indem wir unter n eine bestimmt gewählte ganze positive Zahl verstehen. Von dieser Summe, die eine endliche Anzahl von Gliedern hat, wissen wir, daß sie eine stetige Funktion für alle Werte von x ist, denn sie ist

[1] Wenn man die Summe der n ersten Glieder von (9) mit a_n und die Summe der n ersten Glieder von (10) mit b_n bezeichnet, ist nämlich stets

$$b_{3n} = a_{4n} + \tfrac{1}{2} a_{2n}.$$

Für $\lim n = +\infty$ folgt also:

$$b_\infty = a_\infty + \tfrac{1}{2} a_\infty = \tfrac{3}{2} a_\infty .$$

eine ganze Funktion von x (vgl. Satz 1, S. 90). Aber die Summe (11) ist noch nicht die unendliche Reihe (8). Vielmehr treten noch unzählig viele Glieder hinzu. Wenn man eine beliebige Anzahl von folgenden Gliedern, etwa m Glieder

$$(12) \qquad \frac{x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} + \frac{x^{n+2}}{1.2\ldots(n+2)} + \cdots + \frac{x^{n+m}}{1.2\ldots(n+m)},$$

hinzufügt, entsteht ein Wert, der von dem der Summe (11) abweicht. Man muß nun zeigen: Hat man n hinreichend groß gewählt, so wird diese Abweichung so gering, wie man nur vorschreiben mag. Man muß also zeigen, daß die Summe (12), deren Gliederzahl m beliebig ist, nach Null strebt, falls n nach $+\infty$ strebt. Das aber sieht man so ein:

Der absolute Betrag einer Summe ist nach Satz 8, S. 59, nicht größer als die Summe der absoluten Beträge aller einzelnen Glieder. Daher ist der absolute Betrag der Summe (12) nicht größer als

$$\frac{|x|^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} + \frac{|x|^{n+2}}{1.2\ldots(n+2)} + \cdots + \frac{|x|^{n+m}}{1.2\ldots(n+m)}$$

oder:

$$\frac{|x|^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}\left[1 + \frac{|x|}{n+2} + \frac{|x|^2}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{|x|^{n+m}}{(n+2)(n+3)\ldots(n+m)}\right].$$

Ersetzt man die Nennerfaktoren $n+3, \ldots n+m$ sämtlich durch die kleinere Zahl $n+2$, so wird der Wert größer. Daher ist der absolute Betrag der Summe (12) erst recht kleiner als

$$\frac{|x|^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}\left[1 + \frac{|x|}{n+2} + \left(\frac{|x|}{n+2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{|x|}{n+2}\right)^{m-1}\right].$$

Die in den eckigen Klammern stehende Summe hat m positive Glieder. Sie ist kleiner als die Summe von unendlich vielen positiven Gliedern:

$$1 + \frac{|x|}{n+2} + \left(\frac{|x|}{n+2}\right)^2 + \cdots.$$

Wählt man nun $n+2$ größer als $|x|$, so kann man auf diese unendliche Reihe den Satz 2, S. 274, anwenden, indem man darin x durch

$$-\frac{|x|}{n+2}$$

ersetzt. Also ist die in den eckigen Klammern stehende Summe kleiner als

$$\frac{1}{1 - \frac{|x|}{n+2}},$$

somit der absolute Betrag der Summe (12) kleiner als:

$$\frac{|x|^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{|x|}{n+2}}.$$

Wählt man n hinreichend groß, so weicht der erste Faktor dieses Produktes nach Satz 3 beliebig wenig von Null ab, während der zweite für $\lim n = +\infty$ nach Eins strebt, so daß der ganze Ausdruck für $\lim n = +\infty$ nach Null strebt. Damit ist der Beweis geliefert.

Statt des Satzes 4 können wir also den folgenden aussprechen, der mehr besagt:

Satz 5: Die unendliche Reihe

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots$$

stellt eine stetige Funktion dar, die mit ihrem eigenen Differentialquotienten übereinstimmt, und zwar für jeden Wert von x. Bricht man die Reihe nach dem Gliede mit der n-ten Potenz von x ab, so ist der absolute Betrag des vernachlässigten Restes kleiner als

$$\frac{|x|^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{|x|}{n+2}},$$

vorausgesetzt, daß n größer als $|x| - 2$ gewählt wird. Der Rest strebt für $\lim n = +\infty$ nach Null.

Jetzt verknüpfen wir dies Ergebnis mit dem auf dem ersten Wege gewonnenen. In Satz 1 sahen wir, daß jede Funktion, die ihrem eigenen Differentialquotienten gleich ist, die Form konst. e^x hat. Unsere Reihe muß daher auch diese Form haben. Es fragt sich nur, wie groß die Konstante ist. Wir machen deshalb die Probe für $x = 0$. Die Reihe ist dann gleich Eins, dagegen konst. e^x gleich der Konstante, weil $e^0 = 1$ ist. Also ist die Konstante gleich Eins. Damit sind wir zu dem wichtigen Satz gekommen:

Satz 6: Für jedes x ist e^x die stetige Funktion:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots$$

und zwar ist dabei e^x der positive Wert der Potenz.

Aus der Bildkurve der Funktion $y = \ln x$ geht nach S. 312 die der Funktion $y = e^x$ hervor, wenn man die Abszissen x mit den Ordinaten y vertauscht. In Fig. 213, S. 284, war die x-Einheit gleich der y-Einheit gewählt worden. Deshalb kann man die Vertauschung dadurch bewirken, daß man die Zeichnung um die den Winkel der positiven x- und y-Achse hälftende Gerade herumklappt. Dann zeigt sich, daß die Bildkurve der Funktion e^x beständig steigt, also im zweiten und ersten Quadranten verläuft, indem sie sich der negativen x-Achse im Unendlichfernen anschmiegt, an der Stelle $y = 1$ die y-Achse schneidet und für $\lim x = +\infty$ auch $\lim y = +\infty$ wird, siehe Fig. 220.

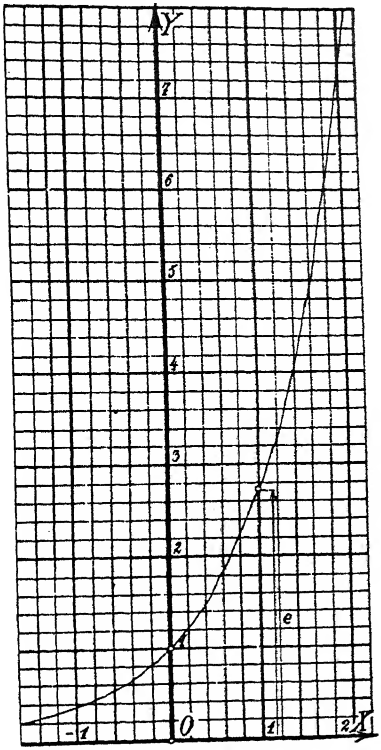


Fig. 220.

Wir wollen jetzt zu der allgemeineren Frage (S. 311) zurückkehren, welche Funktionen y die Eigenschaft haben, zu ihren eigenen Differentialquotienten proportional zu sein:

(13) $$\frac{dy}{dx} = cy.$$

Da e^x nach Satz 2 den Differentialquotienten e^x hat, lehrt die Kettenregel, daß der Funktion e^{cx} der Differentialquotient ce^{cx} zukommt. Denn wenn man $u = e^{cx}$ und $z = cx$ setzt, hat man

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{de^z}{dz} \cdot c = e^z \cdot c = cu.$$

Mithin hat die Funktion $u = e^{cx}$ diejenige Eigenschaft, die in (13) der Funktion y auferlegt wird. Wir wollen nun den Differentialquotienten des Bruches $y : u$ bilden. Die Bruchregel gibt:

$$\frac{d\left(\frac{y}{u}\right)}{dx} = \frac{u \cdot \frac{dy}{dx} - y \cdot \frac{du}{dx}}{u^2},$$

also, da $dy : dx = cy$ nach (13) sein soll und da $du : dx = cu$ ist:

$$\frac{d\left(\frac{y}{u}\right)}{dx} = \frac{ucy - ycu}{u^2} = 0\,,$$

d. h. $\frac{y}{u}$ ist eine Konstante a, daher $y = au$ oder wegen $u = e^{cx}$:

$$y = ae^{cx}.$$

Dies liefert den

Satz 7: Jede Funktion y von x, deren Differentialquotient gleich dem c-fachen der Funktion ist, für die also

$$\frac{dy}{dx} = cy$$

ist, wo c eine Konstante bedeutet, hat die Form:

$$y = \text{konst.}\, e^{cx}.$$

Dabei bedeutet e^{cx} den positiven Wert der Potenz.

Jetzt beschreiten wir einen dritten Weg, um diese Funktionen zu finden. Wir bemerkten auf S. 310, daß auch die Zinseszinsrechnung zum Gesetze des organischen Wachsens führen wird. Der Prozentsatz der Verzinsung sei p, so daß 100 Mark in einem Jahre p Mark Zinsen tragen, daher a Mark im Jahr $pa : 100$ Mark. Mit x sei die Zahl der Jahre vom Beginne der Verzinsung an bezeichnet. Nach einem Jahre, für $x = 1$ also, ist ein ursprüngliches Kapital von a Mark angewachsen auf:

$$a + \frac{p}{100}\,a \quad \text{oder} \quad a\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Wenn die Zinsen weiterhin mitverzinst werden, wiederholt sich im zweiten Jahre derselbe Vorgang. Nur ist für dieses zweite Jahr das Anfangskapital nicht a, sondern der soeben berechnete Wert. Kapital, Zins und Zinseszins sind also zur Zeit $x = 2$ zusammen gleich:

$$a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

In x Jahren ergibt sich entsprechend:

$$y = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^x. \tag{14}$$

Die Vermehrung des Kapitals geschieht nicht stetig, sondern schrittweise Jahr für Jahr; also ist der Zeitzuwachs $\Delta x = 1$. In diesem Zuwachs von x Jahren bis zu $x + 1$ Jahren wächst das Kapital, das schon

den Wert y erreicht hat, um seine Jahreszinsen Δy. Sie sind gleich $py : 100$. Daher ist:

$$\Delta x = 1, \quad \Delta y = \frac{p}{100} y, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{p}{100} y.$$

Also ist der Differenzenquotient von y (nicht der Differentialquotient) zu y proportional.

Das Jahr werde nun in m gleiche Teile geteilt, und wir wollen annehmen, daß die in jedem Teile des Jahres (z. B. in jedem Monat, wenn $m = 12$ ist) erwachsenen Zinsen stets am Schlusse des Abschnittes zum Kapital geschlagen und also im nächsten Teile des Jahres mitverzinst werden. Jetzt haben wir in x Jahren mx Zinstermine. Aber statt des auf das ganze Jahr bezüglichen Prozentsatzes p müssen wir für jeden Abschnitt nur noch $p : m$ setzen. Statt (14) ergibt sich demnach als Kapital y nach x Jahren:

$$y = a\left(1 + \frac{p}{100\,m}\right)^{mx} \tag{15}$$

Bis zum folgenden Termin wächst die Zahl x der Jahre um $1 : m$ und das Kapital y um $py : 100\,m$. Also ist hier:

$$\Delta x = \frac{1}{m}, \quad \Delta y = \frac{p}{100\,m} y, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{p}{100} y. \tag{16}$$

Wie vorhin bei Jahresterminen ist somit der Differenzenquotient (nicht Differentialquotient) von y proportional zu y, und zwar das $p : 100$ fache von y.

Jetzt stellen wir uns einen Fall vor, der im Bereiche der Geldgeschäfte nicht vorkommt: Die Anzahl m werde unendlich groß, d. h. nach jedem unendlich kleinen Zeitteilchen sollen die in diesem Teilchen erwachsenen Zinsen zum Kapital geschlagen werden. Alsdann wird aus Δx ein unendlich kleiner Zeitzuwachs, ein Differential dx. Das schon gewordene Kapital y wächst in diesem Zeitteilchen um sein Differential dy. Wir haben also jetzt statt (15) und (16)

$$\left\{\begin{aligned} y &= a \lim\left(1 + \frac{p}{100\,m}\right)^{mx} \text{ für } \lim m = +\infty, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{p}{100} y. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Die Größe y, das in x Jahren erwachsene Kapital, ist daher eine Funktion von x, deren Differentialquotient proportional zu y selbst ist. Nach Satz 7 muß diese Funktion die Form konst. e^{cx} haben. Da sie für $x = 0$ den Wert a hat und da

konst. e^{cx} für $x=0$ den Wert konst. hat, ist sie insbesondere von der Form:

$$y = a e^{cx}. \tag{18}$$

Was die Konstante c betrifft, so ist nach Satz 7 der Differentialquotient gleich cy, nach (17) gleich $py:100$. Mithin kommt:

$$c = \frac{p}{100}. \tag{19}$$

Wir können nun die in (17) angegebene Gestalt von y der Gestalt (18) näherbringen, indem wir

$$\frac{100\,m}{p} = n, \quad \text{also} \quad m = \frac{p}{100}\,n \tag{20}$$

setzen. Denn dann ist

$$\left(1+\frac{p}{100\,m}\right)^{mx} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{p}{100}nx} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{p}{100}x}.$$

Nach (20) ist $\lim n = +\infty$, wenn $\lim m = +\infty$ ist. Also gibt (17):

$$y = a \lim \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{p}{100}x} \quad \text{für } \lim n = +\infty,$$

während nach (18) und (19) sein muß:

$$y = a\,e^{\frac{p}{100}x}. \tag{21}$$

Mithin ist:

$$e^{\frac{p}{100}x} = \lim \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{p}{100}x} \quad \text{für } \lim n = +\infty.$$

Da dies für alle Werte der Konstanten p und der Veränderlichen x gelten muß, ergibt sich für $p=100$ und $x=1$ die **wichtige neue Formel**:

$$e = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{für } \lim n = +\infty. \tag{22}$$

Mit dieser Formel haben wir für die Zahl e, die auf S. 287 als derjenige Numerus definiert wurde, dessen natürlicher Logarithmus gleich Eins ist, eine **von den Logarithmen unabhängige Darstellung durch einen Grenzwert** gefunden:

Satz 8: Die Zahl e ist der Grenzwert der positiven Potenz

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{für } \lim n = +\infty.$$

Außerdem hat sich ergeben:

Satz 9: Hat ein Kapital den Anfangswert a und wächst es nach dem Zinseszinsgesetz um p Prozent jährlich, doch so, daß die in jedem unendlich kleinen Zeitteilchen dx gewordenen Zinsen sofort nach ihrer Entstehung zum Kapital geschlagen und nach demselben Gesetze mitverzinst werden, so erreicht das Kapital in x Jahren den Wert:

$$y = a\,e^{\frac{p}{100}x}$$

Sehen wir von der Deutung der abhängigen Veränderlichen y als Kapital und der unabhängigen Veränderlichen x als Zeit völlig ab, so liegt wieder das Gesetz des organischen Wachsens vor. Wenn wir wie in (19) die Konstante $p:100$ mit c bezeichnen, können wir se so aussprechen:

Satz 10: Wächst eine Größe y als Funktion von x nach dem Gesetze des organischen Wachsens, indem ihr Differentialquotient stets das c-fache ihres gerade erreichten Wertes y ist:

$$\frac{dy}{dx} = cy,$$

wo c eine Konstante bedeutet, und hat sie für $x = 0$ den Anfangswert a, so ist sie die Funktion:

$$y = ae^{cx}.$$

Sie wächst nach dem Zinseszinsgesetze für unendlich kurze Intervalle von x mit dem

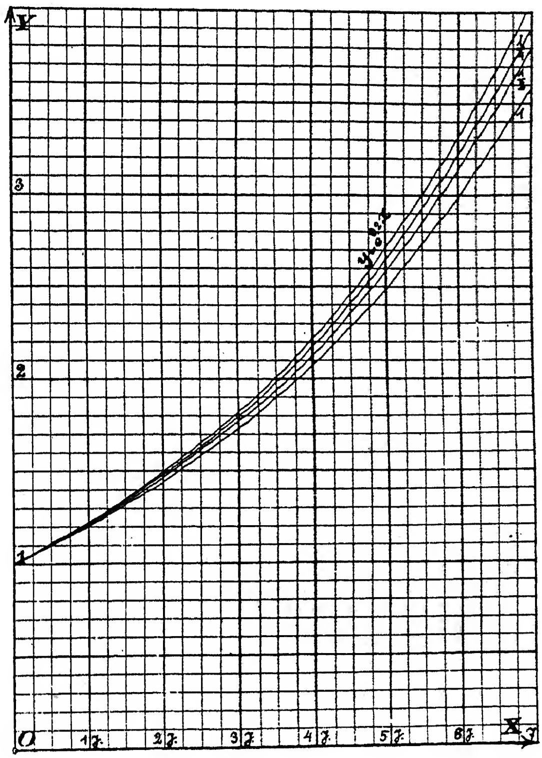


Fig. 221.

Prozentsatze $p = 100\,c$, berechnet für das Intervall Eins von x.

In Fig. 221 wird der bei der Zinseszinsrechnung verfolgte Weg in seinen ersten Schritten und im Schlußergebnis von $x = 0$ bis $x = 7$ veranschaulicht. Dabei ist der Anfangswert $a = 1$, der Prozentsatz $p = 20$, also $c = 0{,}2$. Die unteren drei Linien sind gebrochen. Die unterste, die sich auf Jahrestermine ($\Delta x = 1$) bezieht, verbindet die Punkte, die sich für $x = 0, 1, 2 \ldots$ ergeben, die nächste, die sich auf halbjährige Termine ($\Delta x = \frac{1}{2}$) bezieht, verbindet die Punkte, die sich für $x = 0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2} \ldots$ ergeben. Die dritte bezieht sich auf vierteljährige Termine ($\Delta x = \frac{1}{4}$). Die oberste Linie endlich ist die Bildkurve der Funktion $y = e^{0{,}2x}$.

§ 2. Exponentialfunktionen und Exponentialkurven.

Wir fassen zusammen, was man aus dem vorhergehenden Paragraphen behalten muß: Die Hauptsache ist, daß e^x den Differentialquotienten e^x hat, und daß man e^x für jedes x als die unendliche Reihe darstellen kann:

$$(1) \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots$$

Übrigens nennt man das Produkt der n ersten ganzen Zahlen $1.2.3 \ldots n$ auch n-Fakultät, geschrieben $n!$, so daß man statt (1) schreiben kann:

$$(2) \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Daß e^{cx} den Differentialquotienten $c\,e^{cx}$ hat, wenn c eine Konstante bedeutet, rechnet man im Kopfe nach der Kettenregel aus. Auch zeigt die Faktorregel sofort, daß konst. e^{cx} den Differentialquotienten c . konst. e^{cx} hat. Demnach sind alle Funktionen konst. e^{cx} zu ihren Differentialquotienten proportional. Man hat sich nur noch zu merken, daß es sonst keine derartigen Funktionen gibt.

Mittels (1) oder (2) kann man die Zahl e berechnen. Aus (2) folgt nämlich für $x = 1$:

$$(3) \qquad e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

Brechen wir die Reihe nach $1 : 10!$ ab, so gibt die Ausrechnung auf acht Dezimalstellen:

$$1 + \frac{1}{1!} = 2 \qquad \frac{1}{6!} = 0{,}001\,388\,8\overline{9}$$

$$\frac{1}{2!} = 0{,}5 \qquad \frac{1}{7!} = 0{,}000\,198\,41$$

$$\frac{1}{3!} = 0{,}166\,666\,6\overline{7} \qquad \frac{1}{8!} = 0{,}000\,024\,80$$

$$\frac{1}{4!} = 0{,}041\,666\,6\overline{7} \qquad \frac{1}{9!} = 0{,}000\,002\,7\overline{6}$$

$$\frac{1}{5!} = 0{,}008\,333\,33 \qquad \frac{1}{10!} = 0{,}000\,000\,2\overline{8}$$

Demnach liegt die Summe der 11 ersten Glieder der Reihe zwischen 2,718 281 785 und 2,718 281 825. Der vernachlässigte Rest ist positiv und nach Satz 5, S. 318, kleiner als

$$\frac{1}{11!} \quad \frac{1}{1 - \frac{1}{12}} = \frac{12}{11!\,11} < 0{,}000\,000\,028 \; .$$

Mithin liegt e zwischen 2,718 281 785 und 2,718 281 853. Beide Werte geben auf sechs Dezimalstellen abgerundet dasselbe; also ist abgerundet

$$e = 2{,}718\,28\overline{2} \; .$$

Man kann die Formel (1) oder (2) auch benutzen, um zu einem gegebenen natürlichen Logarithmus den Numerus zu berechnen. Denn wenn x ein gegebener Logarithmus ist, bedeutet e^x nach Satz 10, S. 287, den zugehörigen Numerus.

Zu den früheren acht Differentiationsregeln fügen wir jetzt eine neunte Regel darüber hinzu, wie man eine Exponentialfunktion differentiiert. Eine Funktion y, die durch eine Potenz u^v dargestellt ist, wird, je nachdem der Exponent v konstant oder veränderlich ist, in verschiedener Weise differentiiert. Ist der Exponent v konstant, also etwa gleich n, während die Basis u eine Funktion von x ist, so hat man nach der Kettenregel

$$(4) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{du^n}{du} \cdot \frac{du}{dx} = n\,u^{n-1} \cdot \frac{du}{dx} \; .$$

Hier also benutzt man die Potenzregel, um u^n zu differentiieren. Wenn dagegen der Exponent v in $y = u^v$ nicht konstant ist, darf man das nicht tun. Man kann aber jede derartige Funktion in eine Potenz mit der Basis e verwandeln. Denn nach Satz 11, S. 288, ist $u = e^{\ln u}$, also

$$y = u^v = (e^{\ln u})^v = e^{v \ln u} \; .$$

Nun läßt sich wieder die Kettenregel anwenden. Man setzt an:

$$y = e^z, \quad z = v \ln u$$

und bekommt nach Satz 2, S. 313. und nach der Produktregel:

$$\frac{dy}{dz} = e^z, \quad \frac{dz}{dx} = \ln u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{d \ln u}{dx},$$

also:

$$\frac{dy}{dx} = e^z \left(\ln u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{d \ln u}{dx} \right).$$

Der hierin noch vorkommende Differentialquotient von $\ln u$ wird nach der Kettenregel und Logarithmusregel berechnet:

$$\frac{d \ln u}{dx} = \frac{d \ln u}{du} \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}.$$

Demnach ist

$$\frac{dy}{dx} = e^z \left(\ln u \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{v}{u} \frac{du}{dx} \right).$$

Weil $y = e^z = u^v$ ist, hat man also:

$$(5) \qquad \frac{d(u^v)}{dx} = u^v \left(\ln u \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{v}{u} \frac{du}{dx} \right).$$

Man kann also u^v differentieren, sobald man die Differentialquotienten von u und v kennt. Wenn der Exponent v bloß eine Konstante n ist, kommt diese Formel wegen $dv : dx = 0$ auf die Formel (4) zurück.

Die umständliche Formel (5) braucht man sich aber nicht zu merken. Vollkommen reicht es aus, sich bloß den Weg zu merken, auf dem man sie findet, nämlich so:

9. Regel (Exponentialregel): Um eine Potenz u^v mit veränderlichem Exponenten v nach der Kettenregel zu differentieren, verwandelt man sie zunächst in eine Potenz mit der Basis e, indem man u durch $e^{\ln u}$ ersetzt, und benutzt dann den Umstand, daß der Differentialquotient von e^x gleich e^x selbst ist.

Hierbei ist noch auf einen wichtigen Umstand hinzuweisen: Weil $\ln u$ nur für positive Numeri u vorhanden ist, beschränken wir uns stets auf Exponentialfunktionen u^v, deren Basis u positiv ist. Damit steht im Einklange, daß Exponentialfunktionen mit negativer Basis überhaupt nicht in einem Intervalle von endlicher Länge reell sind. Dies zeigt schon das einfache Beispiel $(-1)^x$. Wenn nämlich hier für x irgendein nicht weiter zu kürzender Bruch $m : n$ aus zwei ganzen Zahlen gewählt wird, ergibt sich die m-te Potenz der n-ten

Wurzel aus -1, und diese n-te Wurzel aus -1 ist imaginär, sobald n eine gerade Zahl ist. Man macht sich nun leicht klar, daß es neben jedem Bruche $m:n$ mit geradzahligem Nenner n in beliebig enger Nähe einen ebensolchen Bruch gibt. Mithin gibt es kein endliches Intervall von x, in dem $(-1)^x$ überall reelle Werte hätte.

Der Differentialquotient (5) zeigt, daß zu einem unendlich kleinen Zuwachs dx von x ein unendlich kleiner Zuwachs dy von $y = u^v$ gehört, sobald u und v selbst stetige Funktionen von x sind. Also:

Satz 11: Sind u und v Funktionen von x, so ist die Exponentialfunktion u^v stetig in einem Intervall, in dem u und v stetig sind und u überall positiv ist.

Ebenso wie e^x stets den positiven Wert der Potenz bedeuten soll (S. 313), soll auch stets unter u^v der positive Wert der Potenz verstanden werden.

1. Beispiel: Man zeige, daß $y = a^x$ den Differentialquotienten $a^x \ln a$ hat.

2. Beispiel: Die Exponentialregel gibt, angewandt auf $y = x^x$:

$$y = e^{x \ln x}.$$

Nach der Kettenregel setzen wir $y = e^z$ und $z = x \ln x$ und erhalten:

$$\frac{dy}{dx} = e^z(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1).$$

Wir wollen die Bildkurve der Funktion x^x untersuchen. Da die Basis x sowie die Potenz $y = x^x$ positiv anzunehmen sind, verläuft die Kurve nur im ersten Quadranten. Da $\ln x < -1$ ist für $x < 1:e$, fällt die Kurve nach Satz 7, S. 104, von $x = 0$ bis $x = 1:e$. Hier ist $\log x = -M = -0{,}4343 = 0{,}5657 - 1$, also $x = 0{,}3679$. Von diesem x an steigt die Kurve. Ihre tiefste Stelle hat folglich die Höhe $y = 0{,}69$, die sich aus $\ln y = x \ln x$ für $x = 1:e$ ergibt. Für $x = 1$ ist $y = 1$ und auch die Steigung gleich Eins, für $x = 2$ ist $y = 4$, für $x = 3$ ist $y = 27$ usw. Die Kurve wird weiterhin außerordentlich steil. Siehe Fig. 222. Wir untersuchen die Annäherung der Kurve an die y-Achse. Wenn x sehr klein ist, liegt y sehr nahe bei 0^0. Aber wir geraten hier in eine Schwierigkeit. Da nämlich $a^0 = 1$ und $0^a = 0$ ist, geben beide Formeln für $a = 0$ verschiedene Werte, woraus wir folgern, daß 0^0 verschiedene Werte haben kann, je nach der Art, wie wir uns diesem Grenzwerte nähern. Wir haben zu untersuchen, was aus $y = x^x$ wird, wenn x^x von positiven Werten

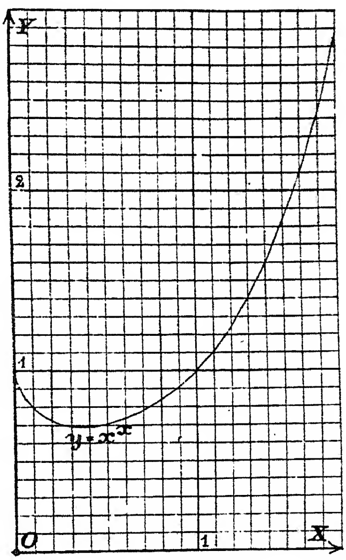


Fig. 222.

nach Null strebt. Nehmen wir $x = 1 : 10^n$ an, wo n recht groß positiv sei, so daß x sehr klein ausfällt, so ist $\log y = -n : 10^n$. Wird n immer größer, so strebt dieser Wert nach Null, d. h. der Grenzwert von $y = x^x$ für $\lim x = 0$ hat den Logarithmus 0, ist also selbst gleich Eins. Die Steigung wird für $x = 0$ gleich $-\infty$, d. h. die Kurve berührt die y-Achse an der Stelle $(0; 1)$.

3. Beispiel: Um die Funktion

$$y = \sqrt[x]{x^{\sqrt{x}}}$$

zu differentiieren, verwandeln wir sie zuerst in eine Potenz von x:

$$y = \left(x^{\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{x}} = x^{\frac{1}{\sqrt{x}}},$$

dann nach der Exponentialregel in eine Potenz von e:

$$y = e^{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}}$$

Jetzt gibt die Kettenregel, wenn $\ln x : \sqrt{x}$ als Zwischenfunktion eingeführt wird:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[x]{x^{\sqrt{x}}}\,\frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}.$$

Funktionen wie die im 2. und 3. Beispiele kommen kaum bei Anwendungen vor; sie sollen nur zur Einübung der Exponentialregel dienen. Dagegen spielen die im vorigen Paragraphen gefundenen Exponentialfunktionen von der Form ae^{cx} in den Anwendungen sehr oft ein und zwar deshalb, weil es diejenigen Funktionen sind, die sich von ihren Differentialquotienten cae^{cx} nur um konstante Faktoren c unterscheiden. Hierfür geben wir in der Folge mehrere Beispiele. Um dabei keine Schwierigkeiten zu haben, erinnern wir vorweg an den Satz 4, S. 228. Nach ihm darf man nämlich, wenn eine Funktion y von x den Differentialquotienten $f(x)$ hat, mit anderen Worten, wenn

$$y = \int_a^x f(x)\,dx$$

ist, die Funktion y als eine Summe von unendlich vielen unendlich kleinen Zunahmen $f(x)dx$ betrachten. Dies bedeutet: Solange x nur um dx wächst, darf man die Funktion y als unveränderlich auffassen, indem erst nach vollendetem Zuwachs des x um dx die Größe y weiterhin um $f(x)dx$ zunimmt. Von diesem Umstande macht man häufig Gebrauch.

4. Beispiel: Ein durchsichtiges Mittel von homogener Beschaffenheit sie durch zwei parallele Ebenen begrenzt, z. B. eine dicke Glasplatte. Trifft ein

Lichtbündel auf die Vorderfläche senkrecht auf, so daß es nicht gebrochen wird, und hat es beim Eintritte die Stärke J_0, so wird ein Teil des Lichtes auf seinem Wege durch die Platte verschluckt, so daß das Bündel mit verminderter Stärke J_1 auf der Rückseite austritt. Die Beobachtung lehrt, daß J_1 ein und derselbe Bruchteil von J_0 ist, wie groß auch J_0 gewählt sein mag. Aber die Abnahme der Lichtstärke auf dem Wege geschieht nicht einfach proportional zum Wege, wie man durch die folgende Überlegung erkennt. Die Platte von der Dicke p denken wir uns durch unendlich dichte Ebenen parallel zu den Grenzebenen in lauter unendlich schmale Platten von der Dicke δ zerlegt, siehe Fig. 223. Jede von ihnen wird unendlich wenig Licht verschlucken, und zwar etwa das ε-fache der noch vorhandenen Lichtmenge. Dabei ist ε unendlich klein. Nun habe das Licht schon einen Weg x ($< p$) innerhalb des Mittels zurückgelegt. Die Lichtstärke sei dabei vom Anfangswerte J_0 auf einen Wert y gesunken, den wir noch nicht kennen, der aber eine gewisse Funktion von x ist. Setzen wir den Weg durch die nächste Platte, also um $dx = \delta$ fort, so nimmt y um die negative Größe $dy = -\varepsilon y$ zu. Hieraus folgt:

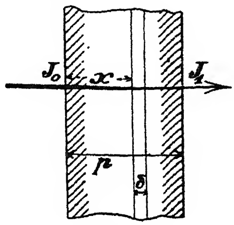


Fig. 223.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varepsilon}{\delta} y .$$

Da ε und δ nach Null streben, ist $\varepsilon : \delta$ der Grenzwert eines Bruches. Wir nehmen an, das Mittel sei so beschaffen, daß dieser Grenzwert, der Absorptionskoeffizient, bestimmt und endlich, etwa gleich c sei. Dann ist:

$$\frac{dy}{dx} = -cy ,$$

woraus nach Satz 7 folgt, wenn a eine Konstante bedeutet:

$$y = a e^{-cx} .$$

Für $x = 0$ wird $y = a$; dann soll aber y gleich J_0 sein. Also ist $a = J_0$ und

$$y = J_0 e^{-cx} .$$

Beim Austritt aus der Platte, für $x = p$, ist hiernach die Lichtstärke:

(6) $$J_1 = J_0 e^{-cp} .$$

Der Absorptionskoeffizient c ist maßgebend für die Lichtdurchlässigkeit und unabhängig von der Plattendicke. Nach (6) kann man ihn mittels der Formel:

$$c = -\frac{1}{p} \ln \frac{J_1}{J_0} = \frac{1}{p} \ln \frac{J_0}{J_1}$$

aus beobachteten Werten J_0, J_1 und p bestimmen.

5. Beispiel: Die Höhenmessungen mittels des Barometers beruhen ebenfalls auf dem Auftreten einer Exponentialfunktion. Wir denken uns über einer Stelle in Meereshöhe eine lotrechte ruhige Luftsäule von 1 qmm Querschnitt. Unten betrage der Barometerstand b_0 mm. Darüber wird er eine Funktion y (in mm) der Höhe x (in m) über dem Meere sein. Wir machen die Annahme, daß die Luftsäule überall dieselbe Temperatur habe und durchaus trocken sei, fassen den Zustand in der

Höhe x ins Auge und lassen x um dx wachsen. Dabei nimmt der Barometerstand y ab, weil der Druck der Luftsäule von der Höhe x bis zur Höhe $x + dx$ nicht mehr auf das Quecksilber wirkt. Ist dy der zugehörige negative Zuwachs des Barometerstandes y, so ist das Gewicht dieser soeben erwähnten unendlich kurzen Luftsäule von der Höhe dx (in m) und von 1 qmm Querschnitt gleich dem Gewicht einer Quecksilbersäule von der Höhe $-dy$ (in mm) und 1 qmm Querschnitt. Diese zweite Säule hat $-dy$ cbmm Inhalt, die erste 1000 dx cbmm. Ist l das spezifische Gewicht der Luft, s das des Quecksilbers, so kommt also:

$$-s\,dy = 1000\,l\,dx. \tag{7}$$

Wegen der geringen Zusammendrückbarkeit des Quecksilbers dürfen wir sein spezifisches Gewicht s als konstant betrachten. Anders verhält es sich mit dem der Luft. Ihr spezifisches Gewicht sei in Meereshöhe gleich l_0. Da die Luft unten den Barometerstand b_0 und in x m Höhe den Barometerstand y bewirkt, aber überall dieselbe Temperatur hat, ist:

$$\frac{l}{l_0} = \frac{y}{b_0}, \quad \text{also} \quad l = \frac{l_0}{b_0}\,y.$$

Aus (7) folgt somit:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1000\,l_0}{s\,b_0}\,y.$$

Hierin sind l_0, s, b_0 Konstanten. Nach Satz 7 kommt folglich, da y überdies für $x = 0$ den Wert b_0 hat:

$$y = b_0\,e^{-\frac{1000\,l_0}{s\,b_0}x}. \tag{8}$$

Der Barometerstand y ist daher eine Exponentialfunktion der Höhe x. Beträgt die Temperatur 0° und herrscht in Meereshöhe der normale Barometerstand $b_0 = 760$, so ist das spezifische Gewicht l_0 der Luft dort gleich 0,0012932, während das des Quecksilbers den Wert $s = 13{,}5956$ hat. Also kommt:

$$y = 760\,e^{-\frac{x}{7990}}. \tag{9}$$

Daraus folgt:

$$x = -7990 \ln \frac{y}{760}$$

oder nach Tafel III abgerundet

$$x = -18400 \log \frac{y}{760}. \tag{10}$$

Die Zahl 18400 heißt die barometrische Konstante. Für $y = 759$ ergibt sich $x = 10{,}5$, die barometrische Höhenstufe: Man muß um 10,5 m steigen, um eine Erniedrigung des Barometerstandes um 1 mm zu beobachten. Dies gilt bei 760 mm Druck. Da der Barometerstand nicht allzusehr um 760 mm schwankt, kann man diese Höhenstufe angenähert auch sonst annehmen. Die Formeln gelten für einen Idealzustand. Zu genaueren Höhenmessungen mittels des Barometers versieht man sie mit Verbesserungen, die aus gewissen wahrscheinlichen Annahmen über den Zustand der Luftsäule folgen.

6. Beispiel: Wir untersuchen das Gesetz, nach dem sich ein Körper abkühlt. Der Körper habe zuerst die Temperatur von T_0 Grad Celsius und befinde sich in einer Umgebung, deren Temperatur 0° Celsius betrage. Ist T_0 positiv, so wird er sich abkühlen, d. h. seine Temperatur zur Zeit t wird eine gewisse noch unbekannte Funktion T von t sein. Ihr Anfangswert für $t = 0$ ist T_0. Durch geeignete Vorkehrungen kann man dafür sorgen, daß die Temperatur der Umgebung durch die beständige Wärmeabgabe nicht gesteigert wird. Diejenige Wärmemenge, die dem Körper in einem unendlich kleinen Zeitteilchen dt entzogen wird, ist proportional zu diesem Zeitteilchen dt sowie zur augenblicklichen Differenz der Temperatur des Körpers und der Umgebung. Da zur Zeit t diese Differenz T beträgt, ist die im nächsten Zeitteilchen dt abgegebene Wärmemenge in der Form konst. $T\,dt$ darstellbar. Ferner ist die durch diese Wärmeabgabe bedingte Temperaturerniedrigung dT zur Wärmemenge proportional, d. h. es besteht eine Gleichung von der Form

$$dT = -c\,T\,dt \quad \text{oder} \quad \frac{dT}{dt} = -c\,T,$$

wo c eine gewisse positive Konstante bedeutet, die dem betreffenden Körper eigentümlich ist. Also gibt Satz 7:

$$T = T_0\, e^{-ct}. \tag{11}$$

Hat man die Temperatur T des Körpers nach t Sekunden gemessen, so läßt sich c mittels der konstanten Formel

$$c = -\frac{1}{t} \ln \frac{T}{T_0} = \frac{1}{t} \ln \frac{T_0}{T}$$

berechnen. Falls die Temperatur der Umgebung nicht 0° beträgt, gilt dasselbe Gesetz, nur bedeuten dann T_0 und T die Differenzen der Temperatur des Körpers gegenüber der konstanten Temperatur der Umgebung.

7. Beispiel: Über einer festen Scheibe (oder Trommel) mit der Mitte M, siehe Fig. 224, sei ein Riemen gespannt, der von A bis B anliegt und sich von A nach B hin gleitend bewegt. Wie wächst die Spannung des Riemens von A bis B infolge der Reibung? In A sei die Spannung gleich T_0. An irgendeiner Stelle P zwischen A und B wird die Spannung einen Betrag T haben, der eine noch unbekannte Funktion des Zentriwinkels $\varphi = \sphericalangle AMP$ ist. Wächst φ um $d\varphi$ oder $\sphericalangle PMQ$, so nimmt T um dT zu. Wir betrachten nun (wie auf S. 328 bemerkt wurde) die Spannung T längs des Stückes PQ als konstant. Erst in Q lassen wir sie um dT wachsen. Das Stück PQ wird in P und Q tangential nach verschiedenen Seiten hin von der Spannung T angegriffen. Ist po in der Nebenfigur parallel und gleich der ersten und oq parallel und gleich der zweiten Spannung, so stellt pq den Druck dar, den das Stück PQ auf die Scheibe ausübt. Weil $po \perp PM$ und $oq \perp MQ$ ist, wird $\sphericalangle qop = d\varphi$, also der Bogen pq oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Strecke pq gleich $T\,d\varphi$ (nach S. 6). Die Reibung des Stückes PQ ergibt sich aus

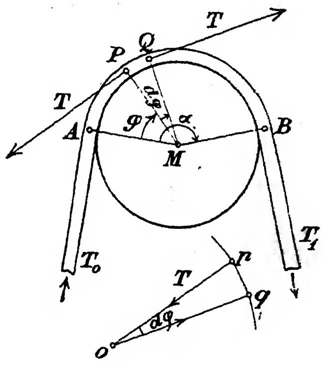


Fig. 224.

diesem Druck durch Multiplikation mit dem **Reibungskoeffizienten** ϱ, einer vom Material bedingten Konstante. Mithin ist $\varrho T d\varphi$ der Betrag, um den die Spannung T in Q wächst:

$$dT = \varrho T d\varphi \quad \text{oder} \quad \frac{dT}{d\varphi} = \varrho T.$$

Da insbesondere $T = T_0$ für $\varphi = 0$ ist, folgt hieraus nach Satz 7:

$$T = T_0 e^{\varrho \varphi}.$$

Für die Spannung T_1 in B ergibt sich also, wenn $\sphericalangle AMB = \alpha$ ist:

$$(12) \qquad T_1 = T_0 e^{\varrho \alpha}.$$

Die Gesamtzunahme der Spannung ist $T_1 - T_0$ oder $T_0(e^{\varrho \alpha} - 1)$. Der Winkel α ist ebenso wie φ im Bogenmaß zu messen; sonst wäre der Bogen pq nicht gleich $T d\varphi$.

8. Beispiel: Die **Kunststange** im **Bergwerk** ist eine lotrecht hängende und sich im Querschnitt nach unten hin verjüngende schwere Stange, die überall gleichmäßig beansprucht wird, d. h. in jedem wagerechten Querschnitte dieselbe Zugspannung für die Flächeneinheit erfährt. Der x m über dem unteren Ende der Stange liegende wagerechte Querschnitt habe y qcm. Soll die Spannung für 1 qcm gleich c kg sein, so erfährt dieser Querschnitt einen Zug von cy kg nach unten, dagegen der Querschnitt $y + dy$ in der Höhe $x + dx$ einen Zug von $c(y + dy)$ kg nach unten, d. h. die Differenz cdy kg ist gleich dem Gewichte des zwischen den Höhen x und $x + dx$ gelegenen Stückes der Stange. Nach S. 328 darf angenommen werden, daß dieser unendlich kurze Teil überall den Querschnitt y qcm habe. Seine Höhe beträgt dx m, d. h. 100 dx cm, also sein Volumen 100 ydx ccm. Ist s das spezifische Gewicht des Materials, so muß also cdy gleich dem in Kilogrammen ausgedrückten Gewichte von 100 $sydx$ ccm Wasser sein. Daraus folgt:

$$c\,dy = \frac{sy}{10}\,dx \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{s}{10c}\,y.$$

Beträgt der Querschnitt am unteren Ende y_0 qcm, so ist $y = y_0$ für $x = 0$. Also ergibt Satz 7, als Fläche des Querschnittes in x m Höhe:

$$(13) \qquad y = y_0 e^{\frac{s}{10c}x}.$$

9. Beispiel: Ein **elektrischer Strom** durchfließe einen **Leiter**. Die elektromotorische Kraft der Stromquelle sei E, der Widerstand des Leiters sei R, und die Stromstärke zur Zeit t sei J. Die vom Strom in der Zeit dt geleistete Arbeit ist $EJdt$. Wir entnehmen der Physik folgendes: Ein Teil der Arbeit wird durch den Widerstand des Leiters in Wärme verwandelt und ist proportional zum Produkt aus R, aus J^2 und aus dt. Der andere Teil der Arbeit wird im magnetischen Felde des Leiters aufgespeichert und ist proportional zum Produkt aus J und aus dem Zuwachs dJ der Stromstärke J während der Zeit dt. Der erste Teil ist demnach proportional zu RJ^2dt, der zweite proportional zu JdJ. Bei passender Wahl der Wärmeeinheit kann man den ersten Teil geradezu gleich RJ^2dt setzen. Dann tritt der zweite Teil mit einem konstanten Faktor L auf, den man den **Koeffizienten der Selbstinduktion** oder den **Reaktionskoeffizienten des Leiters** nennt. Wir haben also:

$$EJdt = RJ^2dt + LJdJ.$$

Durch Division mit $J\,dt$ geht hieraus die grundlegende Energiegleichung hervor:

(14) $$L\frac{dJ}{dt} + RJ = E.$$

Hierin sind L und R positive Konstanten, dagegen J und E im allgemeinen Funktionen der Zeit t. Man kann die Gleichung auch so schreiben:

(15) $$\frac{dJ}{dt} = \frac{E}{L} - \frac{R}{L}J.$$

Nunmehr wollen wir annehmen: Der Strom habe seit längerer Zeit den Leiter durchlaufen, und dadurch habe die Stromstärke einen gewissen Wert J_0 erreicht. Nun werde die Stromquelle ausgeschaltet. Von diesem Augenblick an, von dem an wir die Zeit t rechnen, nimmt die Stromstärke J ab. Jetzt ist in (15) $E = 0$, also

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{R}{L}J$$

zu setzen, so daß Satz 7 liefert:

(16) $$J = J_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

Also versiegt der Strom eigentlich erst nach unendlich langer Zeit, da J für $\lim t = \infty$ nach Null strebt. Er wird jedoch schon sehr bald unmerklich schwach. Dies wird sich nachher, wenn wir ein Zahlenbeispiel hinzufügen, deutlicher zeigen. Hier erwähnen wir nur, daß, wenn $t = L:R$ wird, die Stromstärke J schon nur noch gleich $J_0:e$, also fast nur noch ein Drittel von J_0 ist. Diese Zeit $L:R$, in der die Stromstärke von J_0 bis $J_0:e$ abnimmt, heißt die Zeitkonstante des Stromkreises.

In allen sechs letzten Beispielen wurde eine Exponentialfunktion

(17) $$y = a\,e^{cx}$$

gefunden, wenn auch meistens die Veränderlichen x und y anders bezeichnet waren, ebenso wie die Konstanten c und a, von denen a den Anfangswert der Funktion (für $x = 0$) bedeutet. Man wird also der auf S. 310 aufgestellten Behauptung beipflichten, daß das Gesetz des organischen Wachsens oft auftritt. Daher ist es nützlich, die Exponentialfunktionen (17) und ihre graphische Darstellung genauer zu besprechen. Ihre Bildkurven nennt man Exponentialkurven. Weil aus (17) folgt, daß $cx = \ln(y:a)$ ist, werden die Exponentialkurven häufig auch logarithmische Kurven genannt. Man sollte das nicht tun, sondern nur dann von logarithmischen Kurven reden, wenn die Abszissen zu den Numeris, die Ordinaten zu den Logarithmen proportional sind. Die Exponentialkurven sind diejenigen Kurven, bei denen die Abszissen zu den Logarithmen und die Ordinaten zu den Numeris proportional sind.

Vor allem erinnern wir wieder daran, daß die Exponentialfunktionen durch die Eigenschaft

$$\frac{dy}{dx} = c\,y$$

gekennzeichnet sind, die sich sofort geometrisch ausdrücken läßt: Ist P in Fig. 225 ein Bildpunkt $(x\,;\,y)$ der Funktion (17) und schneidet seine Tangente die x-Achse in T, so ist die Ordinate $y = QP$, dividiert mit TQ, gleich der Steigung cy. Mithin ist $TQ = 1 : c$. (Im Falle $c < 0$ liegt T rechts von Q.) Die Strecke TQ liegt senkrecht unter dem Stück TP der Tangente und heißt deshalb die Subtangente. Da c konstant ist, kann also der Satz 7, S. 320, so ausgesprochen werden:

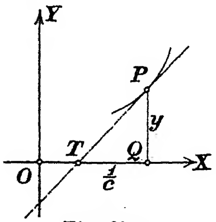


Fig. 225.

Satz 12: Dann und nur dann, wenn die Subtangente einer Kurve eine konstante Länge hat, ist die Kurve eine Exponentialkurve, d. h. das Bild einer Exponentialfunktion

$$y = \text{konst.}\, e^{cx}.$$

Dabei ist $1 : c$ die Länge der Subtangente, gemessen mit der x-Einheit im Sinne vom Schnittpunkte der Tangente mit der x-Achse bis zum Fußpunkte der Ordinate des Berührungspunktes.

Ist der Anfangswert a in (17) negativ, so ist y beständig negativ, so daß die Bildkurve unterhalb der x-Achse verläuft. Klappen wir sie um die x-Achse nach oben herum, so entsteht die Bildkurve einer Funktion (17), bei der der Anfangswert der absolute Betrag des vorigen Anfangswertes ist. Wir wollen uns daher auf die Annahme eines positiven a beschränken. Aus Satz 7, S. 104, folgt, daß die Bildkurve steigt, wenn c positiv ist, und fällt, wenn c negativ ist. Der eine Fall läßt sich auf den anderen zurückführen, indem man die positive x-Achse mit der negativen vertauscht. In unseren Beispielen war c meistens negativ. Wir wollen daher c negativ annehmen: $c = -k$, wo k eine positive Konstante bedeute. Statt (17) haben wir jetzt:

(18) $$y = a e^{-kx} \qquad (a > 0, \qquad k > 0),$$

und die Steigung ist:

(19) $$\frac{dy}{dx} = -ky.$$

Die konstante Subtangente ist $-1:k$; der Schnittpunkt T der Tangente mit der x-Achse liegt also in der positiven Richtung der x-Achse, vom Fußpunkte Q der Ordinate QP des Kurvenpunktes P an gerechnet. Für $\lim x = -\infty$ wird y positiv unendlich groß und die Steigung negativ unendlich groß. Für $\lim x = +\infty$ dagegen wird y und die Steigung gleich Null. Die Bildkurve kommt aus dem Unendlichfernen im zweiten Quadranten (von links oben) mit größtem Gefälle her, wird flacher, bleibt oberhalb der x-Achse und schmiegt sich im ersten Quadranten in unendlicher Ferne an die x-Achse an, die also eine Asymptote der Kurve ist (vgl. S. 193).

Aus (18) folgt nach (10), S. 298, wenn man von beiden Seiten der Gleichung den gewöhnlichen Logarithmus nimmt:

$$\log y = \log a - Mkx\,, \tag{20}$$

so daß $\log y$ eine lineare Funktion von x ist. Nach Satz 4, S. 31, besagt dies: Wenn wir nicht x und y, sondern x und $\log y$ als Abszisse und Ordinate benutzen, erhalten wir als Bild eine gerade Linie g. Sie schneidet auf der Ordinatenachse die Strecke $\log a$ und auf der x-Achse dieselbe Strecke, dividiert mit Mk, ab. Wir bestimmen also diese beiden Strecken, ziehen dann die Gerade g und leiten rückwärts aus ihr das Bild der Exponentialkurve ab, indem wir jede Ordinate von g durch den zugehörigen Numerus y ersetzen. Wir können so beliebig viele Punkte der Kurve finden. Da die Subtangenten die konstante Länge $-1:k$ haben, ergeben sich die Tangenten, wenn wir an die Abszissen jedesmal noch $1:k$ ansetzen und immer den Endpunkt mit dem betreffenden Kurvenpunkte verbinden. In Fig. 226 haben wir dies für das 9. Beispiel, siehe Formel (16):

$$J = J_0\, e^{-\frac{R}{L}t}\,.$$

ausgeführt, wobei t in Sekunden die Abszisse x und J in Ampère die Ordinate y ist. Dabei wurden die Zahlenwerte angenommen: $J_0 = 10$ (in Ampère), $R = 0{,}12$ (in Ohm) und $L = 0{,}01$ (in Henry), also die Bildkurve von

$$y = 10\, e^{-12x}$$

gezeichnet. Hier ist $k = 12$, $a = 10$, $\log a = 1$, $\log a : Mk = 0{,}192$, $1:k = 0{,}083$. Die Ungenauigkeiten, die durch das Ablesen der Logarithmen an den sehr kleinen Ordinaten von g entstehen, bringen kleine Unregelmäßigkeiten mit sich, die in Fig. 226 absichtlich nicht ausgeglichen worden sind. Genauer wird die Figur, wenn man für die Ordinaten der Geraden g eine größere Längeneinheit wählt.

Ein anderes, theoretisch genaues, praktisch ungenaues, aber leider aus bloßer Bequemlichkeit vielbenutztes Ver-

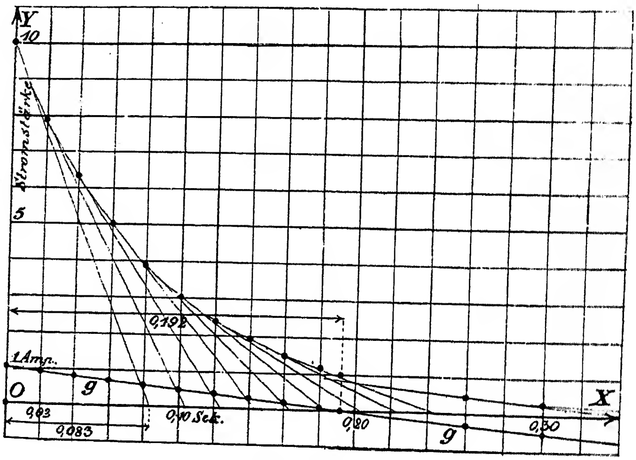


Fig. 226.

fahren ist dieses: Ist $(x_1\,;\,y_1)$ ein Kurvenpunkt, so werden solche Kurvenpunkte $(x_2\,;\,y_2)$, $(x_3\,;\,y_3)\ldots$ bestimmt, deren Abszissen die Vielfachen von x_1 sind, also $x_2 = 2\,x_1$, $x_3 = 3\,x_1 \ldots$ Nach (18) ist:

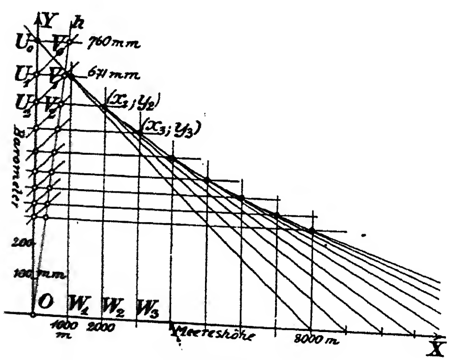


Fig. 227.

$$y_1 = a\,e^{-k x_1}, \quad y_2 = a\,e^{-k x_2}, \quad y_3 = a\,e^{-k x_3}\ldots,$$

somit:

$$(21)\quad \frac{a}{y_1} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2}{y_3} = \ldots$$

Die hieraus folgende Konstruktion erläutern wir in Fig. 227 am Beispiel der Barometerhöhe:

$$y = 760\,e^{-\frac{x}{7990}},$$

vgl. (9) im 5. Beispiel. Wir wählen hier $x_1 = 1000$, so daß

$$\log y_1 = \log 760 - \frac{1000\,M}{7990} = 2{,}8265\,,$$

daher $y_1 = 671$ ist. Auf der y-Achse tragen wir mit irgendeiner passend gewählten Einheit die Strecken $O\,U_0 = a = 760$ und $O\,U_1 = y_1 = 671$

auf. Dann ziehen wir durch U_0 die Wagerechte, durch U_1 die unter 45^0 steigende Gerade; beide treffen sich in V_0. Wir benutzen jetzt die Hilfsgerade OV_0 oder h, indem wir durch U_1 die Wagerechte bis V_1 auf h, dann durch V_1 die Gerade unter 45^0 bis U_2 auf der y-Achse ziehen und dies Verfahren fortsetzen. (Statt des 45^0-Winkels hätten wir irgendeinen anderen bequemen Winkel nehmen können.) Offenbar ist

$$\frac{OU_0}{OU_1} = \frac{OU_1}{OU_2} = \frac{OU_2}{OU_3} = \cdots$$

Wegen $OU_0 = a$, $OU_1 = y_1$ zeigt dies nach (21), daß $OU_2 = y_2$, $OU_3 = y_3 \ldots$ ist. Auf der Abszissenachse tragen wir mit irgendeiner Einheit $OW_1 = x_1 = 1000$ ab und vervielfältigen diese Strecke, so daß $OW_2 = 2x_1 = x_2$, $OW_3 = 3x_1 = x_3 \ldots$ ist. Aus zusammengehörigen Punkten W_1, U_1, ferner W_2, U_2, ferner W_3, $U_3 \ldots$ erhalten wir durch Ziehen der Koordinatenlinien die Kurvenpunkte $(x_1 ; y_1)$, $(x_2 ; y_2)$, $(x_3 ; y_3) \ldots$ Dies Verfahren läßt sich oben über U_0V_0, d. h. auf der Kurve rückwärts in den zweiten Quadranten fortsetzen. Zur Ergänzung kann man mit Hilfe der konstanten Subtangente, indem man $1 : k = 7990$ auf der Abszissenachse jeweils vom betreffenden Punkte W aus nach rechts aufträgt, die Tangenten ziehen, wie es die Figur zeigt.

Dies Verfahren ist außerordentlich mangelhaft, weil jeder folgende Punkt aus dem vorhergehenden abgeleitet wird, wodurch sich die Zeichenfehler mehr und mehr häufen.

Viel besser ist ein drittes Verfahren: Man bestimmt zuerst durch Berechnung zwei weit voneinander entfernte Kurvenpunkte und schaltet dazwischen neue Punkte ein. Sind nämlich $(x_1 ; y_1)$ und $(x_2 ; y_2)$ zwei Punkte der Kurve, so daß nach (18):

$$y_1 = a\,e^{-kx_1}, \qquad y_2 = a\,e^{-kx_2}$$

ist, so wird:

$$\sqrt{y_1 y_2} = a\,e^{-k\frac{x_1+x_2}{2}}.$$

Mithin sind auch

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y_3 = \sqrt{y_1 y_2}$$

die Koordinaten eines Kurvenpunktes $(x_3 ; y_3)$, der also als Abszisse das arithmetische Mittel der Abszissen x_1 und x_2, als Ordinate das geometrische Mittel der Ordinaten y_1 und y_2 hat. Das geometrische Mittel konstruiert man, siehe Fig. 228, auf der y-Achse, indem man über y_1 als Durchmesser den Halbkreis legt, in der Höhe y_2 die Wagerechte

bis zum Schnitte mit dem Kreise zieht und darauf durch den Schnittpunkt den Kreis um O schlägt. Er schneidet auf der Ordinatenachse das geometrische Mittel y_3 von y_1 und y_2 ab. In derselben Weise kann man zwischen $(x_1\,;\,y_1)$ und $(x_3\,;\,y_3)$ und zwischen $(x_3\,;\,y_3)$ und $(x_2\,;\,y_2)$ je einen neuen Kurvenpunkt ermitteln, usw. Übrigens kann man auch, wenn zwei Punkte gegeben sind, durch umgekehrte Ausführung der Konstruktion zu einem weiter draußen liegenden Punkte gelangen.

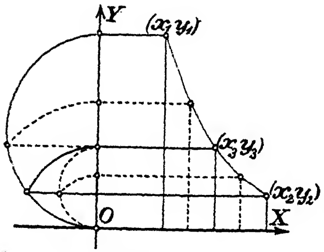


Fig. 228.

Ein viertes Verfahren, das zwar einfach, aber nicht immer zweckmäßig ist, besteht darin, daß man ein für allemal die Bildkurve der Funktion

(22) $$y = e^{-x}$$

zeichnet. Sie geht aus der Bildkurve von e^x in Fig. 220, S. 319, hervor, wenn man diese um die y-Achse herumklappt. Man kann nun die Bildkurve von e^{-x} auch für irgendeine andere Exponentialfunktion

(23) $$y = a\,e^{-kx}$$

mit positiver Konstante k verwenden, indem man als neue x-Einheit das k-fache der alten x-Einheit und als neue y-Einheit den a-ten Teil der alten y-Einheit benutzt.

Zuweilen wird gefragt, für welches x der Betrag der Exponentialfunktion y, die für $x = 0$ den Wert a hat, nur noch p Prozent des Anfangswertes a ausmacht. Nach (23) muß für dies x

$$\frac{p}{100}\,a = a e^{-kx}$$

sein, also:

(24) $$x = -\frac{1}{k}\ln\frac{p}{100} = \frac{1}{Mk}\log\frac{100}{p}.$$

Im Falle der Fig. 226 z. B. ist y auf 10 %, d. h. auf 1 Ampère zurückgegangen, wenn $x = 0{,}192$ ist, also nach 0,192 Sekunden, wie man ausrechnen möge.

Zuweilen ist die Bildkurve einer Exponentialfunktion für verschiedene Anfangswerte a in dasselbe Achsenkreuz einzuzeichnen. Nach (23) unterscheiden sich die Kurven nur dadurch, daß die zu gleichem x gehörigen Ordinaten in demselben Ver-

hältnis zueinander stehen wie die Anfangswerte. Man könnte also die neuen Kurven durch ähnliche Vergrößerung oder Verkleinerung der alten Ordinaten gewinnen, da die Kurven zueinander affin sind

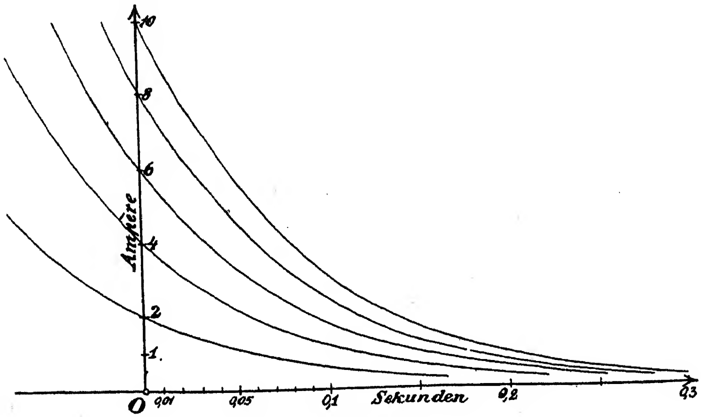


Fig. 229.

(vgl. S. 88). Viel bequemer ist jedoch ein anderes Verfahren: Will man in dieselbe Figur, in der die Bildkurve der Funktion (23) gezeichnet ist, die der Funktion

$$y = b\,e^{-kx}$$

einzeichnen, so beachte man, daß

$$y = a \cdot \frac{b}{a} e^{-kx} = a\,e^{\ln \frac{b}{a} - kx} = a\,e^{-k\left(x - \frac{1}{k} \ln \frac{b}{a}\right)}$$

ist. Dies wäre nun die alte Funktion (23), wenn hier x statt

$$x - \frac{1}{k} \ln \frac{b}{a}$$

stände. Die neue Kurve geht daher aus der alten hervor, wenn man alle Abszissen um dieselbe Größe vermehrt oder vermindert [1]. Man zeichnet also, siehe Fig. 229, die wie Fig. 226 für die Stromstärken

$$y = b\,e^{-12x}$$

entworfen worden ist, zuerst wie in Fig. 226 die Bildkurve von

$$y = 10\,e^{-12x},$$

[1] Da e^x und $\ln x$ inverse Funktionen sind (vgl. S. 151), entspricht dieser Verschiebung längs der x-Achse die auf S. 264 erwähnte Verschiebung der Logarithmuskurve längs der y-Achse.

überträgt sie und die x-Achse auf Pauspapier und verschiebt die übertragene Achse auf der x-Achse der Zeichnung so weit, bis die Kurve des Pauspapieres auf der y-Achse den gewünschten neuen Anfangswert b (in Fig. 229 ist $b = 8, 6, 4, 2$) abschneidet. Wenn der neue Anfangswert b anderes Vorzeichen als der alte hat, klappt man außerdem die Kurve um die Abszissenachse herum.

Die Fläche x zwischen der Exponentialkurve

$$y = a e^{-kx}, \tag{25}$$

der x-Achse und den zu den Abszissen x_0 und x gehörigen Ordinaten y_0 und y hat nach Satz 5, S. 229, den Wert:

$$z = \int_{x_0}^{x} a e^{-kx} dx.$$

Da nun e^{-kx} den Differentialquotienten $-k e^{-kx}$ hat, ist das unbestimmte Integral gleich

$$-\frac{a}{k} e^{-kx} + \text{konst.} \qquad \text{oder} \qquad -\frac{y}{k} + \text{konst.}$$

Für $x = x_0$ aber soll sich Null ergeben. Deshalb ist die additive Konstante gleich $y_0 : k$, mithin die Fläche:

$$z = \frac{y_0 - y}{k}. \tag{26}$$

Man bekommt also die Fläche durch Division der Differenz der beiden begrenzenden Ordinaten mit k.

Unsere Betrachtungen werden vervollständigt, wenn wir noch eine Frage beantworten, die eine Verallgemeinerung der in § 1 gestellten Frage ist:

Welche Funktionen y von x haben die Eigentümlichkeit, daß ihr Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = cy + k \tag{27}$$

ist, wo c und k Konstanten bedeuten? Die Annahme $k = 0$ wurde durch Satz 7, S. 320, erledigt. Jetzt fragen wir nach einer Funktion, deren Differentialquotient sich linear mit konstanten Koeffizienten durch die Funktion selbst ausdrücken läßt.

Diese Eigenschaft läßt sich geometrisch als Eigenschaft der Bild-

kurve der gesuchten Funktion aussprechen, siehe Fig. 230: Die Tangente eines Bildpunktes P oder $(x\,;\,y)$ hat nach (27) die Steigung:

$$\frac{dy}{dx} = cy + k = \frac{y + \frac{k}{c}}{\frac{1}{c}}.$$

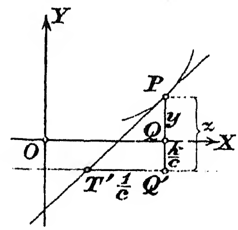


Fig. 230.

Wenn also die Ordinate $y = QP$ über Q hinaus nach unten bis Q' um die Strecke $k : c$ (gemessen mit der y-Einheit) verlängert und darauf von Q' aus parallel zur x-Achse, aber im negativen Sinne, die Strecke $1 : c$ (gemessen mit der x-Einheit) bis T' abgetragen wird, ist $T'P$ die Tangente von P. Ist $k : c$ oder $1 : c$ negativ, so muß jeweils der entgegengesetzte Sinn von Q oder Q' aus genommen werden. Vergleichen wir dies mit Fig. 225, so erkennen wir, daß jetzt an die Stelle der x-Achse die Parallele dazu mit der Ordinate $-k : c$, also an die Stelle von y der Wert $y + k : c$ tritt. Wir schließen daraus, daß $y + k : c$ eine der früher betrachteten Exponentialfunktionen ist. Dies zeigt nun auch die Rechnung. Setzen wir nämlich

$$z = y + \frac{k}{c}, \tag{28}$$

so gibt (27):

$$\frac{dz}{dx} = cy + k = c\left(y + \frac{k}{c}\right) = cz.$$

Nach Satz 7, S. 320, worin jetzt z statt y zu sagen ist, folgt hieraus:

$$z = a e^{cx},$$

wo a eine Konstante bedeutet. Einsetzen dieses Wertes in (28) und Auflösung nach y ergibt:

$$y = a e^{cx} - \frac{k}{c}. \tag{29}$$

Satz 13: Wenn eine Funktion y von x die Eigenschaft hat, daß ihr Differentialquotient eine ganze lineare Funktion von ihr selbst ist, d. h. wenn

$$\frac{dy}{dx} = cy + k$$

ist, wo c und k konstant sind, hat die Funktion y die Form:

$$y = a e^{cx} - \frac{k}{c},$$

worin a irgendeine Konstante bedeutet.

Zeichnet man die Bildkurve der Funktion $a c^{cx}$ und ersetzt man dann die x-Achse durch die Parallele zu ihr mit der Ordinate $k : c$, so geht die Bildkurve der Funktion (29) hervor.

10. Beispiel: Im 9. Beispiele hatten wir für den Differentialquotienten der Stärke J des einen Leiter mit dem Selbstinduktionskoeffizienten L und dem Widerstande R durchfließenden Stromes zur Zeit t die Formel (15) aufgestellt:

(30) $$\frac{dJ}{dt} = \frac{E}{L} - \frac{R}{L} J,$$

wo E die elektromotorische Kraft der Stromquelle bedeutet. Wenn die elektromotorische Kraft konstant ist, sind $E : L$ und $R : L$ Konstanten. Dann

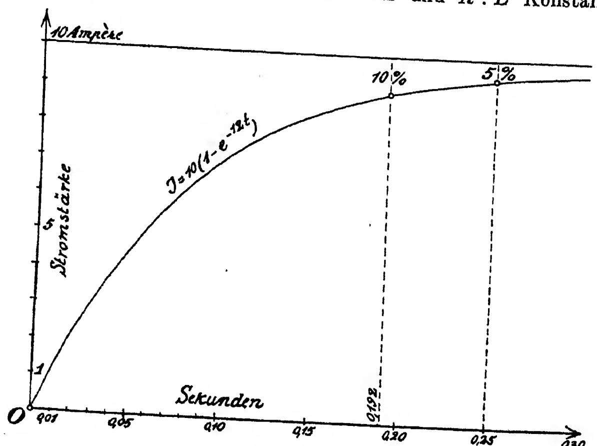


Fig. 231.

liegt in (30) der Fall unseres letzten Satzes vor, indem hier x und y mit t und J bezeichnet sind, $c = -R : L$ und $k = E : L$ ist, so daß folgt:

$$J = a e^{-\frac{R}{L} t} + \frac{E}{R}.$$

Für $t = 0$ ist die Stromstärke gleich Null, also:

$$0 = a + \frac{E}{R}, \quad \text{d. h.} \quad a = -\frac{E}{R},$$

so daß wir erhalten:

(31) $$J = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L} t}\right).$$

Benutzen wir dieselben Zahlenwerte $R = 0{,}12$, $L = 0{,}01$ wie auf S. 335, und nehmen wir die elektromotorische Kraft $E = 1{,}2$ (in Volt) an, so daß

$$J = 10\,(1 - e^{-12t})$$

wird, so geht Fig. 231 hervor. Die Kurve ist dieselbe wie in Fig. 226; nur ist an die Stelle der x-Achse die Parallele dazu mit der Ordinate $-k:c = 10$ getreten und außerdem die positive und negative Richtung der Ordinaten vertauscht, da hier $a = -10$ ist, während früher $a = +10$ war.

In diesem Beispiel wie auch sonst hat die in Satz 13 auftretende Funktion

$$y = a\,e^{cx} - \frac{k}{c},$$

wenn c negativ ist, das Bestreben, sich für von Null an wachsendes x sehr bald dem Werte $-k:c$ zu nähern. Ist c positiv, so gilt dies für abnehmendes x. Zuweilen ist es wichtig, festzustellen, für welches x das y nur um p % von diesem Wert abweicht. Für $p = 10$ gibt unser letztes Beispiel wie auf S. 338 den Wert $x = 0{,}192$. Man bestätige, daß $p = 5$ ist für $x = 0{,}25$.

11. Beispiel: Dieselbe konstante Energiequelle wie im 10. Beispiel erzeuge unter denselben Umständen einen Strom; doch werde die Energiequelle nach einer Sekunde wieder ausgeschaltet. Zuerst gibt die Rechnung wie vorher:

$$J = 10\left(1 - e^{-12t}\right).$$

Dies gilt von $t = 0$ bis $t = 1$. Alsdann ist J fast genau gleich 10, da e^{-12} sehr klein ist. Von nun an liegt also dasselbe wie im 9. Beispiel vor, wobei 10 der Anfangswert

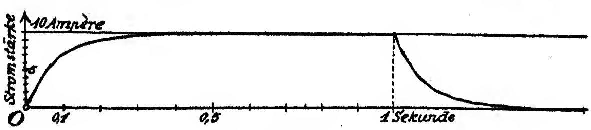


Fig. 232.

von J ist, so daß die Formel auf S. 335 unten für y gilt, mit dem einzigen Unterschiede, daß x durch $t-1$ zu ersetzen ist. Von $t = 1$ an ist also:

$$J = 10\,e^{-12(t-1)}.$$

Siehe Fig. 232, die in $\frac{1}{5}$ des Maßstabes der Figuren 226 und 231 gezeichnet ist.

§ 3. Polarkoordinaten und logarithmische Spiralen.

Bei der Wichtigkeit der Exponentialfunktionen für die praktischen Anwendungen ist es angebracht, noch eine andersartige graphische Darstellung dieser Funktionen zu besprechen. Sie beruht auf einem Verfahren, das auch sonst öfters nützlich ist und das wir daher zunächst in allgemeiner Form auseinandersetzen.

Ist eine Größe eine Funktion einer anderen, so haben wir bisher beide graphisch als Strecken auf zwei Koordinatenachsen dargestellt. Wenn aber die unabhängige Veränderliche ihrer eigenen Natur nach

einen Winkel bedeutet, wie dies recht häufig bei Anwendungen der Fall ist (vgl. das 7. Beispiel, S. 331), wird man es vorziehen, sie auch bei der Abbildung als Winkel darzustellen. Sie sei mit φ bezeichnet. Die abhängige Veränderliche heiße jetzt r statt y. Wir betrachten also eine Funktion $r = f(\varphi)$ des Winkels φ.

Um die Sachlage möglichst anschaulich vor sich zu haben, denke man sich an einer Stelle O, dem Pol, siehe Fig. 233, einen Aussichtspunkt, von dem aus man die umliegende Gegend betrachtet. Der Strahl OA gebe eine bestimmte Himmelsrichtung, z. B. nach Osten, an. Er heißt der Anfangsstrahl oder die Achse. Die Lage irgendeines Punktes P der Ebene wird dem Beobachter in O bekannt sein, sobald er den Winkel φ des Sehstrahls OP mit dem Anfangsstrahl OA und die Entfernung $r = OP$ kennt.

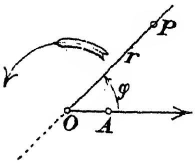


Fig. 233.

Der Winkel φ heißt die Amplitude (vom lateinischen amplitudo im Sinne von Schwung), die Strecke r der Radiusvektor (nach dem lateinischen vector, Träger) des Punktes P; beide zusammen heißen seine Polarkoordinaten. Die Amplitude φ ist in einem bestimmten Drehsinne von OA aus, den wir durch einen Pfeil andeuten, zu messen; im entgegengesetzten Sinne wird sie negativ in Rechnung gesetzt. Der Radiusvektor r liegt auf dem zweiten, sogenannten freien Schenkel des Winkels φ. Da die Größe r auch negativ sein kann, setzen wir fest, daß negative Werte auf der rückwärtigen Verlängerung des freien Schenkels über O hinaus abzutragen sind. Die Amplituden φ messen wir mit irgendeiner Winkeleinheit, z. B. im Gradmaß oder Bogenmaß, die Radienvektoren r mit einer Längeneinheit OA. In Fig. 233 z. B. hat der Punkt P, wenn wir die Winkel in Graden messen, die Polarkoordinaten $\varphi = 45$ und $r = 3$. Wenn es uns beliebt, können wir die Amplitude φ auch durch die negative Drehung von OA in die Lage OP herstellen, so daß dann $\varphi = -360 + 45 = -315$ ist. Ja wir können den Strahl mehrere Male von OA aus um O vollständig herumdrehen, so daß P auch die Polarkoordinaten $\varphi = 45 + 360$, $r = 3$ oder auch $\varphi = 45 + 2 \cdot 360$, $r = 3$ usw. oder auch $\varphi = 45 - 2 \cdot 360$, $r = 3$ usw. hat. Ja noch mehr: Wir drehen OA positiv so weit, bis der Strahl die in Fig. 233 gestrichelte rückwärtige Verlängerung von OP über O hinaus wird. Dann ist $\varphi = 45 + 180 = 225$, aber $r = -3$, weil jetzt P auf der rückwärtigen Verlängerung des freien Schenkels der Amplitude liegt. Derselbe Punkt P hat auch die Polarkoordinaten $\varphi = 45 + 180 + 360$, $r = -3$ oder auch $\varphi = 45 + 180 - 360$, $r = -3$ usw.

Messen wir φ im Bogenmaß, so treten an die Stelle von 360 und 180 die Zahlen 2π und π. Wir sehen dann: Sind φ, r Polarkoordinaten eines Punktes P, so sind auch

$$\varphi + 2n\pi,\ r \quad \text{und} \quad \varphi + (2n+1)\pi,\ -r$$

Polarkoordinaten desselben Punktes, sobald n irgendeine positive oder negative ganze Zahl bedeutet.

Wir können schließlich φ in irgendeiner anderen Weise messen, z. B. indem wir die ganze Umdrehung um O in 100 gleiche Teile teilen und einen Teil mit Eins bezeichnen. Dann tritt an die Stelle von 360 oder 2π die Zahl 100.

Zu jedem gegebenen Paar von Polarkoordinaten gehört also zwar nur ein Punkt der Ebene, umgekehrt jedoch zu einem Punkte der Ebene nicht nur ein Paar von Polarkoordinaten. Dies ist ein Mangel der Polarkoordinaten. Sie haben noch einen zweiten Mangel: Der Pol O hat zwar den Radiusvektor $r = 0$, aber seine Amplitude ist ganz beliebig. Trotz dieser Mängel sind die Polarkoordinaten oft nützlich, wie sich zeigen wird.

Bei rechtwinkligen Koordinaten x, y erkannten wir, daß die Bildpunkte $(x\,;y)$ der Wertepaare x, y, die durch eine stetige Funktion $y = f(x)$ bestimmt werden, eine lückenlose Kette, d. h. eine stetige Kurve ausmachen. Ferner: Wenn diese Funktion einen Differentialquotienten hat, kommen der Kurve überall Tangenten zu. Das Entsprechende könnten wir für die Darstellung einer stetigen Funktion

$$r = f(\varphi) \tag{1}$$

von φ, die einen Differentialquotienten $dr : d\varphi$ hat, bei der Anwendung von Polarkolarkoordinaten nachweisen. Aber wir wollen uns hier damit nicht aufhalten, zumal es ziemlich von selbst einleuchtet. Nur eines ist zu besprechen: wie man die Tangente der Bildkurve der Funktion (1) zu zeichnen hat.

Wir denken uns für φ einen bestimmten Wert gewählt, dann aus (1) den Wert von r berechnet und darauf den zugehörigen Bildpunkt mit den Polarkoordinaten φ, r ermittelt, den wir mit $(\varphi\,;r)$ bezeichnen. Das sei der Punkt P in Fig. 234. Jetzt wachse φ um ein Differential $d\varphi$, wodurch eine Änderung dr von r infolge der Beziehung (1) zwischen φ und r bewirkt wird. Der Bildpunkt P' oder $(\varphi + d\varphi\,;r + dr)$ liegt unendlich nahe bei P. Vorerst wollen wir alle vier Größen φ, r, $d\varphi$, dr positiv annehmen. Der

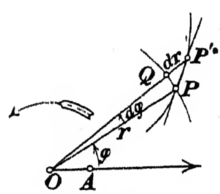


Fig. 234.

Kreis um O durch P wird den Strahl OP' an einer Stelle Q treffen, so daß $QP' = dr$ ist. Der Bogen PQ ist, wenn φ im Bogenmaß gemessen wird, gleich $r\,d\varphi$ nach S. 6, und zwar gemessen mit der für r angenommenen Längeneinheit OA. Da $\sphericalangle\, POP'$ nach Null strebt, darf der Bogen PQ als geradlinige Strecke betrachtet werden, die in P auf OP senkrecht steht. Da ferner OP' den Kreis ebenfalls senkrecht schneidet, ist das Dreieck PQP' in Q rechtwinklig. Die Hypotenuse PP' dieses Dreiecks liegt nun auf der Tangente von P. Wir haben:

$$(2) \qquad \frac{PQ}{QP'} = \frac{r\,d\varphi}{dr} = \frac{r}{\dfrac{dr}{d\varphi}}.$$

Hier steht zum Schluß im Nenner der Differentialquotient $dr : d\varphi$ der Funktion (1). Wenn wir das unendlich kleine Dreieck von P aus ähnlich vergrößern, bleibt die Hypotenuse auf der Tangente. Die Tangente ergibt sich folglich so: Wir tragen auf dem in P auf OP errichteten Lot nicht $r\,d\varphi$, sondern den Zähler r des letzten Bruches (2) ab, etwa bis R in Fig. 235, ziehen darauf durch R die Senkrechte zu PR oder also die Parallele zu OP nach außen, im Sinne von O nach P, und tragen auf ihr den Nenner des letzten Bruches (2), also $dr : d\varphi$, als Strecke ab, gemessen mit der Einheit OA. Der Endpunkt T liegt auf der Tangente von P. Das Lot von T auf OP treffe in S ein. Da $PS = dr : d\varphi$ ist, können wir auch in S auf OS nach der Seite des positiven Drehsinnes hin das Lot errichten und auf ihm $ST = r$ abtragen. Wir verfahren also ebenso, als ob wir die Mittelkraft PT zweier Kräfte finden wollten, von denen die eine, PR, senkrecht zu OP in P angreift und gleich r ist, während die andere, PS, in P in der Richtung von O nach P angreift und gleich $dr : d\varphi$ ist.

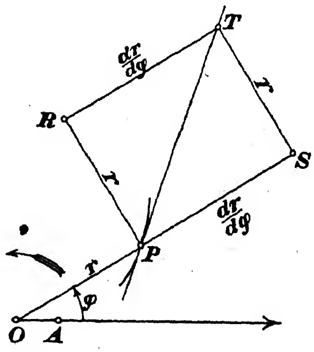


Fig. 235.

Das Verfahren erleidet Abänderungen, wenn die Größen nicht sämtlich positiv sind. Die Strecke $PS = dr : d\varphi$ wird von P aus im Sinne nach O abgetragen, wenn der Differentialquotient $dr : d\varphi$ negativ ist; die Strecke PR oder $ST = r$ wird von P oder S aus im negativen Drehsinn auf OP senkrecht errichtet, wenn r negativ ist.

Beispiel: Wird als Funktion (1) eine ganze lineare Funktion von φ

(3) $$r = c\varphi + k = c\left(\varphi + \frac{k}{c}\right)$$

gewählt, wo also c und k Konstanten sein sollen, so ist $k:c$ das Bogenmaß eines gewissen konstanten Winkels α, also:

$$r = c\,(\varphi + \alpha),$$

d. h. der Radiusvektor ist proportional zu derjenigen Amplitude, die nicht vom Anfangsstrahl OA aus, sondern von einem um $\sphericalangle\,\alpha$ weiter rückwärts (im negativen Drehsinne) gelegenen Strahl aus gerechnet wird. Die Bildkurve heißt nach dem berühmten griechischen Mathematiker Archimedes (etwa 287—212 v. Chr.) eine Archimedische Spirale. Wenn wir den Anfangsstrahl OA um $\sphericalangle\,\alpha$ zurückdrehen und den so gewonnenen Strahl als Anfangsstrahl benutzen, bedeutet dies rechnerisch, daß wir $\alpha = 0$, also $k = 0$ setzen können. Die Bildkurve der einfacheren ganzen linearen Funktion

(4) $$r = c\varphi$$

ist also dieselbe wie die der Funktion (3), nur um $\sphericalangle\,\alpha$ um O herumgedreht. Wir stellen mithin die Zeichnung der Archimedischen Spirale auf Grund von (4) her. Ist die Konstante c negativ, so nimmt r mit wachsendem φ ab, während r sonst zunimmt. Die Kurve, bei der c negativ ist, ist dieselbe wie die, bei der c positiv ist, nur muß man diese um den Anfangsstrahl OA herumklappen, weil dann φ in $-\varphi$, also $c\varphi$ in $-c\varphi$ übergeht. Wir wollen uns daher auf die Annahme beschränken, daß die Konstante c positiv sei.

Für $\varphi = 0$ ist $r = 0$, für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ (90°) ist $r = \frac{1}{2}c\pi$, für $\varphi = \pi$ (180°) ist $r = c\pi$ usw. Die Kurve windet sich also in immer größeren Bogen um den Pol O herum. Für zwei entgegengesetzt gleiche Werte φ ergeben sich entgegengesetzt gleiche Werte r. So gehört in Fig. 236 zu $\varphi = \frac{1}{4}\pi$, $r = \frac{1}{4}c\pi$ der Punkt P, zu $\varphi = -\frac{1}{4}\pi$, $r = -\frac{1}{4}c\pi$ der Punkt P', wobei zu beachten ist, daß r im zweiten Fall auf der rückwärtigen Verlängerung des freien Schenkels von φ aufgetragen wird. Wie man sieht, besteht die Kurve aus zwei Teilen; der zweite ist nur gestrichelt gezeichnet und geht aus dem ersten hervor, wenn man diesen um das in O auf dem Anfangsstrahl OA errichtete Lot herumklappt.

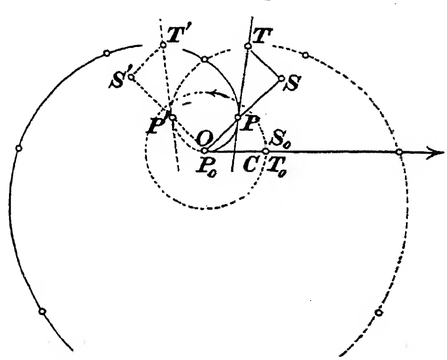


Fig. 236.

Um an einer Stelle P die Tangente zu bestimmen, beachten wir, daß nach (4) der Differentialquotient $dr : d\varphi = c$ ist. (Die Strecke c ist in Fig. 236 gleich OC angenommen, so daß $OP = \frac{1}{4}c\pi$ gleich einem Achtel des Kreises um O durch C ist.) Daher ist OP über P hinaus um c bis S zu verlängern, in S im positiven Drehsinne das Lot $ST = r = OP$ zu errichten und T mit P zu verbinden. Z. B. für den Punkt P', für den $\varphi = -\frac{1}{4}\pi$ (—45°) ist, kommt $r = -\frac{1}{4}c\pi$, so daß wir hier

$P'S' = c$, $S'T' = OP'$, haben, wobei $S'T'$ im negativen Drehsinn auf OS' zu errichten ist. Für $\varphi = 0$ wird $r = 0$. Der zugehörige Kurvenpunkt P_0 ist im Pol O gelegen. Wir haben also $P_0 S_0 = c$ auf dem Anfangsstrahl abzutragen und in S_0 (oder C) das Lot $S_0 T_0 = 0$ zu errichten, so daß T_0 in S_0 liegt, d. h. der Anfangsstrahl selbst die Tangente in O ist, usw. In Fig. 237 ist c kleiner gewählt worden, so daß eine größere Zahl von Windungen der Archimedischen Spirale zu sehen ist.

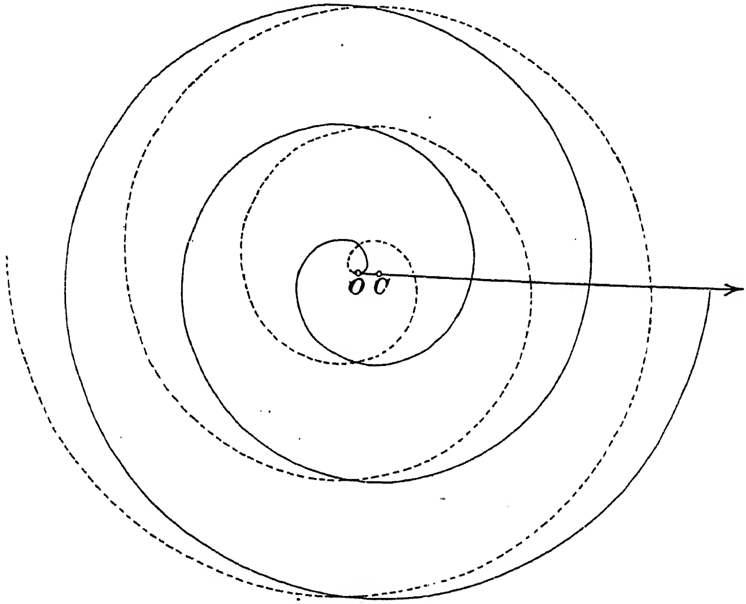


Fig. 237.

Bei der Tangentenkonstruktion auf S. 346 ist zu beachten, daß das Verfahren voraussetzt, daß der Winkel φ im Bogenmaß gemessen sei. Denn sonst wäre der Bogen PQ in Fig. 234, S. 345, nicht gleich $r\,d\varphi$. Wenn φ mit einer anderen Winkeleinheit gemessen wird und der Bogen, den diese Einheit auf dem Einheitskreis abschneidet, die Länge w hat, ist das Bogenmaß des Winkels φ gleich $w\varphi$. Wenn φ z. B. im Gradmaß gemessen wird, schneidet der Winkel 1^0 auf dem Einheitskreise den Bogen $\pi : 180$ aus, so daß $\pi\varphi : 180$ das zugehörige Bogenmaß ist, vgl. (3) auf S. 7. In jedem Fall ist, sobald φ nicht im Bogenmaß gemessen wird, das zugehörige Bogenmaß $\psi = w\varphi$, wo w eine gewisse Konstante bedeutet. Der Bogen PQ in Fig. 234 ist dann w-mal so groß wie vorhin. Demnach folgt aus der Proportion (2):

Wenn φ nicht im Bogenmaß gemessen ist, sondern der Winkel $\varphi = 1$ auf dem Einheitskreis einen Bogen von der

Länge w abschneidet, sind bei der Tangentenkonstruktion die Katheten PS und ST so zu wählen, daß sie sich verhalten wie der Differentialquotient $dr : d\varphi$ zu wr.

Bei der Archimedischen Spirale insbesondere, die zur Funktion (4) gehört, kommt eine andere Wahl der Winkeleinheit nur darauf hinaus, daß die Konstante c durch eine andere zu ersetzen ist. Ihre Gestalt bleibt also die alte.

Wir wollen nun die Exponentialfunktion

$$r = ae^{c\varphi} \tag{5}$$

mittels der Polarkoordinaten φ und r abbilden. Messen wir die Winkel φ nicht im Bogenmaß, so ist das zugehörige Bogenmaß ψ von der Form $w\varphi$, wo w eine Konstante vorstellt. Dann ist nach (5):

$$r = ae^{\frac{c}{w}\psi},$$

wo nun ψ das Bogenmaß bezeichnet. Diese Formel hat aber wieder die Form (5), nur ist die neue Konstante $c : w$ an die Stelle von c getreten. Da wir c in (5) irgendwie wählen können, sehen wir also, daß es in Wahrheit keine Einschränkung ist, wenn wir annehmen: Die unabhängige Veränderliche φ in (5) soll das Bogenmaß der Amplitude bedeuten.

Ist die Konstante a negativ, so sind alle Radienvektoren r negativ, so daß sie auf den Verlängerungen der freien Schenkel von φ über O hinaus aufzutragen sind, siehe P in Fig. 238. Wenn wir aber die ganze Figur um den Pol herum durch zwei Rechte drehen, kommt P nach P' auf den Schenkel selbst. Daraus folgt: Ist in (5) die Konstante a negativ, so zeichnen wir die Bildkurve zuerst für den Fall, daß a durch den absoluten Betrag von a ersetzt wird. Die Kurve ist dann durch zwei Rechte um O zu drehen, oder, was dasselbe ist, jeder Punkt P' dieser Kurve ist am Pol O zu spiegeln. Hiernach können wir uns auf den Fall beschränken, wo die Konstante a positiv ist, so daß r positiv wird. Nach (5) ist

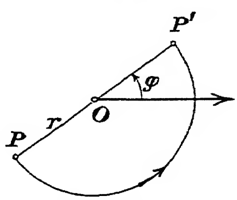


Fig. 238.

$$\frac{dr}{d\varphi} = cae^{c\varphi} = cr,$$

also zugleich mit c positiv oder negativ. Dies gibt die in Fig. 239 und Fig. 240 angedeuteten Tangentenkonstruktionen[1], bei denen $PS = cr$,

[1] Im zweiten Fall kann die Tangente auch so ermittelt werden, wie es die gestrichelten Linien andeuten.

$ST = r$ ist. Im Fall $c > 0$ wird r mit wachsendem φ größer, im Fall $c < 0$ kleiner. Im ersten Fall ergibt sich eine Kurve, die sich mit wachsendem φ immer weiter von O entfernt, im zweiten eine, die dies bei abnehmendem φ tut. Der zweite Fall läßt sich ohne Mühe auf den ersten zurückführen: Man muß nur den Drehsinn um O durch den entgegengesetzten ersetzen, wodurch ja φ in $-\varphi$, also $e^{c\varphi}$ in $e^{-c\varphi}$, d. h. c in $-c$ übergeht. Wir wollen daher die Konstante c positiv annehmen, also die Kurven betrachten, die sich mit wachsendem φ von O entfernen.

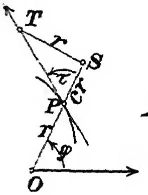


Fig. 239.

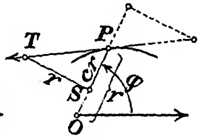


Fig. 240.

Wenn wir die Tangente im Sinne wachsender φ mit einem Pfeil versehen, bedeutet der Winkel SPT oder τ in Fig. 239 den Winkel dieser Tangente mit der Verlängerung des Radiusvektors OP über P hinaus. Da die Katheten im rechtwinkligen Dreieck PST im konstanten Verhältnis $c:1$ zueinander stehen, sieht man: Längs der ganzen Kurve ist der Winkel τ konstant. Die Kurve durchsetzt alle von O ausgehenden Strahlen unter demselben Winkel τ. Die Tangente können wir einfacher konstruieren, indem wir PS und ST nicht gleich cr und r, sondern gleich c und Eins wählen.

Nach (5) ist die Amplitude

$$\varphi = \frac{1}{c} \ln \frac{r}{a} = \frac{1}{Mc} \log \frac{r}{a}, \tag{6}$$

also proportional zum natürlichen oder gewöhnlichen Logarithmus des mit der Strecke a als Einheit gemessenen Radiusvektors. Daher heißt die Bildkurve eine logarithmische Spirale. Das Wort Spirale überhaupt bedeutet in der Mathematik eine Kurve, die sich unendlich oft um einen Punkt O herumwindet, worauf wir besonders aufmerksam machen müssen, weil der Techniker leider Schraubenlinien als Spiralen bezeichnet.

Wir kehren jetzt die Betrachtung um, indem wir eine Kurve annehmen, deren Tangenten PT mit den Radienvektoren OP überall denselben Winkel bilden. Dann stehen die Katheten PS, ST des in Fig. 235, S. 346, konstruierten Dreiecks in konstantem Verhältnis, so daß kommt:

$$\frac{dr}{d\varphi} : r = c,$$

wo c eine Konstante ist. Hieraus folgt:

$$\frac{dr}{d\varphi} = cr,$$

Nach Satz 7, S. 320, worin jetzt x mit φ und y mit r zu bezeichnen ist, folgt hieraus

$$r = a e^{c\varphi},$$

wo a konstant ist. Wir kommen also zur Exponentialfunktion (5) zurück. Daher gilt der

Satz 14: Die logarithmischen Spiralen, d. h. die Bildkurven der Exponentialfunktionen

$$r = a e^{c\varphi}$$

bei Benutzung von Polarkoordinaten, sind dasselbe wie diejenigen Kurven, die alle vom Pol der Polarkoordinaten ausgehenden Strahlen unter einem konstanten Winkel durchsetzen.

Um sie zu zeichnen, lassen wir die Amplitude φ von Null an beständig um denselben Winkel α wachsen, setzen also nach und nach für φ die Werte

$$0, \quad \alpha, \quad 2\alpha, \quad 3\alpha \ldots,$$

so daß aus (5) für den Radiusvektor die Werte hervorgehen:

$$a, \quad ae^{c\alpha}, \quad ae^{2c\alpha}, \quad ae^{3c\alpha} \ldots,$$

mithin die Radienvektoren eine geometrische Progression bilden, während die Amplituden in einer arithmetischen Progression aufeinander folgen, was nach S. 336, 337 nicht überrascht. Bei angenommenem α berechnen wir nun zwei aufeinander folgende größere Werte von r, z. B.

$$ae^{nc\alpha} \quad \text{und} \quad ae^{(n-1)c\alpha},$$

und verfahren wie in Fig. 241, wo $n = 12$, $\alpha = \frac{1}{6}\pi$ (30°) und $c = \frac{1}{4}$ angenommen worden ist, so daß $n\alpha$ gerade gleich 2π ist, also der zugehörige Punkt P_{12} auf dem Anfangsstrahl φ, der vorhergehende P_{11} um 30° rückwärts liegt. Jetzt wird der Wert

$$ae^{nc\alpha}$$

auf dem Anfangsstrahle bis zur Stelle P_{12} oder 12 und der Wert

$$ae^{(n-1)c\alpha}$$

auf dem Strahl unter 30° (α) bis zur Stelle 11 als Strecke aufgetragen.

Die Verbindungslinie beider Stellen bildet mit dem zweiten Schenkel von α einen Winkel σ. Durch den Punkt 11 ziehen wir die Gerade, die den Anfangsstrahl unter diesem Winkel σ schneidet, wodurch sich der Punkt 10 ergibt. (In Fig. 241 ist σ nahezu ein rechter Winkel).

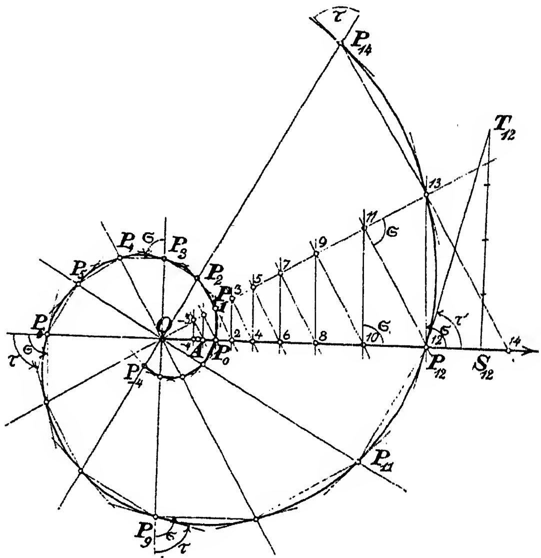


Fig. 241.

Darauf ziehen wir im Zickzack die Parallelen zu den Geraden von 12 nach 11 und von 11 nach 10. So kommen wir zu den Punkten 9, 8, 7 . . . Die Strecken von O aus bis 12, 11, 10 . . . sind nun die Längen der Radienvektoren, die zu den Amplituden $12\,\alpha$, $11\,\alpha$, $10\,\alpha$ . . . gehören, so daß sie durch Kreisbogen um O leicht auf die zugehörigen Strahlen übertragen werden können, wodurch die Punkte P_{12}, P_{11}, P_{10} . . . der Kurve hervorgehen. Die Richtigkeit leuchtet ein, da die Dreiecke $O\,12\,11$, $O\,11\,10$, $O\,10\,9$ . . . einander ähnlich sind, also $O\,12$, $O\,11$, $O\,10$ . . . die geometrische Progression bilden. Man kann das Verfahren auch über P_{12} hinaus fortsetzen (siehe 13 und 14 in Figur 241). Die Tangenten in P_{12}, P_{11}, P_{10} . . . zeichnet man, indem man den konstanten Winkel τ bestimmt, von dem oben die Rede war. Dies ist der Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks mit der anliegenden Kathete c und der gegenüberliegenden Kathete 1; er ist also im Dreieck $P_{12}\,S_{12}\,T_{12}$ konstruierbar, da ja hier $c = \frac{1}{4}$ angenommen war, so daß $P_{12}\,S_{12} = \frac{1}{4}\,S_{12}\,T_{12}$ gewählt werden muß.

Wir haben in der Figur diejenige logarithmische Spirale dargestellt, die die Bildkurve der Funktion

$$r = 1{,}5\, e^{\frac{1}{4}\varphi}$$

ist. Im 7. Beispiel, S. 332, fanden wir als Spannung eines um eine Scheibe gespannten Riemens den Wert

$$T = T_0\, e^{\varrho\varphi}.$$

Wenn ein Hanfseil auf eine eiserne Trommel gespannt wird, ist der Reibungskoeffizient $\varrho = \frac{1}{4}$. Unsere Fig. 241 stellt also durch ihre Radienvektoren die Spannungen T des Seils dar, wenn die Anfangsspannung $T_0 = 1{,}5$ $(\doteq OP_0)$ ist.

Wir haben gesehen, daß bei einer logarithmischen Spirale diejenigen Radienvektoren, die sich ergeben, wenn der Strahl um O immer durch denselben Winkel α weiter gedreht wird, eine geometrische Progression bilden, deren Glieder beständig wachsen, wenn a und c positiv sind. Drehen wir rückwärts, so nehmen die Glieder in geometrischer Progression ab. Sie werden aber dabei niemals gleich Null. Die rückwärtige Fortsetzung der logarithmischen Spirale macht daher unendlich viele Windungen um O, die immer enger werden. Aus der Konstruktion der ähnlichen Dreiecke OP_0P_1, OP_1P_2, $OP_2P_3 \ldots$, die auch bei anderen logarithmischen Spiralen in entsprechend geänderten Maßen vorkommen, folgt, daß $\triangle P_0P_1P_2 \sim \triangle P_1P_2P_3 \sim \triangle P_2P_3P_4 \ldots$ ist, d. h.: **Jedes Stück der logarithmischen Spirale ist jedem anderen Stücke derselben Kurve ähnlich, das zwischen zwei Strahlen liegt, die denselben Winkel einschließen.** Deutlich kommt dies zur Anschauung, wenn man von der Spirale ein Stück UV, siehe Fig. 242, herausgreift und so weit um O dreht, bis OU auf OP_0 liegt, wodurch UV in $U'V'$ übergeht. Hier ist das Kurvenstück $U'V'$ mit dem Stück UV kongruent und andererseits ähnlich und ähnlich gelegen mit dem Stück P_0W

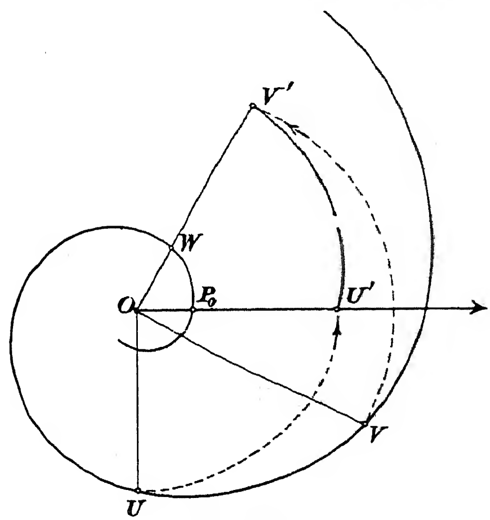


Fig. 242.

zwischen den Strahlen OU' und OV'. Dabei ist O der Ähnlichkeitspunkt [1].

Wir betrachten jetzt drei Punkte A, B, C einer logarithmischen Spirale, die so liegen, daß $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC = \alpha$ ist, siehe Fig. 243. Wird α unendlich klein, so wird die Gerade AB die Tangente von A, ebenso die Gerade BC die Tangente von B. Die in A auf AB und in B auf BC errichteten Lote treffen sich etwa in K. Da der Winkel σ, den AB mit der Verlängerung des Radiusvektors OA bildet, gleich dem Winkel ist, den BC mit der Verlängerung des Radiusvektors OB bildet, ist auch $\sphericalangle AKB = \alpha$. Daraus folgt nach dem Satze vom Peripheriewinkel, daß O und K auf einem Kreise durch A und B liegen. Wird α unendlich klein, also σ zum Tangentenwinkel τ und AB zur Tangente des Kreises, so kommt K gerade gegenüber A zu liegen, woraus folgt, daß $\sphericalangle AOK$ ein Rechter wird. Also ergibt sich: Der Schnittpunkt K der Geraden, die in einem Punkt A der logarithmischen Spirale auf der Tangente von A senkrecht steht, mit derjenigen Geraden, die in einem unendlich benachbarten Kurvenpunkte B auf der Tangente von B senkrecht steht, liegt auf dem Lote zu OA durch O.

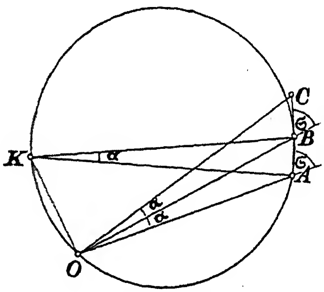


Fig. 243.

Früher haben wir Kurven angenähert dadurch gefunden, daß wir die **Tangenten** einiger Punkte zogen, also die Kurvenbogen durch **geradlinige** Stücke ersetzten. Versuchen wir, Kurven durch **Kreisstücke** zu ersetzen, so werden wir so folgern: Wäre eine Kurve $ABC\ldots$ in der Nähe von A ein Kreis, so würde seine Mitte im Schnittpunkte der Senkrechten zur Tangente von A mit der Senkrechten zur Tangente eines benachbarten Punktes B liegen, da dies Verfahren im Fall eines Kreises zu seiner Mitte führt. Wollen wir insbesondere die logarithmische Spirale in der Nähe des Punktes A durch einen Kreisbogen ersetzen, so benutzen wir daher als Mitte dieses Kreises den soeben gefundenen Punkt K. Später werden wir bei beliebigen Kurven von den sich ihnen innig anschmiegenden Kreisen

[1] Diese Eigenschaft der logarithmischen Spirale gibt Anlaß zu einer bei gewissen Schaustellungen gewünschten Wirkung: Wenn man eine Scheibe, auf der eine logarithmische Spirale gezeichnet ist, um den Pol O dreht, scheint es, als ob die Kurve aus dem Pol O herausquelle oder sich dahin zusammenziehe.

genauer zu sprechen haben. Vorläufig genügt es, zu erwähnen, daß sie Krümmungskreise, ihre Mitten Krümmungsmittelpunkte heißen. Der Krümmungsmittelpunkt der Stelle A der logarithmischen Spirale ist hiernach der Schnittpunkt K des Lotes zu OA durch O mit dem in A auf die Tangente errichteten Lot.

Um eine Anwendung zu zeigen, betrachten wir z. B. diejenige logarithmische Spirale, deren Radiusvektor für $\varphi = 0$ gleich Eins ist, so daß $a = 1$ ist, und bei der sich der Radiusvektor nach einer vollen Umdrehung um den Pol O verzehnfacht, so daß sich $r = 10$ für $\varphi = 2\pi$ ergibt, d. h. $e^{2\pi c} = 10$ und daher nach S. 298:

$$c = \frac{1}{2\pi M} = 0{,}3665\,. \tag{7}$$

Die Gleichung der Spirale lautet also:

$$r = e^{\frac{\varphi}{2\pi M}}, \tag{8}$$

und wegen $e^{\frac{1}{M}} = 10$ gehören zu den Amplituden

$$\varphi = 0, \quad \tfrac{1}{4}\pi, \quad \tfrac{1}{2}\pi, \quad \tfrac{3}{4}\pi, \quad \pi, \ldots 2\pi,$$

die Radienvektoren:

$$r = 1\,, \quad \sqrt[8]{10}, \quad \sqrt[8]{10^2}, \quad \sqrt[8]{10^3}, \quad \sqrt[8]{10^4}, \ldots \sqrt[8]{10^8}.$$

Dies sind die Zahlen 1, 1,3335, 1,7783, 2,3714, 3,1623, 4,2170, 5,6234, 7,4990, 10. Sie liefern neun Punkte $P_0, P_1 \ldots P_8$ einer Windung, siehe Fig. 244; mittels $c = 0{,}3665$ können wir in den neun Punkten sofort die Tangenten oder noch besser die Senkrechten dazu finden. Man kommt so ohne Mühe zu den zugehörigen neun Krümmungsmittelpunkten $K_0, K_1, \ldots K_8$. Schlägt man die Kreise, die diese Mitten haben und durch den jeweilig zugehörigen Kurvenpunkt gehen, so erhält man mit ihrer Hilfe eine recht gute Zeichnung der logarithmischen Spirale. Aus (8) folgt:

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \log r\,.$$

Nun ist $\varphi : 2\pi$ das Verhältnis der Amplitude zur ganzen Umdrehung um O. Wenn wir also als Winkeleinheit vier rechte Winkel benutzen, so daß 0,25 den rechten und 0,5 den gestreckten Winkel bedeutet, wird die Amplitude gleich dem gewöhnlichen Logarithmus des Radiusvektors. Wenn wir also den in Fig. 244 gezeichneten Kreis vom Radius 10 dezimal teilen und auf der Figur einen Stab, der

ebenfalls dezimal geteilt ist, als Radius drehbar um O anbringen, liest man auf dem Stabe bis zur Kurve in jeder Lage den Numerus und auf dem Kreis den zugehörigen gewöhnlichen Logarithmus ab. Diese Vorrichtung kann als Ersatz für eine Logarithmentafel dienen.

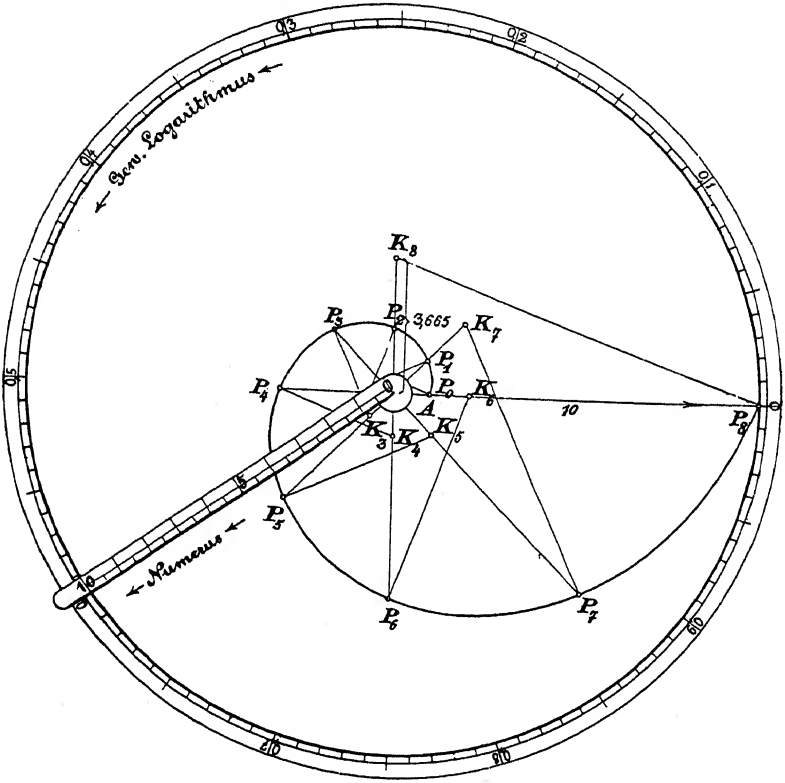


Fig. 244.

§ 4. **Beispiele.**

Die Beispiele, die wir hier bringen, dienen nicht bloß zur Einübung und Erläuterung des Früheren, sondern geben auch Gelegenheit zur Einführung einiger neuer Begriffe und Sätze.

1. **Beispiel:** Nach S. 197 ist

(1) $$y = \frac{c}{x}$$

die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, deren Asymptoten die x-Achse und y-Achse sind. Ist die Konstante c positiv, so verläuft die Kurve im ersten und dritten Quadranten. Die Hauptachse teilt den Winkel der positiven x-Achse und positiven y-Achse in gleiche Teile. Für die Scheitel S_1 und S_2 wird $x = y = \pm\sqrt{c}$, wenn die Einheiten auf beiden Achsen gleich groß sind. Die Scheitel haben deshalb vom Anfangspunkt O, dem Mittelpunkt der Hyperbel, den Abstand $\sqrt{2c}$. Wird $c = \frac{1}{2}$ gewählt, so liegt also in

$$y = \frac{1}{2x} \tag{2}$$

die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel vor, deren Hauptachse die Länge 2 hat. Diese Kurve ist in Fig. 245 dargestellt, worin OS_1 die Längeneinheit bedeutet. Wir haben hier das Achsenkreuz (d. h. die Asymptoten) in einer um 45° gedrehten Lage angenommen. Nun sei P irgendein Punkt der Hyperbel im ersten Quadranten und oberhalb der Hauptachse. Seine Abszisse sei p. Spiegeln wir P an der Hauptachse, so geht ein Punkt P' der Kurve hervor. Die Abszisse p von P ist gleich der Ordinate von P', die Ordinate $1:2p$ von P gleich der Abszisse von P'. Die Fläche OPP' zwischen den Strecken OP und OP' und dem Kurvenbogen PP' sei mit φ bezeichnet. Sie läßt sich nach dem 3. Beispiel, S. 235, berechnen. Wir haben dort $f(x)$ durch $1:2x$ zu ersetzen und a mit p zu bezeichnen; außerdem ist als obere Integralgrenze statt x die Abszisse $1:2p$ von P' zu setzen ebenso wie im letzten Summanden von (6) auf S. 235. Also kommt:

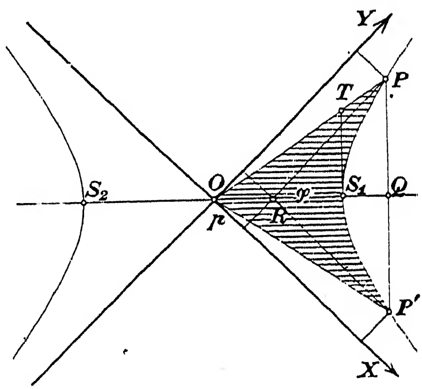


Fig. 245.

$$\varphi = \int_p^{\frac{1}{2p}} \frac{dx}{2x} + \tfrac{1}{2}p \cdot \frac{1}{2p} - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{2p} \cdot p = \int_p^{\frac{1}{2p}} \frac{dx}{2x}.$$

Nach S. 236 muß man das Integral zuerst mit unbestimmt gelassener oberer Grenze x auswerten. Es ist eine Funktion von x, die denselben Differentialquotienten $1:2x$ hat wie $\frac{1}{2}\ln x$, so daß das Integral, da es für $x = p$ gleich Null sein soll, gleich $\frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{2}\ln p$ ist. Setzen wir die obere Grenze $1:2p$ für x ein, so folgt:

$$\varphi = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2p} - \ln p\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2p^2}. \tag{3}$$

Der Mittelpunkt Q der Strecke PP' liegt auf der Hauptachse. PP' läßt sich aus dem in Fig. 245 angegebenen rechtwinkligen Dreieck $PP'R$ leicht berechnen:

$$PP'^2 = 2\left(\frac{1}{2p} - p\right)^2, \qquad \text{d. h.} \qquad QP^2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{2p} - p\right)^2.$$

Wir zeichnen zunächst die Bildkurven von e^x und e^{-x}. Schon in Fig. 220, S. 319, haben wir die Bildkurve von e^x dargestellt. Wie dort wollen wir auch jetzt die Abszisseneinheit gerade so groß wie die Ordinateneinheit annehmen. In unserer neuen Fig. 246 wird e^x durch die Kurve (a) wiedergegeben. Die Bildkurve von e^{-x} geht aus der von e^x durch Vertauschen von x mit $-x$ hervor. d. h. man braucht nur die Kurve (a) um die y-Achse herumzuklappen, um die Bildkurve (b) der Funktion e^{-x} zu bekommen. Nun bilden wir die halben Summen und Differenzen der zu gleichem x gehörigen Ordinaten von (a) und (b), wodurch sich nach (17) die Ordinaten y_1 und y_2 ergeben. In dieser Weise gehen die Bildkurven von $\mathfrak{Cos}\, x$ und $\mathfrak{Sin}\, x$ hervor. Man erkennt, daß beide für größeres positives x derjenigen Kurve nahekommen, die durch Halben der Ordinaten der Kurve (a) entsteht, da die Kurve (b) für solche x Ordinaten hat, die wegen ihrer Kleinheit kaum in Betracht kommen. Für absolut genommen größeres, aber negatives x überwiegt dagegen die Kurve (b), so daß die Bildkurve von $\mathfrak{Cos}\, x$ derjenigen Kurve nahekommt, deren Ordinaten die Hälften der Ordinaten von (b) sind, während hier die Bildkurve von $\mathfrak{Sin}\, x$ derjenigen Kurve nahekommt, die aus dieser eben genannten Kurve hervorgeht, wenn man sie um die x-Achse herunterklappt. Die Bildkurve von $\mathfrak{Sin}\, x$ hat O zum Symmetriepunkt, d. h. ist P ein Punkt der Kurve, so ergibt sich aus ihm ein zweiter Kurvenpunkt P', wenn man PO über O hinaus um die Länge PO bis P' verlängert. Anders gesagt: Die Bildkurve geht bei der Drehung durch zwei Rechte um den Anfangspunkt O in sich selbst über. Der Punkt O gehört zur Kurve. Hier ist die Steigung, wie man berechnen möge, gleich Eins. Die Kurve berührt also in O die Gerade unter 45° und hat hier einen Wendepunkt (vgl. S. 143). Die Bildkurve von $\mathfrak{Cos}\, x$ dagegen hat die y-Achse zur Symmetrieachse. Ihre tiefste Stelle, ihr sogenannter Scheitel, ist die Stelle der y-Achse mit der Ordinate Eins.

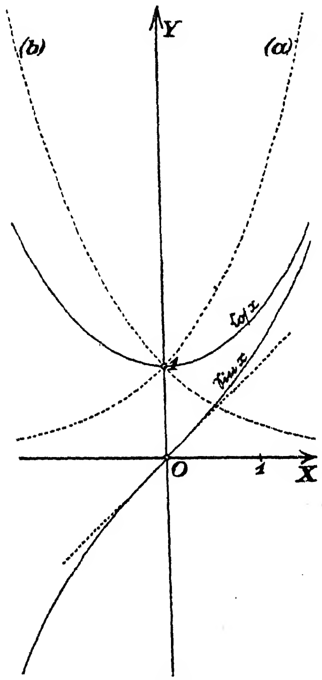


Fig. 246.

Die Bildkurve von $\mathfrak{Cos}\, x$ gibt uns das erste Beispiel einer Kurve, bei der es uns möglich ist, die Bogenlänge zu bestimmen. Die Aufgabe nämlich, die Länge eines Stückes der Bildkurve einer stetigen Funktion

$$(18) \qquad y = f(x)$$

zu finden, ist, wie wir sogleich zeigen werden, eine Anwendung des Integralbegriffs. Wir hätten diese Aufgabe schon in § 4 des 5. Kap. besprechen können, vermochten aber damals noch kein rechnerisch durchführbares Zahlenbeispiel zu geben.

Wir setzen voraus, daß die Einheiten der x-Achse und y-Achse gleich groß gewählt seien (wie auf S. 171). Dann sei die Kurve in Fig. 247 das Bild der vorgelegten Funktion (18). Auf der Kurve wählen wir zwei Punkte P_0 und P, von denen P_0 eine bestimmt gewählte Abszisse x_0 und P eine veränderlich gedachte Abszisse x habe. Die Länge s des Kurvenbogens von P_0 bis P ist dann eine Funktion der Endabszisse x, da zu jedem bestimmten x eine bestimmte Bogenlänge s gehört. Wenn die Abszisse x um dx zunimmt, wird sich P unendlich wenig auf der Kurve bis P' bewegen. Die Ordinate QP ist gleich y und die Ordinate $Q'P'$ gleich $y + dy$. Das Bogenstück PP' ist der Zuwachs des Bogens s, also das Differential ds. Da es unendlich klein ist, kann es als geradlinig aufgefaßt werden. (Wir erinnern an Fig. 33, S. 44.) Deshalb ist ds die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks PRP' mit den Katheten dx und dy. Weil die Einheiten auf beiden Achsen gleich groß sind, kommt also:

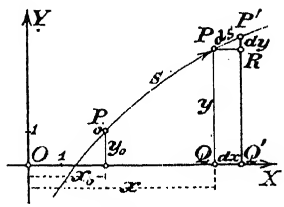


Fig. 247.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \tag{19}$$

oder:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Die Wurzel ist positiv, da s mit x wächst. Hiernach hat die Bogenlänge s als Funktion von x den Differentialquotienten:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{20}$$

Da der Bogen für $x = x_0$ den Wert 0 hat, ist s diejenige Funktion von x, die den Differentialquotienten (20) hat und für $x = x_0$ gleich Null wird, d. h. das Integral (vgl. Satz 4, S. 228):

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx. \tag{21}$$

Satz 15: Derjenige Bogen s der Bildkurve einer Funktion $y = f(x)$, der sich von der Stelle P_0 mit der Abszisse x_0 bis zur Stelle P mit der Abszisse x erstreckt, ist das Integral

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx,$$

worin $dy:dx$ als Differentialquotient der Funktion $f(x)$ eine Funktion von x ist und die Quadratwurzel positiv gewählt werden muß, wenn der Bogen s im Sinne wachsender Abszissen als positiv bezeichnet wird. Vorausgesetzt ist, daß x und y mit derselben Längeneinheit gemessen werden, die auch die Längeneinheit für s ist. (Siehe Fig. 248.)

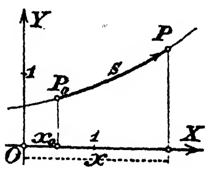


Fig. 248.

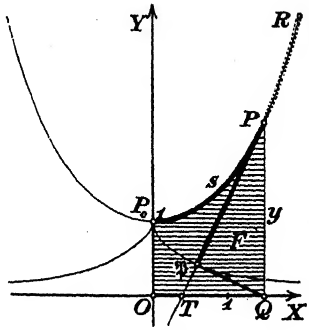


Fig. 249.

2. Beispiel: Die Bogenlänge s der Bildkurve von

$$y = \mathfrak{Cof}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{22}$$

wollen wir vom Scheitel P_0 mit der Abszisse 0 bis zu einem beliebigen Kurvenpunkte P mit der Abszisse x rechnen, siehe Fig. 249. Wegen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathfrak{Sin}\, x \tag{23}$$

ergibt sich aus Satz 15:

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2}\, dx.$$

Daß wir dies anscheinend schwierige Integral ausrechnen können, liegt daran, daß unter dem Wurzelzeichen ein vollständiges Quadrat steht, nämlich:

$$1 + \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2.$$

Daher läßt sich die Wurzel ausziehen, und es kommt:

$$s = \int_0^x \frac{e^x + e^{-x}}{2}\, dx = \int_0^x \mathfrak{Cof}\, x\, dx.$$

Nun hat $\mathfrak{Sin}\, x$ nach (15) den Differentialquotienten $\mathfrak{Cof}\, x$. Also ist s von der Form

$\mathfrak{Sin}\, x +$ konst. Für $x = 0$ muß $s = 0$ sein. Da aber auch $\mathfrak{Sin}\, 0 = 0$ ist, ergibt sich als Bogenlänge:

$$s = \mathfrak{Sin}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,. \tag{24}$$

Wir wollen ferner die Fläche F berechnen, die zwischen der x-Achse, der Bildkurve, der y-Achse und der Ordinate von P liegt. Nach Satz 5, S. 229, ist:

$$F = \int_0^x \mathfrak{Cof}\, x\, dx\,.$$

Also ergibt sich für F genau derselbe Wert wie für s, nämlich:

$$F = \mathfrak{Sin}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,. \tag{25}$$

Der Unterschied besteht darin, daß man s mit der Längeneinheit und F mit der Flächeneinheit messen muß. Die Fläche F ist daher der Inhalt des Rechtecks, dessen Grundlinie gleich der Bogenlänge $P_0 P$ oder s und dessen Höhe die Längeneinheit ist. Nach der dritten Formel (13) ist ferner wegen (22) und (24):

$$y^2 = s^2 + 1\,,$$

d. h. mit der Hypotenuse y und den Katheten s und 1 läßt sich ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Die Tangente von P treffe die x-Achse in T, und die Ordinate von P habe den Fußpunkt Q. Die Steigung der Tangente ist $QP : TQ$ oder $y : TQ$ und hat nach (23) und (24) den Wert $s : 1$, so daß

$$\frac{y}{TQ} = \frac{s}{1}$$

ist. Das rechtwinklige Dreieck PTQ ist daher dem soeben erwähnten rechtwinkligen Dreieck ähnlich. Dies geht, da es die Hypotenuse y hat, einfach dadurch hervor, daß wir von Q das Lot $Q\mathfrak{P}$ auf die Tangente PT fällen, da dann das Dreieck $PQ\mathfrak{P}$ dem Dreieck PTQ ähnlich wird, woraus $\mathfrak{P}P = s$ und $Q\mathfrak{P} = 1$ folgt. Hiernach läßt sich die Bogenlänge $s = \widehat{PP_0}$ einfach dadurch bestimmen, daß man vom Fußpunkte Q der Ordinate von P das Lot $Q\mathfrak{P}$ auf die Tangente von P fällt. Es schneidet als Strecke $\mathfrak{P}P$ die Bogenlänge s ab. Zugleich hat sich ergeben, daß $Q\mathfrak{P}$ die konstante Länge Eins hat.

Hieraus lassen sich weitere Schlüsse ziehen: Die Bildkurve von $\mathfrak{Cof}\, x$ sei auf dem Zeichenbrett erhaben dargestellt, und ein unausdehnbarer biegsamer Faden sei von P_0 an längs der Kurve hingespannt und weiter draußen, etwa in R, an der Kurve befestigt. Wird dann in P_0 ein Zeichenstift an den Faden geknüpft und von der Kurve entfernt, indem man den Faden straff anspannt, so beschreibt der Stift eine von P_0 ausgehende Kurve. Da das nicht mehr anliegende Fadenstück dabei stets gleich dem verlassenen Bogenstück $P_0 P = s$ ist, erhellt, daß diese neue Kurve der Ort des soeben konstruierten Punktes $\mathfrak{P}$ ist. Eine so durch Abwicklung eines gespannten unausdehnbaren Fadens aus einer festen Kurve abgeleitete neue Kurve heißt eine Evolvente der ursprünglichen Kurve. Der Ort von $\mathfrak{P}$ ist demnach eine Evolvente der Bildkurve von $\mathfrak{Cof}\, x$. In jedem Zeitteilchen geschieht das Abwickeln so, als ob sich $\mathfrak{P}P$ um den Berührungspunkt P drehe, da ja die Tangente $\mathfrak{P}P$ der ursprünglichen Kurve außer P noch einen unendlich dicht daneben liegenden Punkt der ursprünglichen Kurve enthält. Die

Tangente der Bahn von $\mathfrak{P}$ ist daher beständig senkrecht zur jeweiligen Tangente $\mathfrak{P}P$ der alten Kurve, d. h. sie ist die Gerade $\mathfrak{P}Q$. Da die Strecke $\mathfrak{P}Q$ die konstante Länge Eins hat, folgt: Diese Evolvente der Bildkurve von $\mathfrak{Cof}\, x$ hat die merkwürdige Eigenschaft, daß ihre Tangente $\mathfrak{P}Q$, gemessen vom Berührungspunkte $\mathfrak{P}$ bis zum Schnittpunkte Q mit der x-Achse, die konstante Länge Eins hat. Man kann sich diese Evolvente also auch so entstanden denken: In O sei ein längs der x-Achse beweglicher Punkt; mittels eines unausdehnbaren Fadens sei daran eine punktförmige Masse in P_0 angeknüpft. Nun werde der erste Punkt längs der x-Achse in Bewegung gesetzt; er schleppt die Masse mit, und zwar so, daß jederzeit die Lage des gespannten Schleppfadens zugleich die Tangente der Schleppkurve oder Traktrix ist. Da dieser Faden die konstante Länge Eins hat, ist die Schleppkurve die Kurve der Punkte $\mathfrak{P}$. Jene Evolvente der Bildkurve von $\mathfrak{Cof}\, x$ ist demnach eine Schleppkurve oder Traktrix eines sich längs der x-Achse bewegenden Punktes. Läuft der Punkt von O auf der negativen x-Achse hin, so entsteht der linke Zweig der Traktrix in Fig. 249.

3. Beispiel: Wir knüpfen an das 2. Beispiel auf S. 217 an. Wie in der Anmerkung auf S. 218 erwähnt wurde, ergibt sich die Kettenlinie als Gleichgewichtsfigur eines unausdehnbaren schweren homogenen Fadens, der an zwei etwa gleich hohen Punkten A und B aufgehängt sei. Um ihre Form zu ermitteln, können wir wie in jenem Beispiel schließen; nur tritt an die Stelle des dort angenommenen Gewichts kx des an einem gewichtslosen Faden hängenden schweren Stabes, und zwar des Stabstückes UQ, siehe Fig. 162, S. 217, jetzt das Gewicht des schweren Fadenstückes von O bis P. Wenn die Längeneinheit dieses Fadens das Gewicht k hat und die Bogenlänge von O bis P mit s bezeichnet wird, ist also nunmehr ks statt kx zu setzen. Aber damals wurde die Fadenspannung in P mit s und die in O mit s_0 bezeichnet. Zur Vermeidung von Verwechslungen mit der Bogenlänge s wollen wir diese Spannungen jetzt T und T_0 nennen. Dabei ist T_0 eine Konstante. Nun ergibt eine Überlegung wie damals, daß längs der Kettenlinie

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ks}{T_0}$$

sein muß. Hierfür können wir schreiben:

$$s = \frac{T_0}{k}\,\frac{dy}{dx},$$

d. h. längs der Kettenlinie ist die von der tiefsten Stelle an bis zu irgendeinem Kurvenpunkte P gemessene Bogenlänge s proportional zur Steigung der Kurve in P, vorausgesetzt, daß die x-Achse wagerecht ist.

Man bemerkt, daß bei der im vorigen Beispiele betrachteten Bildkurve von $y = \mathfrak{Cof}\, x$ die Bogenlänge s gerade gleich der Steigung ist, wie die Formeln (23) und (24) zeigen. Deshalb gehört jene Kurve zu den Kettenlinien. Aber die soeben gefundene kennzeichnende Eigenschaft der Kettenlinie kommt auch der Bildkurve der allgemeineren Funktion

$$y = a\,\mathfrak{Cof}\,\frac{x}{a}, \tag{26}$$

d. h. nach (10) der Funktion

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \tag{27}$$

zu, wo a eine Konstante sei. In der Tat ist hier mit Rücksicht auf (10):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = \mathfrak{Sin}\,\frac{x}{a}, \tag{28}$$

folglich nach Satz 15 und nach (13) die von $x = 0$ an gerechnete Bogenlänge

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \mathfrak{Sin}^2 \frac{x}{a}}\,dx = \int_0^x \mathfrak{Cof}\,\frac{x}{a}\,dx.$$

Nun hat aber $\mathfrak{Sin}\,x$ nach (15) den Differentialquotienten $\mathfrak{Cof}\,x$. Demnach hat $\mathfrak{Sin}\,(x : a)$ als Differentialquotienten $\mathfrak{Cof}\,(x : a)$, dividiert mit a, d. h. s hat die Form:

$$s = a\,\mathfrak{Sin}\,\frac{x}{a} + \text{konst.}$$

Weil $s = 0$ für $x = 0$ und auch $\mathfrak{Sin}\,0 = 0$ ist, hat die Konstante den Wert Null. Also ist bei der Kurve (26) die Bogenlänge:

$$s = a\,\mathfrak{Sin}\,\frac{x}{a}. \tag{29}$$

Hieraus und aus (28) folgt:

$$s = a\,\frac{dy}{dx}.$$

Demnach ist die Bogenlänge s gleich dem a-fachen der Steigung. Die Kurve (26) gehört deshalb zu den Kettenlinien.

Umgekehrt kann man zeigen, daß jede Kettenlinie die Bildkurve einer Funktion von der Form (26) ist. Hierauf gehen wir nicht ein. Wir erwähnen es nur, um zu begründen, daß wir diese Bildkurven kurzweg Kettenlinien nennen. Schreibt man (26) in der Form

$$\frac{y}{a} = \mathfrak{Cof}\,\frac{x}{a},$$

so sieht man, daß jede Kettenlinie aus der Bildkurve von $y = \mathfrak{Cof}\,x$ dadurch hervorgeht, daß man alle Abszissen und Ordinaten mit der Konstante $1 : a$ multipliziert, d. h. die Zeichnung ähnlich vergrößert oder verkleinert. Deshalb sind alle Kettenlinien einander ähnlich, insbesondere mit der im vorigen Beispiel betrachteten Bildkurve von $\mathfrak{Cof}\,x$. Ketten haben also, wenn sie homogen sind, sämtlich die Form der Kurve in der früheren Fig. 249. Spannt man eine Kette ziemlich straff, so scheint es allerdings anders zu sein. Aber in diesem Fall wird die Kurve einem solchen Teil der Kurve in jener Figur ähnlich, der sehr nahe bei der tiefsten Stelle P_0 liegt. Wählt man die Konstante a negativ, so werden alle Ordinaten der Kettenlinie (26) negativ. Da aber die Kette stets ein Tal bildet, kommt dieser Fall nicht vor, wenn man die y-Achse nach oben positiv rechnet. Die Konstante a ist also positiv anzunehmen.

Die Kettenlinien hielt der berühmte Naturforscher Galilei (1564 bis 1642) noch für Parabeln. Erst die drei großen Physiker und Mathematiker Huygens (1629 bis 1695), Leibniz und Johann Bernoulli erkannten fast gleichzeitig im Jahre 1691 die wahre Natur der Kettenlinien. Wie diese Kurven von den Parabeln abweichen, wollen wir an der Bildkurve von $\mathfrak{Cof}\,x$, der ja alle Kettenlinien ähnlich sind, näher erläutern. Hier ist

$$y = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}). \tag{30}$$

Nach Satz 6, S. 318, gilt nun für jedes x die Reihenentwicklung

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots,$$

also auch:

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \dots,$$

so daß sich aus (30) ergibt:

$$y = 1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots$$

Nahe bei der tiefsten Stelle, d. h. für kleine absolute Werte von x, ist schon das dritte Glied dieser unendlichen Reihe sehr klein, in noch höherem Maße gilt dies von den späteren Gliedern. In der Nähe der tiefsten Stelle ist daher angenähert:

$$(31) \qquad y = 1 + \tfrac{1}{2}x^2,$$

und die Bildkurve dieser Funktion ist bekanntlich eine Parabel. Für $x = 1$ verhalten sich die Ordinaten der Kettenlinie (30) und der Parabel (31) zueinander wie

$$\left(e + \frac{1}{e}\right) : 3 = 1{,}03 : 1.$$

Die Höhe der Kettenlinie ist also hier um 3% größer als die der Parabel. Siehe Fig. 250.

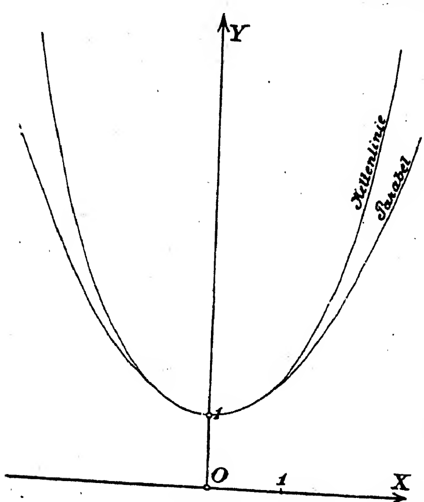


Fig. 250.

4. Beispiel: In der Theorie der Gewölbe tritt als Stützlinie für den Fall einer wagerechten oberen Belastungslinie die Gewölbelinie auf, nämlich die Bildkurve einer Funktion von der Form

$$y = -\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = -c\,\mathfrak{Cof}\,\frac{x}{a},$$

die auch Klinoide genannt wird. Hier sind a und c positive Konstanten. Wegen

$$y = -\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

gehen die Gewölbelinien nach S. 88 aus den Kettenlinien

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

durch Affinität hervor, indem man alle Ordinaten nach einem konstanten Verhältnis ändert und alsdann die Figur um die x-Achse herumklappt.

5. Beispiel: Die folgende Tafel gibt, in Tausenden ausgedrückt, die Bevölkerungszahl des Deutschen Reiches an, wie sie bei acht Volkszählungen von 1871—1905 ermittelt wurde:

1871	41 059	1885	46 856	1900	56 367
1875	42 727	1890	49 428	1905	60 641
1880	45 234	1895	52 280		

Nach S. 311 kann man annehmen, daß die Zunahme der Bevölkerungszahl in jedem der sieben Zwischenräume, von denen der erste vier und jeder andere fünf Jahre umfaßt, dem Gesetze des organischen Wachsens gefolgt sei. Diese Annahme ist jedenfalls vernünftiger als die des gewöhnlichen Zinseszinsgesetzes, nach dem es ja so aufzufassen wäre, als ob sich die Zahl immer nach gerade je einem Jahr plötzlich vergrößerte. Man berechne den für jeden der sieben Perioden hervorgehenden Prozentsatz p, fürs Jahr gemeint. Nach Satz 9, S. 323, hat man anzusetzen:

$$y = a\,e^{\frac{p}{100}x}.$$

Dabei bedeutet a die Bevölkerungszahl am Beginn und y die am Schluß einer Periode, ausgedrückt in Tausenden, während x die Anzahl der Jahre der Periode angibt. Logarithmische Berechnung liefert als Werte des Prozentsatzes p für die sieben Zwischenräume:

1871—1875	0,995	1890—1895	1,122
1875—1880	1,140	1895—1900	1,505
1880—1885	0,705	1900—1905	1,462
1885—1890	1,068		

Das Gesetz des organischen Wachsens gilt also nicht genau für die ganze Zeit von 34 Jahren, da sich sonst für p in allen sieben Perioden derselbe Wert ergeben müßte. Das ist nicht überraschend. Einen Maßstab für die Stärke der Bevölkerungszunahme in allen 34 Jahren bekommt man aber doch, wenn man mit Benutzung der ersten und letzten Bevölkerungszahl allein und unter Zugrundelegung des Gesetzes des organischen Wachsens für $x = 34$ den Prozentsatz p berechnet. Dann ergibt sich $p = 1{,}147$. Nimmt man an, daß die Vermehrung der Bevölkerungszahl im Deutschen Reich auch während der Periode von 1905 bis 1910 nach dem Gesetze des organischen Wachsens mit dem jährlichen Prozentsatz 1,147 stattfand, so ergibt sich für 1910 nach der oben angegebenen Formel (worin jetzt a, p, x gegeben sind und y gesucht wird) die Bevölkerungszahl 64 222 (in Tausenden). Nimmt man dagegen an, während der Periode von 1905 bis 1910 gelte derselbe Prozentsatz 1,462 wie in der vorhergehenden Periode von 1900 bis 1905, so kommt 65 240 (in Tausenden) heraus. In Wahrheit hat sich 1910 die Zahl 64 926 (in Tausenden) ergeben, die zwischen beiden liegt, und der jährliche Prozentsatz war in der Periode von 1905 bis 1910 gleich 1,366. Außerdem kann man aus den Werten von p Schlüsse über die Gesundheit der Entwicklung des deutschen Volkes in dem Zeitraume von 1871 bis 1910 ziehen. Wir weisen nur darauf hin, daß der Prozentsatz von 1895 bis 1900 am größten war.

6. Beispiel: Wichtig ist die Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Volumen, Druck und Temperatur eines Dampfes, Gases oder Gasgemisches. Ist v das Volumen eines Kilogramms des Gases, wie wir der Kürze halber sagen wollen, p der Druck in Kilogrammen, den es auf 1 qm der Behälterwand übt, d. h. seine spezifische Spannung, und T seine absolute Temperatur in Celsius, d. h. von -273^0 C an gerechnet, so gilt, wie die Physik lehrt, das Gesetz:

(32)
$$p\,v = R\,T,$$

wo R eine das betreffende Gas kennzeichnende positive Konstante bedeutet. Setzt das Gas unter den Bedingungen, die eine bestimmte Maschine gibt, einen Kolben in Bewegung, so ändern sich v, p und T. Das dabei geltende Gesetz kann sehr verschiedenartig sein, d. h. wenn wir zu jedem Volumen v als Abszisse den dabei herrschenden Druck p als Ordinate in ein $v\,p$-Achsenkreuz eintragen, wird der Verlauf des Vorganges durch eine gewisse Kurve, die Druckkurve, dargestellt, die für verschiedene Maschinen verschieden sein kann. Ist sie bekannt, so läßt sich nach (32) die jeweilige Temperatur T berechnen. Man kann sie in derselben Figur als Ordinate eintragen, wodurch die zugehörige Temperaturkurve hervorgeht. Ihre Konstruktion ist leicht: Es seien nämlich v_0, p_0, T_0 die Anfangswerte von v, p, T. Dann liefern v_0, p_0 als Bildpunkt $(v_0; p_0)$ den Anfangspunkt P_0 der Druckkurve, siehe Fig. 251. Die Einheit der Temperatur können wir in der Zeichnung so wählen, daß die Ordinate von P_0 zugleich die Anfangstemperatur T_0 vorstellt. Nach (32) ist nun

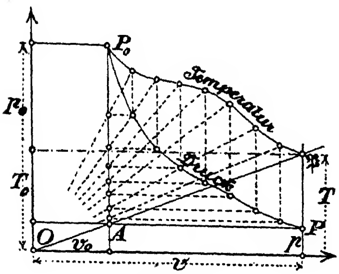


Fig. 251.

$$p_0 v_0 = R\,T_0,$$

so daß folgt:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{p\,v}{p_0\,v_0}.$$

Da wir in der Zeichnung $T_0 = p_0$ gewählt haben, wird also T gleich $p\,v : v_0$. Ziehen wir durch den Punkt P oder $(v : p)$ der Druckkurve die Parallele zur Abszissenachse, die die Ordinate von P_0 in A treffe, und bringen wir die Gerade OA mit der Ordinate von P in $\mathfrak{P}$ zum Schnitte, so verhält sich die Ordinate von $\mathfrak{P}$ zu der von A, d. h. zu p, wie die Abszisse v von P zur Abszisse v_0 von P_0, so daß die Ordinate von $\mathfrak{P}$ gleich $p\,v : v_0$ oder T ist. Mithin liegt $\mathfrak{P}$ auf der Temperaturkurve. In Fig. 251 ist so die Temperaturkurve, die in der Technik auch die Charakteristik heißt, für eine willkürlich gezeichnete Druckkurve ermittelt worden. Man muß im Auge behalten, daß T_0 durch die Ordinate von P_0 gemessen wird, und muß dementsprechend auf der Ordinatenachse die Temperaturskala einzeichnen.

Insbesondere werde jetzt vorausgesetzt, daß das Gas bei seiner Ausdehnung Wärme weder abgebe noch von seiner Umgebung empfange, sich also, wie man sagt, adiabatisch ändere. Um die Formeln dafür abzuleiten, stellen wir uns eine unendlich kleine derartige Änderung vor, bei der v, p und T um dv, dp und dT wachsen mögen. Die dabei geleistete Arbeit ist (wie im 8. Beispiel, S. 294) gleich $p\,dv$. Sie entzieht dem Gas, da von außen keine Wärme zutritt und keine nach außen abgegeben wird, eine gewisse unendlich kleine Wärmemenge, so daß die Temperatur T abnimmt. Daher wird dT negativ, wenn dv positiv ist. Da aber v, p, T mit verschiedenen Einheiten gemessen werden, ist die Arbeit $p\,dv$ nicht geradezu gleich $-dT$, sondern dieses Differential ist noch mit einer gewissen positiven Konstanten E zu multiplizieren, so daß wir haben:

$$p\,dv = -E\,dT.$$

Da nun nach (32) der Druck $p = RT : v$ ist, folgt:

$$\frac{RT}{v}\,dv = -E\,dT \qquad \text{oder} \qquad \frac{dT}{T} = -\frac{R}{E}\,\frac{dv}{v}.$$

Weil ferner

$$\frac{d\ln T}{dT} = \frac{1}{T}, \qquad \frac{d\ln v}{dv} = \frac{1}{v}$$

ist, können wir

$$\frac{dT}{T} = d\ln T, \qquad \frac{dv}{v} = d\ln v$$

in die letzte Formel einführen, wodurch hervorgeht:

$$d\ln T = -\frac{R}{E}\,d\ln v$$

oder:

(33)
$$\frac{d\ln T}{d\ln v} = -\frac{R}{E}.$$

Hier ist die rechte Seite konstant. Man kann deshalb aus (33) einen wichtigen Schluß ziehen. Um dabei vollkommen deutlich zu sein, wollen wir vorübergehend $\ln v$ mit x und $\ln T$ mit y bezeichnen. Dann besagt (33):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{R}{E},$$

wo die rechte Seite konstant ist. Hiernach ist y eine Funktion von x mit konstanten Differentialquotienten. Folglich muß y eine lineare Funktion von x sein, nämlich:

$$y = -\frac{R}{E}\,x + \text{konst.}$$

Da nun x und y die Logarithmen $\ln v$ und $\ln T$ bedeuteten, kommt also:

$$\ln T = -\frac{R}{E}\ln v + \text{konst.}$$

Wenn die Temperatur T für $v = v_0$ den Anfangswert T_0 hat, ist auch:

$$\ln T_0 = -\frac{R}{E}\ln v_0 + \text{konst.}$$

Subtraktion der zweiten Gleichung von der ersten gibt:

$$\ln\frac{T}{T_0} = -\frac{R}{E}\ln\frac{v}{v_0},$$

d. h. es ist:

(34)
$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{v}{v_0}\right)^{-\frac{R}{E}}.$$

Hierdurch wird T bei dem adiabatischen Vorgang als Funktion von v bestimmt. Nach (32) ist ferner $p = RT : v$, so daß sich für p die Funktion von v ergibt:

$$p = \frac{R}{v}\,T_0\left(\frac{v}{v_0}\right)^{-\frac{R}{E}}.$$

Nach (32) ist aber auch $T_0 = p_0 v_0 : R$. Also kommt:

(35) $$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{v}{v_0}\right)^{-\frac{R}{E}-1}.$$

Wir wollen die positive Konstante $(R : E) + 1$ mit n bezeichnen. Für trockene Luft z. B. ist sie gleich 1,41. Wir haben nun statt (35) und (34):

(36) $$\left\{\begin{array}{ll} & \dfrac{p}{p_0} = \left(\dfrac{v}{v_0}\right)^{-n}, \quad \dfrac{T}{T_0} = \left(\dfrac{v}{v_0}\right)^{-n+1} \\ \text{oder:} & \\ & p v^n = p_0 v_0^n, \quad T v^{n-1} = T_0 v_0^{n-1}. \end{array}\right.$$

Wenn sich das Gas dagegen isothermisch ändert, d. h. wenn dafür gesorgt wird, daß seine Temperatur stets den Anfangswert T_0 behält, folgt aus (32) einfacher:

(37) $$pv = p_0 v_0, \quad T = T_0.$$

Wie man sieht, gehen diese Formeln aus den Formeln (36) hervor, sobald man darin die Konstante $n = 1$ setzt.

Bei den Maschinen treten im allgemeinen andere Vorgänge auf; man hat aber bemerkt, daß für jede einzelne Zustandsänderung, z. B. während eines Kolbenhubes, mit großer Annäherung ein Gesetz gilt, das ebenfalls in der Form (36) dargestellt werden kann; nur hat dabei die Konstante n einen anderen Wert als beim adiabatischen Vorgang. Sie ist aber immer mindestens gleich Eins. Man nennt jede Zustandsänderung, die Gesetzen von der Form (36) folgt, polytropisch. Die zugehörige Druckkurve heißt eine polytropische Kurve[1]. Alle polytropischen Kurven verlaufen im ersten Quadranten, da v und p positiv sind. Wenn wir die positive Konstante $p_0 v_0^n$ mit c bezeichnen, können wir die Beziehung zwischen p und v beim polytropischen Vorgang so ausdrücken:

(38) $$p = \frac{c}{v^n}.$$

Die polytropischen Kurven sind demnach die Bildkurven der Funktionen von der Form $y = c : x^n$. Man nennt sie auch höhere Hyperbeln, weil für $n = 1$ die Gleichung der gleichseitigen Hyperbeln $y = \text{konst.} : x$ (vgl. S. 197) hervorgeht. Nach (38) ist der Differentialquotient

(39) $$\frac{dp}{dv} = -\frac{nc}{v^{n+1}}$$

wegen $n > 0$ und $c > 0$ negativ. Die polytropischen Kurven fallen also beständig und schmiegen sich nach (38) im Unendlichfernen der positiven p-Achse und der positiven v-Achse an, die mithin Asymptoten sind (vgl. S. 193). Aus (36) folgt:

(40) $$\log p = -n \log v + \log p_0 + n \log v_0,$$

d. h. $\log p$ ist eine ganze lineare Funktion von $\log v$, denn alle sonst auftretenden Größen sind Konstanten. Wenn wir also nicht v und p, sondern $\log v$ und $\log p$ als Abszisse und Ordinate benutzen, ergibt sich nach Satz 4, S. 31, eine gerade Linie von der Steigung $-n$. Ein erstes Verfahren zum Zeichnen polytropischer

[1] Die Temperaturkurve ist auch eine polytropische Kurve, da sich die Formel für T von der für p nur durch den Exponentenwert unterscheidet.

Kurven ist daher dieses: In einer Hilfsfigur, siehe Fig. 252, tragen wir $\log v_0$ und $\log p_0$ als Abszisse und Ordinate auf, wodurch wir zu einem Punkte $\mathfrak{P}_0$ kommen. Durch ihn ziehen wir die Gerade mit der Steigung $-n$. Wir haben hier die Einheiten auf beiden Achsen gleich groß und $n = 1{,}4$ angenommen, außerdem $v_0 = 0{,}5$, $p_0 = 6$

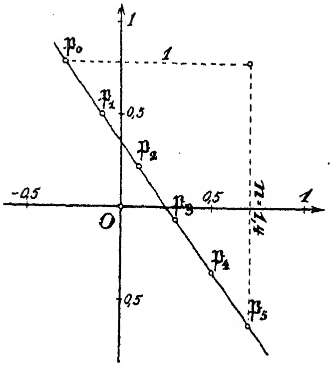


Fig. 252.

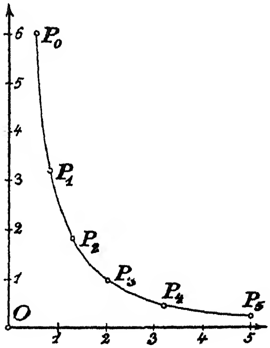


Fig. 253.

gewählt. Von der Hilfsfigur gehen wir zur Hauptfigur 253 über, indem wir einige Punkte $P_1, P_2 \ldots$ der Geraden in Fig. 252 herausgreifen, ihre Abszissen und Ordinaten ablesen, sie als gewöhnliche Logarithmen auffassen, in der Logarithmentafel die zugehörigen Numeri suchen und nun diese als Abszissen und Ordinaten v, p in der Hauptfigur einzeichnen. So kommen wir zu den Punkten $P_1, P_2, P_3 \ldots$ einer polytropischen Kurve. Da nach (38) und (39):

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{np}{v} \tag{41}$$

ist, können wir auch die Tangenten der Punkte P_0, P_1, $P_2 \ldots$ leicht ermitteln:

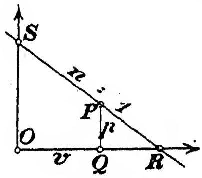


Fig. 254.

Ist P ein Punkt $(v; p)$ der polytropischen Kurve und schneidet seine Tangente, siehe Fig. 254, die v-Achse in R und die p-Achse in S, so wird, wenn Q der Fußpunkt der Ordinate von P ist, die Steigung der Tangente gleich $-QP:QR$. Weil $QP = p$ ist, folgt mithin aus (41), daß $QR = v:n$ ist. Wegen $OQ = v$ ergibt sich $OQ:QR$ oder $SP:PR = n:1$. Der Kurvenpunkt teilt also seine von der Ordinaten- und Abszissenachse begrenzte Tangente im Verhältnis von n zu 1.

Ein anderes theoretisch richtiges, aber praktisch ungenaues Verfahren zum Zeichnen der polytropischen Kurven ergibt sich so: Sind v_0, p_0 und v_1, p_1 zwei zusammengehörige Wertpaare, so wollen wir weiterhin für v solche Werte $v_2, v_3 \ldots$ wählen, für die

$$\frac{v_0}{v_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_2}{v_3} = \cdots$$

ist. Da diese Proportionen richtig bleiben, wenn man alle Größen in die n-te Potenz

erhebt, folgt für die zugehörigen Werte von p nach (38) ebenfalls:

$$\frac{p_0}{p_1} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{p_2}{p_4} = \cdots$$

Zur Konstruktion berechnen wir zu zwei nach Gutdünken gewählten Werten v_0 und v_1 nach (38) die Werte von p_0 und p_1. Die zugehörigen Bildpunkte seien P_0 und P_1, siehe Fig. 255, die Fußpunkte ihrer Lote auf die v-Achse seien Q_0 und Q_1, die ihrer Lote auf die p-Achse R_0 und R_1. Wenn wir nun durch R_0 und Q_1 die Geraden unter 45^0 (oder einem anderen bequemen Winkel) ziehen, gelangen wir, wie aus der Figur sofort verständlich ist, zu Hilfspunkten H und G, durch die wir die Geraden h und g nach O ziehen. Die angegebene Zickzackkonstruktion liefert dann die zu v_2, p_2, zu v_3, p_3 usw. gehörigen Kurvenpunkte. Natürlich wird die Konstruktion wegen der Häufung der unvermeidlichen Zeichenfehler von Schritt zu Schritt weniger zuverlässig.

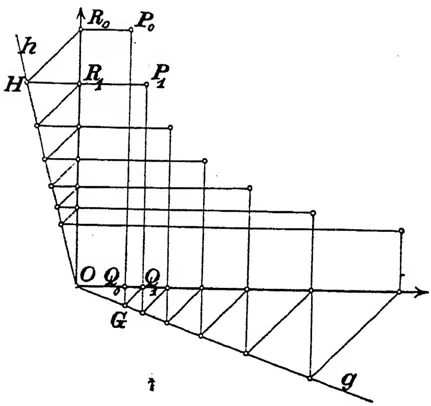


Fig. 255.

Besser ist das folgende dritte Verfahren: Ist v_2 das geometrische Mittel $\sqrt{v_0 v_1}$ von v_0 und v_1, so ist nach den angegebenen Proportionen auch p_2 das geometrische Mittel $\sqrt{p_0 p_1}$ von p_0 und p_1. Wir berechnen also zunächst wieder zwei zusammengehörige Wertepaare v_0, p_0 und v_1, p_1, wählen dabei aber v_0 und v_1 weit entfernt voneinander und finden durch die in Fig. 256 angegebene Konstruktion (die in Fig. 228, S. 338, nur für die Ordinaten ausgeführt wurde) den zu v_2 und p_2 gehörigen Zwischenpunkt. Nach demselben Verfahren kann man weitere Punkte einschalten, wie es die Figur zeigt.

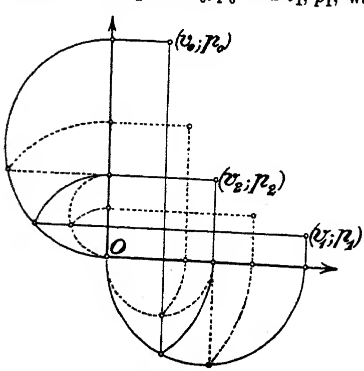


Fig. 256.

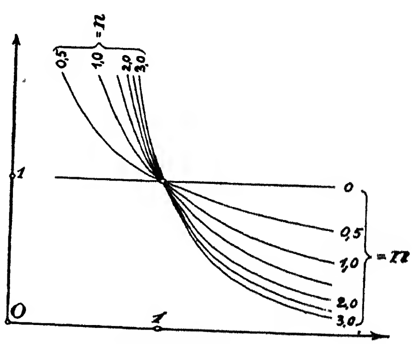


Fig. 257.

In Fig. 257 gehen durch denselben Punkt (hier ist $v_0 = 1$, $p_0 = 1$ gewählt worden) polytropische Kurven mit den Exponenten $n = 0$, 0,5, 1, 1,5, 2, 2,5, 3. Sie schmiegen sich der v-Achse um so mehr an, je größer n ist, und der p-Achse um so mehr, je kleiner n ist. Für $n = 1$ geht eine gleichseitige Hyperbel (vgl. S. 197) hervor. Ihre Zeichnung ist besonders bequem, da bei ihr in Fig. 258 stets $SP_1 = P_2R$ nach S. 196 ist, so daß man aus einem Punkte P_1 sofort beliebig viele andere Punkte P_2 der Kurve ableiten kann.

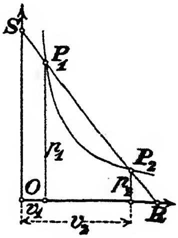


Fig. 258.

In der Praxis kommt die Aufgabe vor: Eine polytropische Kurve liegt vor; gesucht wird ihr Exponent n. Die Dampf- oder Gasmaschine zeichnet nämlich die Kurve mittels einer Vorrichtung als Diagramm auf. Dabei pflegen die Abszissen und Ordinaten v und p nicht gerade die auf S. 367 angegebenen Einheiten zu haben. Aber es ist zu beachten, daß die erste Formel (36), nämlich:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{v}{v_0}\right)^{-n}, \tag{42}$$

nur die Verhältnisse der Volumina und Drucke enthält, weshalb es gestattet ist, v und p auf andere Einheiten zu beziehen. Daher darf unter p der ganze Druck des Maschinenkolbens verstanden werden, und die Größe v darf das Volumen des arbeitenden Dampfes oder Gases bezeichnen oder auch, wenn dies in einem Zylinder eingeschlossen ist, die dazu proportionale Zylinderhöhe, d. h. den jeweils zurückgelegten Kolbenweg vorstellen. In diesem Fall ist aber wohl zu beachten, daß der Kolben das Gas nicht vollständig zusammenpreßt, sondern nur bis v_0. Daher hat man, wenn v von v_0 bis v_1 wächst und $v_1 - v_0$ also den ganzen Kolbenweg bedeutet, unter v_0 die Höhe desjenigen Zylinders zu verstehen, dessen Querschnitt gleich dem des Kolbens und dessen Volumen gleich dem Volumen desjenigen Raumes der Maschine ist, den das zusammengepreßte Gas vor der Ausdehnung einnimmt und der meistens kein Zylinder ist.

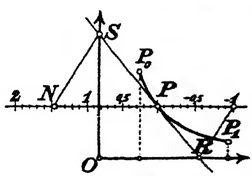


Fig. 259.

Ein erstes Verfahren, für eine gezeichnet vorliegende polytropische Kurve $P_0 P_1$, siehe Fig. 259, den Exponenten n zu bestimmen, ist dies: In irgendeinem Punkte P der Kurve ziehen wir durch Anlegen des Lineals die Tangente, die die Achsen in R und S treffe. Nach Fig. 254 ist $n = SP : PR$, d. h. gleich der Maßzahl bei N auf dem eingezeichneten Maßstabe.

Gegen dies Verfahren ist einzuwenden, daß das Ziehen der Tangente in P ungenau ist, zumal wenn die Kurve nicht sorgfältig gezeichnet vorliegt. Besser ist das folgende zweite Verfahren: Wenn wir statt der Abszissen v und Ordinaten p ihre Logarithmen als Abszissen und Ordinaten benutzen, ergibt sich nach S. 370 eine gerade Linie mit der Steigung $-n$, vorausgesetzt, daß die polytropische Kurve völlig genau ist, andernfalls eine nur wenig von einer Geraden abweichende Linie. Wir wählen also einige Punkte $P_0, P_1, P_2 \ldots$ der polytropischen Kurve in Fig. 260 aus, messen ihre Abszissen und Ordinaten und schlagen die zugehörigen Logarithmen nach. Diese tragen wir in einem neuen Achsenkreuz in Fig. 261 als Abszissen und Ordinaten ein, wodurch Punkte $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2 \ldots$ hervorgehen. Absichtlich haben wir in Fig. 260 die Kurve freihändig gezogen; die Folge davon ist, daß $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2 \ldots$ nicht genau auf einer Geraden liegen. Nun ziehen wir eine zwischen ihnen vermittelnde Gerade g.

Ihre Steigung ist $-n$. Um sie als Strecke zu finden, legen wir durch den Einheitspunkt A der Abszissenachse die Parallele zu g. Sie treffe die Ordinatenachse in N. Dann ist $ON = n$, gemessen mit der Einheit der Ordinatenachse. Dies Verfahren hat den

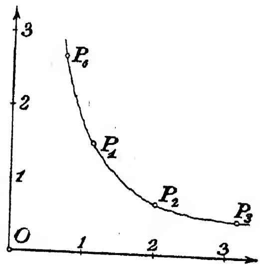


Fig. 260.

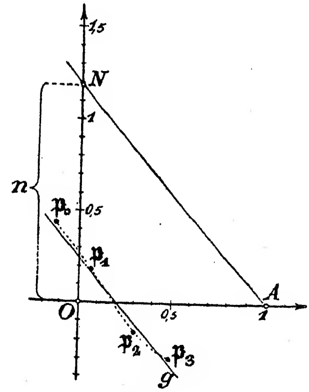


Fig. 261.

Vorzug, für den Fall einer ungenauen polytropischen Kurve den mittleren Wert von n zu liefern. Außerdem darf man v und ebenso p mit beliebigen Maßstäben messen, und überdies kann man statt der Logarithmen der Ordinaten und Abszissen auch zu ihnen proportionale Größen benutzen.

Die bei der Zustandsänderung des Gases geleistete Arbeit ist wie im 8. Beispiel, S. 294 (das sich auf eine isothermische Änderung bezog), gleich dem Integral

$$\int p\,dv.$$

Sie wird durch die in Fig. 214 ebenda geschraffte Fläche dargestellt.

Achtes Kapitel.

Die Kreisfunktionen.

§ 1. Die goniometrischen Funktionen.

Was unsere Leser wirklich noch vom Sinus, Kosinus usw. wissen, lassen wir schonend dahingestellt. Denn weil diese Begriffe hier doch von anderen Gesichtspunkten aus zu betrachten sind, als es auf der Schule geschehen ist, wird es für beide Teile das bequemste sein, sie hier ganz von neuem abzuleiten.

Ein Winkel in der Ebene wird durch seine beiden Schenkel gegeben. Diese Schenkel sind Strahlen vom Scheitel S aus, also Halbgeraden. Der Winkel wird durch Drehung des einen Schenkels nach dem andern beschrieben. Deshalb muß angegeben werden, welcher Schenkel der Anfangsschenkel sein soll. Wir wollen den Anfangsschenkel g nennen, den Endschenkel h. Man muß ferner bedenken, daß es zwei Drehsinne gibt. Die Drehung linksherum, also entgegen dem Sinne des Uhrzeigers, sei als die positive bezeichnet. Diese Festsetzung wird man jedenfalls machen, sobald ein Achsenkreuz in der gewöhnlichen Lage vorkommt, denn die Drehung der positiven x-Achse nach der positiven y-Achse hin hat dann eben diesen Sinn. Nach S. 6 wird der Winkel im Bogenmaß gemessen. Stets kann man den Anfangsschenkel g im positiven Sinn in die Lage h drehen; jedem Winkel kommt mithin ein zwischen 0 und 2π gelegenes positives Bogenmaß x zu. Die Drehung von g nach h kann aber auch anders stattfinden: Man kann g zunächst eine beliebige Anzahl n von vollen Umdrehungen (2π) ausführen lassen und erst dann in die Lage h bringen. Auch kann man g im negativen Sinn in die Lage b überführen und zwar wieder nach Vollendung beliebig vieler voller negativer Umdrehungen. Deshalb kommt einem Winkel mit dem zwischen 0 und 2π gelegenen Bogenmaß x auch jedes Bogenmaß $x + 2n\pi$ zu, wo n irgendeine positive oder

negative ganze Zahl bedeutet. Wird g z. B. auf dem kürzestem Weg im negativen Sinn in die Lage h gedreht, so ergibt sich das negative Bogenmaß $x - 2\pi$. Man merke sich also, daß das Bogenmaß eines durch Anfangsschenkel und Endschenkel geometrisch gegebenen Winkels nur bis auf ein beliebiges additives positives oder negatives ganzes Vielfaches von 2π bestimmt ist. So sind z. B. Winkel mit den Bogenmaßen $\frac{1}{4}\pi$, $2\frac{1}{4}\pi$, $-1\frac{3}{4}\pi$ kongruent, nämlich Winkel von $+45^0$.

Die rückwärtigen Verlängerungen der Schenkel g und h des Winkels x über den Scheitel S hinaus seien mit g' und h' bezeichnet. Irgendwo auf dem Endschenkel h oder auf seiner Verlängerung h' nehmen wir einen Punkt P an; der Fußpunkt des Lotes von P auf die Gerade g, g' sei Q, siehe Fig. 262. Bewegt sich P längs h oder h', so werden alle zugehörigen rechtwinkligen Dreiecke SQP einander ähnlich sein, die Verhältnisse ihrer Seitenlängen also unverändert bleiben. Die Seitenlängen der Dreiecke sollen nun aber mit Vorzeichen gemessen werden und zwar nach den folgenden Vorzeichen-Vorschriften, die man sich genau einprägen möge, da sie nachher beständig gebraucht werden:

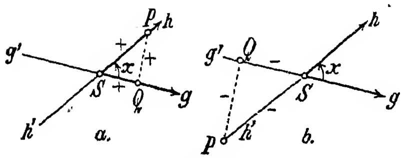


Fig. 262.

1. Die Hypotenuse SP soll positiv oder negativ gerechnet werden, je nachdem P auf h oder h' liegt.

2. Die dem Winkel x anliegende Kathete SQ soll positiv oder negativ gerechnet werden, je nachdem Q auf g oder g' liegt.

3. Die dem Winkel x gegenüberliegende Kathete QP soll positiv oder negativ gerechnet werden, je nachdem P auf der einen oder andern Seite der Geraden g liegt. Als positive Seite soll dabei diejenige gelten, die für einen Beobachter, der auf der Ebene in S steht und längs g hinblickt, links liegt (entsprechend der positiven Drehung linksherum).

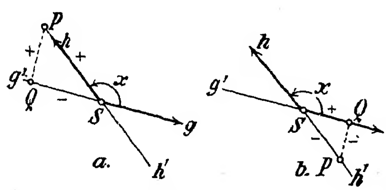


Fig. 263.

In Fig. 262 a sind hiernach alle drei Strecken positiv, in Fig. 262 b negativ; hier ist der Winkel positiv und spitz angenommen. Sonst verhält es sich anders: In Fig. 263 a sind SP und QP positiv, aber SQ negativ, und in Fig. 263 b ist es gerade umgekehrt. Hier liegt der Winkel zwischen 90^0 und 180^0. Dem Leser bleibt es überlassen, auch noch andere Annahmen zu zeichnen. Stets gilt folgendes: Wenn der Punkt P

auf h, h' entlang wandert, wechseln alle drei Strecken SP, SQ, QP dann und nur dann das Vorzeichen, sobald P durch den Scheitel S hindurchgeht. Mithin: Das Verhältnis von irgendzweien der drei Strecken hat einen Wert, der sowohl nach Größe als auch nach Vorzeichen derselbe bleibt, wo auch immer P auf h oder h' angenommen werden mag. Dagegen ändert sich der Wert des Verhältnisses, wenn man den Winkel selbst ändert. Also ist das Verhältnis eine vom Winkel abhängige Größe, eine Funktion des Winkels.

Man kann nun aus den drei Strecken SP, SQ, QP insgesamt sechs Verhältnisse bilden. Also kommt man zu sechs Funktionen des Winkels x. Sie heißen goniometrische Funktionen, d. h. winkelmessende. Man nennt sie auch trigonometrische Funktionen, weil sie in der Trigonometrie, der Lehre vom Ausmessen der Dreiecke, gebraucht werden. Insbesondere haben die sechs Funktionen die folgenden Namen und Abkürzungen:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{QP}{SP} = \text{Sinus von } x = \sin x, & \dfrac{SQ}{SP} = \text{Kosinus von } x = \cos x, \\ \dfrac{QP}{SQ} = \text{Tangens von } x = \operatorname{tg} x, & \dfrac{SQ}{QP} = \text{Kotangens von } x = \operatorname{ctg} x, \\ \dfrac{SP}{SQ} = \text{Sekans von } x = \sec x, & \dfrac{SP}{QP} = \text{Kosekans von } x = \csc x. \end{cases}$$

Statt $\operatorname{tg} x$ benutzt man auch das Zeichen $\operatorname{tang} x$ oder $\tan x$, statt $\operatorname{ctg} x$ das Zeichen $\operatorname{cotg} x$ oder $\cot x$, statt $\csc x$ das Zeichen $\operatorname{cosec} x$. Die drei rechts stehenden Funktionen, deren Namen mit Ko- beginnen (vom lateinischen cum, mit), treten an die Stelle der entsprechenden links stehenden, wenn man die Katheten QP und SQ vertauscht. Man nennt $\cos x$, $\operatorname{ctg} x$, $\csc x$ die Kofunktionen von $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\sec x$, aber auch umgekehrt $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\sec x$ die Kofunktionen von $\cos x$, $\operatorname{ctg} x$, $\csc x$.

Die Funktionen Sekans und Kosekans werden so selten gebraucht, daß wir sie beiseite lassen. Sie sind entbehrlich, weil ja nach (1)

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

ist. Obgleich offenkundig auch

$$(2)\qquad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$$

ist, braucht man doch sowohl Tangens als auch Kotangens, eigentlich wohl nur, weil man sich nicht entschließen kann, eines der beiden Verhältnisse der Katheten vor dem andern, umgekehrten, zu bevorzugen.

Wenn man $\sin x$ mit $\cos x$ dividiert, hebt sich der gemeinsame Nenner SP fort, und es bleibt $QP : SQ$ oder $\operatorname{tg} x$ übrig. Daher ist

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}. \tag{3}$$

Ferner ist[1]:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{QP^2 + SQ^2}{SP^2}.$$

Da aber $QP^2 + SQ^2$ nach dem Satze des Pythagoras gleich SP^2 ist, kommt einfach:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \tag{4}$$

Deshalb ist $\cos x$ gleich der Quadratwurzel aus $1 - \sin^2 x$ und $\sin x$ gleich der aus $1 - \cos^2 x$. Mithin lassen sich nach (3) auch $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{ctg} x$ entweder durch $\sin x$ oder durch $\cos x$ allein ausdrücken. Ferner gibt (4) durch Division mit $\cos^2 x$ oder $\sin^2 x$ wegen (3):

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Man kann deshalb $\cos x$ durch $\operatorname{tg} x$ und $\sin x$ durch $\operatorname{ctg} x$ ausdrücken, also wegen (2) auch $\cos x$ durch $\operatorname{ctg} x$ und $\sin x$ durch $\operatorname{tg} x$. So gelangt man zu den folgenden vielgebrauchten Formeln:

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{lllll}
\boldsymbol{\sin x} & = \sqrt{1-\cos^2 x} & = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} & = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}}, \\
\sqrt{1-\sin^2 x} = & \boldsymbol{\cos x} & = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} & = \dfrac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}}, \\
\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = & \dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x} = & \boldsymbol{\operatorname{tg} x} & = \dfrac{1}{\operatorname{ctg} x}, \\
\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x} = & \dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = & \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} & = \boldsymbol{\operatorname{ctg} x}.
\end{array}\right.$$

Mit Hilfe eines kleinen Kunstgriffes vermag man diese anscheinend schwer auswendig zu lernenden Formeln ohne Mühe aus dem Kopf abzuleiten. Man macht nämlich davon, daß der Punkt P beliebig auf dem Endschenkel gewählt werden darf, einen zweckmäßigen Gebrauch: Wenn man alles durch $\sin x$ ausdrücken will, beachte man, daß nach (1) im Nenner von $\sin x$ die Hypotenuse SP vorkommt, und denkt sich nun P so gewählt, daß diese Hypotenuse die Längeneinheit ist, mithin die dem Winkel gegenüberliegende Kathete geradezu $\sin x$ vorstellt. Nun

[1] Das Quadrat von $\sin x$ bezeichnet man mit $\sin^2 x$; unter $\sin x^2$ könnte man den Sinus des Quadrates von x, also $\sin(x^2)$, verstehen.

nämlich lehrt der Satz des Pythagoras, daß die anliegende Kathete SQ gleich $\sqrt{1-\sin^2 x}$ wird. Aus dem Dreieck in Fig. 264 also, das man sich aber bloß denken, nicht ansehen sollte, liest man dann ohne weiteres $\operatorname{tg} x$ gleich $QP : SQ$ oder $\sin x : \sqrt{1-\sin^2 x}$ und $\operatorname{ctg} x$ als den umgekehrten Wert ab. Will man alles durch $\cos x$ ausdrücken, so bedenke man, daß auch beim Kosinus die Hypotenuse SP im Nenner vorkommt. Man wählt sie also wieder gleich Eins und hat dann $SQ = \cos x$, mithin nach dem Satze des Pythagoras $QP = \sqrt{1-\cos^2 x}$, siehe Fig. 265. Daher kann man ablesen, wie sich $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{ctg} x$ durch $\cos x$ ausdrücken.

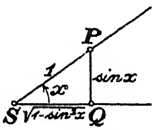


Fig. 264.

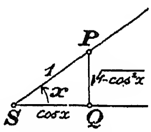


Fig. 265.

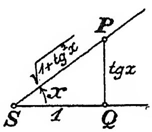


Fig. 266.

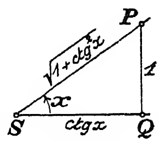


Fig. 267.

Ganz entsprechend geht man vor, wenn man alles durch $\operatorname{tg} x$ darstellen will: Bei $\operatorname{tg} x$ ist der Nenner die anliegende Kathete SQ, die man jetzt gleich Eins wählt, siehe Fig. 266, so daß die gegenüberliegende Kathete QP geradezu $\operatorname{tg} x$ bedeutet, also die Hypotenuse SP nach dem Satze des Pythagoras $\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}$ vorstellt. Im Fall schließlich, wo alles durch $\operatorname{ctg} x$ ausgedrückt werden soll, wird der bei $\operatorname{ctg} x$ vorkommende Nenner QP gleich Eins gewählt, siehe Fig. 267. Wir bitten den Leser, nun das Buch einmal zuzuklappen und sich das soeben auseinandergesetzte im Kopfe mit nur gedachten Dreieckszeichnungen zu wiederholen. Man wird die Freude haben, so die Formeln (5) spielend leicht ableiten zu lernen.

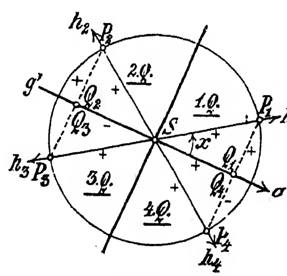


Fig. 268.

Um diese Formeln richtig anwenden zu können, muß man noch wissen, welche Vorzeichen den darin vorkommenden Quadratwurzeln zu geben sind. Um dies zu zeigen, nehmen wir in Fig. 268 irgendeinen Strahl g als Anfangsschenkel an, und g' sei seine rückwärtige Verlängerung über den Scheitel S. Indem wir g im positiven Sinn einen, zwei, drei und vier rechte Winkel um S beschreiben lassen, bekommen wir vier Quadranten (S. 25). Nun ziehen wir durch S zwei Geraden so, daß einer ihrer Winkel durch g in gleiche Teile zerlegt wird. Die vier dann entstehenden Strahlen von S aus nennen wir nach den Quadranten, in

denen sie verlaufen, die Strahlen h_1, h_2, h_3, h_4. Wir wollen nämlich jetzt alle vier Winkel mit dem gemeinsamen Anfangsschenkel g und den Endschenkeln h_1, h_2, h_3, h_4 gleichzeitig betrachten. Bedeutet x das zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ gelegene positive Bogenmaß von $\sphericalangle g h_1$, so haben $\sphericalangle g\, h_2$, $\sphericalangle g\, h_3$ und $\sphericalangle g\, h_4$ die positiven Bogenmaße $\pi - x$, $\pi + x$ und $2\pi - x$. Ein Kreis um S treffe die vier Endschenkel in P_1, P_2, P_3, P_4. Die Lote von diesen Punkten auf die Gerade g, g' mögen die Fußpunkte Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 haben. Augenscheinlich fallen Q_1 und Q_4 zusammen, ebenso Q_2 und Q_3. Wenn man nun für die vier Winkel die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 als den in (1) mit P bezeichneten Punkt, entsprechend Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 als den dort mit Q bezeichneten Punkt benutzt, und dabei jedesmal die Vorzeichen-Vorschriften auf S. 376 beachtet, erkennt man: Die vier Hypotenusen SP_1, SP_2, SP_3, SP_4 sind positiv, denn die Punkte liegen auf den Endschenkeln der Winkel, nicht auf ihren Verlängerungen. Ferner sind die Katheten SQ_1, SQ_4 positiv und die Katheten SQ_2, SQ_3 negativ, weil Q_2 und Q_3 nicht auf g, sondern auf g' liegen. Schließlich sind die Katheten Q_1P_1, Q_2P_2 positiv, dagegen die Katheten Q_3P_3, Q_4P_4 negativ, da P_3 und P_4 für jemanden, der längs g blickt, rechterhand liegen. Also folgt aus (1), daß die goniometrischen Funktionen der vier Winkel die im folgenden angegebenen Vorzeichen haben:

(6)

	1. Quadrant	2. Quadrant	3. Quadrant	4. Quadrant
Winkel . . .	x	$\pi - x$	$\pi + x$	$2\pi - x$
Sinus . . .	+	+	−	−
Kosinus . .	+	−	−	+
Tangens . .	+	−	+	−
Kotangens .	+	−	+	−

Satz 1: Im ersten Quadranten sind alle vier goniometrischen Funktionen positiv; der Sinus ist es außerdem nur noch im zweiten, der Kosinus nur noch im vierten, der Tangens und ebenso der Kotangens nur noch im dritten.

Wollen wir nun z. B. die Formeln in der ersten Zeile von (5) auf einen Winkel im zweiten Quadranten anwenden, so ist zu beachten, daß der Sinus positiv, aber der Tangens negativ ist. Also müssen dann $\sqrt{1 - \cos^2 x}$ und $\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}$ positiv, dagegen $\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ negativ genommen werden. In dieser Art verfährt man bei allen Anwendungen der Formeln (5).

Aus Fig. 268 erkennt man noch mehr. Hier ist ja:

$$SP_1 = SP_2 = SP_3 = SP_4,$$

$$SQ_1 = -SQ_2 = -SQ_3 = SQ_4, \; Q_1P_1 = Q_2P_2 = -Q_3P_3 = -Q_4P_4.$$

Deshalb liest man ab:

$$(7)\quad \begin{cases} \sin x = \sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x) = -\sin(2\pi - x), \\ \cos x = -\cos(\pi - x) = -\cos(\pi + x) = \cos(2\pi - x), \\ \operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(\pi - x) = \operatorname{tg}(\pi + x) = -\operatorname{tg}(2\pi - x), \\ \operatorname{ctg} x = -\operatorname{ctg}(\pi - x) = \operatorname{ctg}(\pi + x) = -\operatorname{ctg}(2\pi - x). \end{cases}$$

Nach dem, was über die Vorzeichen der goniometrischen Funktionen in den verschiedenen Quadranten gesagt wurde, ist es ganz leicht, diese Formeln aus dem Kopf abzuleiten, denn man braucht sich ja nur vor Augen zu halten, daß, wenn x ein positiver spitzer Winkel ist, die Winkel $\pi - x$, $\pi + x$ und $2\pi - x$ jene drei zugehörigen Winkel von Fig. 268 in den drei andern Quadranten bedeuten.

Vielleicht helfen wir dem Leser durch die Besprechung eines einfachen Gerätes, mittels dessen man die Werte der goniometrischer Funktionen beliebiger Winkel x ablesen kann. Es beruht auf dem in Fig. 269 dargestellten Umständen: In einem Kreis mit dem Mittelpunkt S sind zueinander senkrechte Durchmesser a und b gezogen. In den Endpunkten A und B sind die Tangenten t und k gezeichnet. Ein beliebiger Punkt des Kreises ist P. Die Lote von P auf die Durchmesser a und b haben die Fußpunkte Q und R, und die Gerade SP schneidet die Tangenten t und k in T und K. Nach (1) erkennt man ohne weiteres: Wird der Radius des Kreises als Längeneinheit angenommen, so stellt die Strecke SR den Sinus, die Strecke SQ den Kosinus, die Strecke AT den Tangens und die Strecke BK den Kotangens von $x = \sphericalangle ASP$ dar. (Der Tangens hat übrigens seinen Namen daher, daß er als Strecke auf der Tangente t darstellbar ist, während der Name Sinus vermutlich aus dem Arabischen stammt.) Auf den Geraden a, b, t, k kann man zum Ablesen der Werte der goniometrischen Funktionen Skalen anbringen. Ihre Längeneinheit ist der Radius, und sie gehen auf a und b von S aus, auf t von A aus und auf k von B aus. In Fig. 269

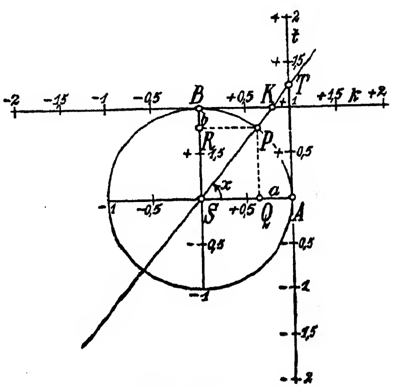


Fig. 269.

ist der Winkel x im ersten Quadranten angenommen worden; seine goniometrischen Funktionen haben daher positive Werte. Man sieht aber aus (7): Die Ablesung auf den Skalen bleibt für Winkel in den andern

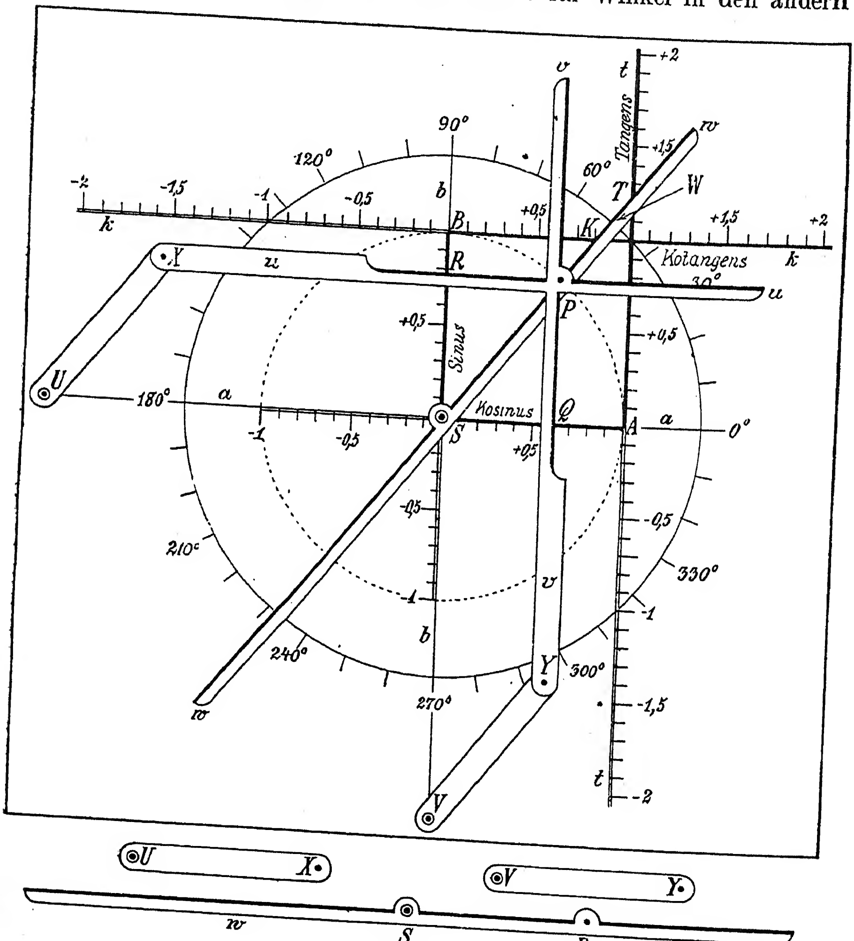


Fig. 270.

Quadranten richtig, wenn man die Skalen von ihren Nullpunkten S, A und B aus rückwärts mit negativen Maßzahlen fortsetzt, also auf a und k nach links und auf b und t nach unten.

Hiernach läßt sich das Gerät, das wir im Auge haben, leicht in der in Fig. 270 angegebenen Form anfertigen: Auf einer Scheibe aus Pappe

oder Holz wird der Kreis um S gezeichnet. (Er ist in Fig. 270 nur gestrichelt dargestellt; das Werkzeug wird nämlich bequemer brauchbar wenn man, wie es hier geschehen ist, die Winkeleinteilung auf einem größeren konzentrischen Kreis macht.) Die Skalen auf a, b, t und k sind in der beschriebenen Weise herzustellen. Über der Scheibe wird nun ein bewegliches Gestänge angebracht, das aus vier starren Stücken besteht, die in Gelenken drehbar sind. Am höchsten liegt ein rechtwinkliges Kreuz u, v mit dem Mittelpunkte P. Darunter liegt eine Stange w, die unten in Fig. 270 noch einmal dargestellt ist. Sie wird in P mit dem Kreuz u, v durch ein Gelenk verknüpft, und ihr Punkt S wird um den Kreismittelpunkt S der Scheibe drehbar gemacht. Außerdem sind zwei kürzere starre Arme (unten besonders dargestellt) in den Punkten X und Y von u und v drehbar angebracht, während sie sich außerdem um Punkte U und V der Geraden a und b auf der Scheibe drehen lassen. Die Strecken UX, VY, SP der drei Teile sind gleich dem Radius des (gestrichelten) Kreises, außerdem ist $US = XP$ und $VS = YP$. Das Gestänge ist also derart beweglich, daß u beständig zu a und v beständig zu b parallel bleibt und P den (gestrichelten) Kreis beschreibt. Zu beachten ist die besondere Form der Stangen u, v und w. Die Ablesung, von der bei der vorigen Fig. 269 die Rede war, wird nämlich an den durch starke Linien dargestellten Rändern der Stangen gemacht. Diese Ränder müssen genau auf den Geraden XP, YP und SP liegen. Die Stange w ist, von S aus gerechnet, beiderseits gleich lang. Aber ihre halbe Länge muß kleiner als US $(= VS)$ gemacht werden, damit die volle Umdrehung von P um S möglich wird. Weil $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{ctg} x$ bis $+\infty$ und $-\infty$ gehen können, läßt sich das Gerät nicht so einrichten, daß diese goniometrischen Funktionen für alle Winkel x wirklich ablesbar sind. Jedenfalls aber ist es gut, die Stange w so lang wie möglich zu machen und dementsprechend U und V so weit wie möglich links auf a und unten auf b anzunehmen. Der Raumersparnis halber haben wir in der Zeichnung das Gerät so dargestellt, daß $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{ctg} x$ nur im Intervalle von -2 bis $+2$ ablesbar sind. Der Winkel x wird im Gradmaß an der Stelle W von w auf dem größeren Kreis abgelesen. In Fig. 270 ist die Einstellung so gemacht, daß der Winkel etwas mehr als 50^0 beträgt, sein Sinus SR beinahe gleich 0,8, sein Kosinus SQ etwas größer als 0,6, sein Tangens AT etwa 1,2 und sein Kotangens BK etwa 0,8 beträgt.

Die Herstellung des beschriebenen Gerätes in einfacher Form erfordert nur geringe Geschicklichkeit; zu den Gelenken kann man Heftzwecken benutzen. Man wird durch das Gerät schnell damit vertraut,

wie sich die goniometrischen Funktionen beim Durchlaufen der vier Quadranten ändern.

Den Punkt P kann man beliebig viele Umdrehungen 2π von A aus um S links- oder rechtsherum machen lassen, ehe er in seine Endlage gelangt, vgl. S. 375, und deshalb ist für jede ganze Zahl n:

$$\sin(x + 2n\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2n\pi) = \cos x. \tag{8}$$

Das gilt auch für den Tangens und Kotangens, aber in diesen Fällen ergibt sich noch mehr. Nach (7) bekommen nämlich diese schon dann wieder die alten Werte, wenn der Winkel nur um zwei rechte Winkel wächst. Deshalb ist für jede ganze Zahl n:

$$\operatorname{tg}(x + n\pi) = \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg}(x + n\pi) = \operatorname{ctg} x. \tag{9}$$

Hier tritt n auf, in (8) dagegen $2n$.

Die goniometrischen Funktionen $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ haben demnach eine Eigenschaft, die wir bisher noch bei keiner Funktion angetroffen haben: Sie nehmen, wie auch x gewählt sein mag, wieder die ursprünglichen Werte an, wenn x um 2π zu- oder abnimmt und, im Fall des Tangens und Kotangens sogar dann, wenn x nur um π zu- oder abnimmt. Man spricht deshalb hier von periodischen Funktionen. Bei $\sin x$ und $\cos x$ bezeichnet man 2π, bei $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{ctg} x$ dagegen π als die Periode. Dies wollen wir besonders formulieren:

Satz 2: Für jede positive oder negative ganze Zahl n ist

$$\sin(x + 2n\pi) = \sin x, \qquad \cos(x + 2n\pi) = \cos x.$$
$$\operatorname{tg}(x + n\pi) = \operatorname{tg} x, \qquad \operatorname{ctg}(x + n\pi) = \operatorname{ctg} x,$$

mit anderen Worten: Die goniometrischen Funktionen sind periodisch; $\sin x$ und $\cos x$ haben die Periode 2π, während $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{ctg} x$ die Periode π haben.

Eine andere Eigenschaft der goniometrischen Funktionen, die wir jetzt besprechen wollen, kommt auch bei manchen früher betrachteten Funktionen vor: Die geraden Potenzen von x, also $x^2, x^4, x^6 \ldots$, haben die Eigenschaft, ihre Werte nicht zu ändern, wenn x durch $-x$ ersetzt wird, während die ungeraden Potenzen von x, also $x^3, x^5 \ldots$, dabei die entgegengesetzten Werte annehmen. Denn es ist $(-x)^2 = x^2$, dagegen $(-x)^3 = -x^3$, aber wieder $(-x)^4 = x^4$, dagegen $(-x)^5 = -x^5$ usw. Allgemein heißt $f(x)$ eine gerade Funktion, wenn $f(-x) = f(x)$ für jedes x ist, dagegen eine ungerade Funktion, wenn $f(-x) = -f(x)$ für jedes x ist. So ist z. B. $(x^2 + 1) : x^4$ eine gerade und $(x^2 + 1) : x$ eine ungerade Funktion, aber $x^2 + x$ weder eine gerade noch eine ungerade Funktion. Nun folgt aus Satz 2, wenn man ihn für $n = 1$

benutzt und $-x$ statt x setzt, daß $\sin(-x+2\pi)=\sin(-x)$ ist. Aber $\sin(-x+2\pi)$ ist nach (7) gleich $-\sin x$. Mithin kommt $\sin(-x)=-\sin x$. Entsprechend entnehmen wir aus Satz 2, daß $\cos(-x+2\pi)=\cos(-x)$ und aus (7), daß $\cos(-x+2\pi)=\cos x$, also $\cos(-x)=\cos x$ ist. In derselben Weise findet man $\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{ctg}(-x)=-\operatorname{ctg} x$. Somit gilt der

Satz 3: Sinus, Tangens und Kotangens sind ungerade Funktionen, während der Kosinus eine gerade Funktion ist:

$$\sin(-x)=-\sin x\,,\quad \operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x\,,\quad \operatorname{ctg}(-x)=-\operatorname{ctg} x,$$

dagegen:

$$\cos(-x)=+\cos x\,.$$

Schließlich ist noch eine Beziehung zu erwähnen, die zwischen den goniometrischen Funktionen eines Winkels x und den zugehörigen Kofunktionen (S. 377) des Komplementwinkels besteht. Bekanntlich heißen zwei Winkel Komplementwinkel, wenn ihre Summe einen rechten Winkel ausmacht. Da dieser das Bogenmaß $\frac{1}{2}\pi$ hat, ist der Komplementwinkel von x im Bogenmaß gleich $\frac{1}{2}\pi - x$. Nach Satz 3 ist nun $\cos(\frac{1}{2}\pi - x)$ gleich $\cos(x-\frac{1}{2}\pi)$. Der Winkel $x-\frac{1}{2}\pi$ entsteht aber aus dem Winkel x, wenn man seinen Endschenkel im negativen Sinn um einen rechten Winkel dreht, siehe Fig. 271, wo h der Endschenkel von x und h' der von $x-\frac{1}{2}\pi$ ist. Wählt man P und P' auf h und h' gleichweit vom Scheitel S entfernt und fällt man von P und P' auf die Gerade des Anfangsschenkels g die Lote, deren Fußpunkte Q und Q' seien, so sieht man, da $SP' \perp SP$ ist, daß $\triangle SQP \cong \triangle P'Q'S$ ist, weil die Kathete QP absolut genommen gleich der Kathete SQ' ist. Absolut genommen ist daher $\cos(x-\frac{1}{2}\pi) = SQ' : SP' = QP : SP = \sin x$. Beachtet man noch, daß hier alle Strecken nach den früheren Vorzeichenregeln positiv sind, so folgt, daß dies auch hinsichtlich der Vorzeichen gilt. Da nun, wie gesagt, $\cos(\frac{1}{2}\pi - x)=\cos(x-\frac{1}{2}\pi)$ ist, ergibt sich demnach $\cos(\frac{1}{2}\pi - x) = \sin x$. Da nur $Q'P'$ negativ ist, liest man ferner ab: $\sin(x-\frac{1}{2}\pi) = -\cos x$. Aber nach Satz 3 ist $\sin(x-\frac{1}{2}\pi) = -\sin(\frac{1}{2}\pi - x)$. Also kommt $\sin(\frac{1}{2}\pi - x)=\cos x$. Ebenso ergibt sich $\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\pi - x) = \operatorname{ctg} x$ und $\operatorname{ctg}(\frac{1}{2}\pi - x)=\operatorname{tg} x$, d. h.:

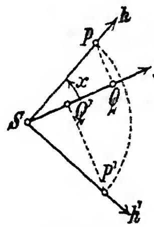


Fig. 271.

Satz 4: Jede goniometrische Funktion eines Winkels x ist gleich der Kofunktion des Komplementwinkels $\frac{1}{2}\pi - x$, nämlich:

$$\sin x = \cos(\tfrac{1}{2}\pi - x), \qquad \cos x = \sin(\tfrac{1}{2}\pi - x),$$
$$\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg}(\tfrac{1}{2}\pi - x), \qquad \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\pi - x).$$

Wir dürfen es wohl dem Leser überlassen, zu zeigen, daß dies auch dann gilt, wenn der Endschenkel h des Winkels x nicht im ersten, sondern in einem der andern Quadranten verläuft.

An dieser Stelle wollen wir noch eine zuweilen nützliche Bemerkung über den Sinus und Kosinus eines Winkels x einschalten. Nach (4) ist die Summe ihrer Quadrate gleich Eins. Nun seien u und v zwei Größen, deren Quadratsumme gleich Eins ist:

$$u^2 + v^2 = 1.$$

Sie mögen positiv oder negativ sein. Wir nehmen eine Längeneinheit an und tragen u als Strecke auf einem Strahl g von seinem Anfangspunkte S aus bis Q ab. Ist u negativ, so tragen wir die Strecke rückwärts, auf der Verlängerung von g über S ab. In Q errichten wir das Lot, und auf ihm

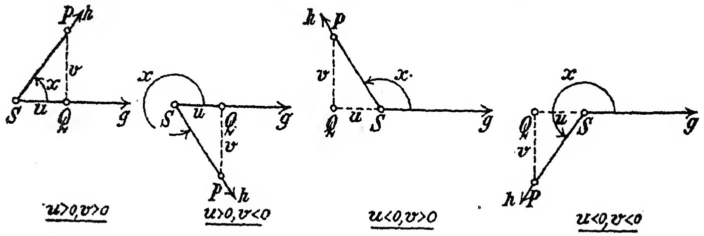


Fig. 272.

tragen wir v als Strecke QP ab, und zwar für einen Beobachter, der längs g blickt, nach links oder rechts, je nachdem v positiv oder negativ ist, siehe Fig. 272 für alle vier möglichen Fälle. Den Strahl von S nach P hin nennen wir h. Wegen $u^2 + v^2 = 1$ ist dann die Strecke SP gleich der Längeneinheit. Man sieht nun nach (1), daß in allen vier Fällen der Sinus von $\sphericalangle\, gh$ oder x gleich v und sein Kosinus gleich u ist und zwar auch hinsichtlich der Vorzeichen. Demnach gilt der zuweilen nützliche

Satz 5: Sind u und v zwei Größen, deren Quadratsumme gleich Eins ist, so gibt es stets einen Winkel derart, daß sein Kosinus gleich u und sein Sinus gleich v ist, und zwar ist das Bogenmaß x dieses Winkels bis auf eine bliebiges ganzes additives Vielfaches von 2π bestimmt; insbesondere kann man vorschreiben, daß x zwischen 0 und 2π liege.

Wenden wir uns nun zur **bildlichen Darstellung der Funktion** $y = \sin x$. Die Winkel x sollen als Abszissen, die zugehörigen Sinuswerte y als Ordinaten in ein Achsenkreuz eingetragen werden. Wir stellen demnach die Winkel jetzt durch Strecken dar, indem wir unter der Einheit der Strecken die Winkeleinheit $x = 1$ (d. h. $57^{\circ}\,17'\,45''$, vgl. 2. Beispiel, S. 10) verstehen. Wie überhaupt jede Größenart (S. 4, 5) sind ja auch die Winkel durch Strecken darstellbar. Statt die x-Achse in der sonst gebräuchlichen Weise mit den Marken 1, 2, 3, ... und rückwärts mit den negativen Marken -1, -2, -3 ... zu versehen, wie es

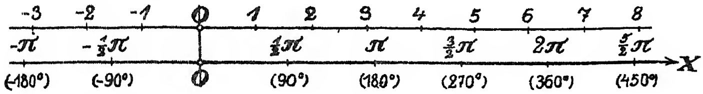


Fig. 273.

auf der oberen Geraden in Fig. 273 geschehen ist, empfiehlt es sich, die Stellen $\frac{1}{2}\pi$, π, $\frac{3}{2}\pi$ ... sowie $-\frac{1}{2}\pi$, $-\pi$ ... zu kennzeichnen, da sie den Vielfachen des rechten Winkels entsprechen, siehe die untere Gerade in Fig. 273. Erinnern wir uns daran, daß das Bogenmaß x eines Winkels gleich dem Bogen ist, den er auf einem Kreis um seinen Scheitel ausschneidet, vorausgesetzt, daß der Radius die Längeneinheit ist, so erhellt, daß man die Sache auch so auffassen kann, als ob der Umfang des Kreises vom Radius Eins auf der Abszissenachse von O aus als Gerade abgewickelt wäre. Der Umfang ist ja die Strecke von O bis zur Marke 2π. Die Abwicklung kann wiederholt werden, auch nach der negativen Seite hin, so daß die ganze x-Achse durchlaufen wird.

Um nun das Bild von $y = \sin x$, die **Sinuslinie**, zu zeichnen, empfiehlt es sich, die y-**Einheit gleich der** x-**Einheit**, d. h. gleich dem Kreisradius anzusehen. Denn der Sinus wie überhaupt die goniometrischen Funktionen stehen in so enger Beziehung zur Geometrie der Ebene, daß hier dasselbe bezüglich der Einheiten wie auf S. 171 gilt. Wir wählen nun den Kreis vom Radius Eins so, daß sein Mittelpunkt S irgendwo auf der x-Achse liegt. Um die Zeichnung nicht zu sehr zu stören, haben wir S in Fig. 274 auf der negativen x-Achse irgendwo angenommen. Der Kreis schneidet die Abszissenachse in der positiven Richtung dieser Achse in einem Punkt A. Ein beliebiger Punkt des Kreises sei B. Der Bogen $x = AB$, gemessen im positiven Drehsinne, d. h. im Sinn der Drehung der positiven x-Achse nach der positiven y-Achse, also linksherum, stellt das Bogenmaß von $\sphericalangle ASB$ dar. Das Lot von B auf die x-Achse habe den Fußpunkt C. Nach (1) ist $\sin x$ gleich $CB : SB$ oder also wegen $SB = 1$ gleich CB selbst.

Demnach ist $CB = \sin x = y$ zu setzen. Das Bogenmaß oder der Bogen $x = AB$ wird als Abszisse von O aus auf der x-Achse als Strecke OV abgetragen. Im Endpunkt V ist als Ordinate der zugehörige Wert $y = \sin x = CB$ zu errichten, d. h. wir ziehen die Parallele zur x-Achse durch B, bis sie das in V errichtete Lot in U trifft. Dieser Punkt U gehört der Sinuslinie an. Lassen wir B auf dem Hilfskreise herumwandern, so beschreibt der zugehörige Punkt U die Sinuslinie. Das einzige Unbequeme ist dabei die Verwandlung der Bogen AB in gleich lange Strecken OV. Wir begnügen uns damit, dies angenähert zu tun. An einer späteren Stelle werden wir zeigen, wie man genauer vorgehen kann. Ist $x = 0$, so liegt B in A selbst, d. h. dann ist $y = 0$, so daß der Anfangspunkt O der Sinuslinie angehört. Ist $x = \frac{1}{2}\pi$ (90°), so wird $y = 1$, ist $x = \pi$ (180°), so wird wieder $y = 0$, ist $x = \frac{3}{2}\pi$ (270°), so wird $y = -1$, ist schließlich $x = 2\pi$ (360°), so kommt wieder $y = 0$. So ergibt sich der erste rechts von O gezeichnete Berg und das daran anschließende Tal der Sinuslinie. Wir können den Umlauf von B um S fortsetzen; dabei wiederholt sich das Spiel, also ergibt sich ein mit dem soeben gefundenen Kurvenstück kongruentes und sich daran anschließendes Kurvenstück. Die Sinuslinie setzt sich also bis $x = +\infty$ fortwährend in kongruenten Wellen fort. Jede einzelne Welle, bestehend aus Berg und Tal, hat, längs der x-Achse gemessen, die Länge 2π. Dies entspricht dem Umstande, daß $y = \sin x$ eine periodische Funktion mit der Periode 2π ist, siehe Satz 2. Die Sinuslinie geht also durch Verschiebung längs der x-Achse um die Strecke 2π in sich über. Dasselbe gilt auch rückwärts, d. h. im negativen Sinn der x-Achse. Die Sinuslinie hat Symmetrien. Ihren Grund erkennt man sofort, wenn man auf dem Hilfskreise solche vier Punkte B_1, B_2, B_3, B_4, die zum wagerechten und lotrechten Kreisdurchmesser symmetrisch liegen,

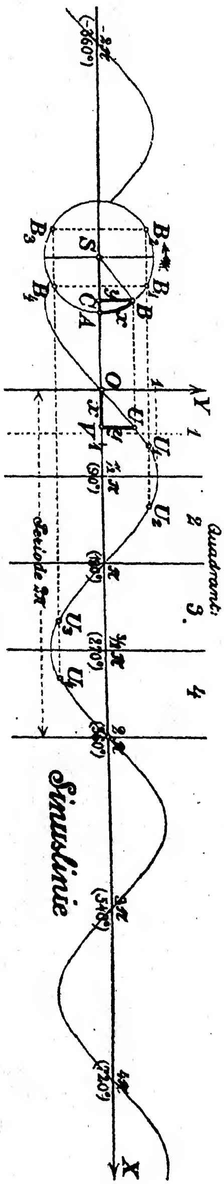


Fig. 274.

nacheinander als den Endpunkt des Bogens $x = AB$ benutzt. Diesen vier Punkten entsprechen vier Punkte U_1, U_2, U_3, U_4 der Sinuslinie. Sie zeigen: Berg und Tal einer Periode der Sinuslinie sind einander kongruent, denn die Geraden $U_1 U_4$ und $U_2 U_3$ haben ihre Mitten im Punkt $x = \pi$ der Abszissenachse. Der Berg geht durch Drehung um zwei rechte Winkel um diesen Punkt herum in das Tal über. Die Mitte von $U_1 U_2$ liegt auf der zu $x = \frac{1}{2}\pi$ gehörigen Ordinate des Berggipfels und die Mitte von $U_3 U_4$ auf der zu $x = \frac{3}{2}\pi$ gehörigen Ordinate der Talsohle. Also: Jeder Berg und ebenso jedes Tal hat eine zur x-Achse senkrechte Symmetrielinie.

Man stelle sich jetzt vor, in jedem Punkte B des Hilfskreises werde auf die Zeichenebene das Lot errichtet und gleich y oder CB gemacht. Dadurch gehen als oberste Punkte dieser Lote Punkte D im Raum hervor. Wo liegen alle diese Punkte D? Jedes entstehende Dreieck CBD ist in B rechtwinklig, ferner ist es gleichschenklig und außerdem steht seine Ebene auf der Zeichenebene und auf der x-Achse längs CB senkrecht. Deshalb liegen alle Punkte D in derjenigen Ebene, die von der x-Achse unter 45° über der Zeichenebene nach der Seite der positiven y-Achse hin ansteigt und sich unter der Zeichenebene nach der Seite der negativen y-Achse hin senkt. Alle Lote BD befinden sich ferner auf demjenigen geraden Zylinder, dessen Grundkreis der Hilfskreis ist. Dieser Zylinder steht auf der Zeichenebene lotrecht auf. Der Ort der Punkte D ist mithin der Schnitt jener geneigten

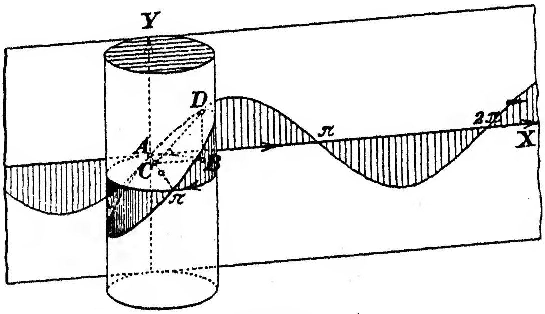


Fig. 275.

Ebene mit diesem Zylinder, daher nach S. 186 eine Ellipse. Wird der Zylinder längs der Ellipse mit Druckerschwärze versehen, so druckt sich die Ellipse beim Abrollen auf der Ebene als die Sinuslinie ab, siehe Fig. 275, weil die Kreisbogen $x = AB$ dabei in Strecken einer

Geraden AX und die Lote $BD = CB = \sin x$ in die auf der Geraden AX errichteten Lote übergehen. Da man den Zylinder beliebig weit abrollen lassen kann, tritt die Periodizität der Kurve deutlich zutage.

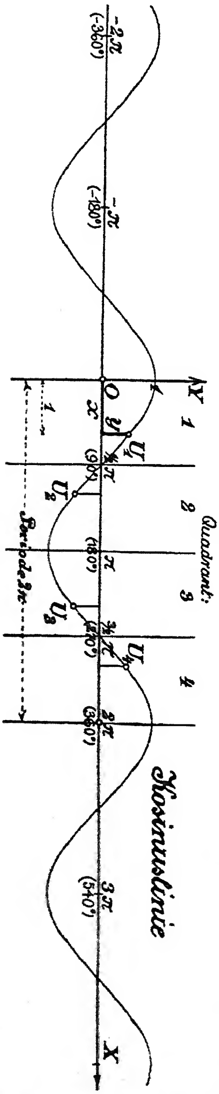


Fig. 276.

Mit wenigen Worten läßt sich nun die **Kosinuslinie**, das Bild der Funktion $y = \cos x$, erledigen: Nach Satz 4 ist $\cos x$ gleich $\sin(\frac{1}{2}\pi - x)$, und dieser Sinus ist nach (7) gleich dem von $\pi - (\frac{1}{2}\pi - x)$ oder $\frac{1}{2}\pi + x$. Statt $y = \cos x$ kann man also auch schreiben:

$$y = \sin(x + \tfrac{1}{2}\pi).$$

Die Kosinuslinie geht daher aus der Sinuslinie hervor, wenn man jede Abszisse um $\frac{1}{2}\pi$ verkleinert, d. h. **wenn man die Sinuslinie in den Richtung der negativen x-Achse um ein Viertel ihrer Periode verschiebt**, siehe Fig. 276. Die schon bei der Sinuslinie bemerkten Symmetrien treten also auch jetzt auf; man beachte die vier Punkte U_1, U_2, U_3, U_4. Insbesondere ist:

$$\cos 0 = 1, \quad \cos \tfrac{1}{2}\pi = 0,$$
$$\cos \pi = -1, \quad \cos \tfrac{3}{2}\pi = 0.$$

Das Vorstehende wird vervollständigt, wenn wir noch untersuchen, welche **Differentialquotienten** die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ haben. Dabei brauchen wir einen Hilfssatz, nämlich

Satz 6: Strebt ein Kreisbogen, also auch seine Sehne, nach Null, so strebt das Verhältnis des Kreisbogens zur Sehne nach Eins.

Zum Beweise betrachte man Fig. 277 mit dem Kreisbogen AB, in dessen Mitte H die Tangente CD gezogen ist, während M die Mitte der Sehne AB bedeutet. Offenbar ist das Dreieck ASB kleiner als der Kreisausschnitt ASB und dieser kleiner als das Dreieck CSD. Weil der Bogen AB nach Null streben soll, wollen wir unter $x = \sphericalangle HSB$ einen spitzen Winkel verstehen. Er sei positiv. Setzen

wir den Kreisradius gleich Eins, so ist $SM = \cos x$, $MB = \sin x$ und $HD = \operatorname{tg} x$ nach (1), während der Bogen HB gleich x ist. Daher ist der Inhalt des Dreiecks ASB gleich $\sin x \cos x$ und der des Dreiecks CSD gleich $\operatorname{tg} x$. Der Kreisausschnitt verhält sich zur ganzen Kreisfläche π wie der Bogen $2x$ zum Bogen 2π, ist also gleich x (aber natürlich mit der Flächeneinheit, dem Quadrat über dem Radius, zu messen). Also kommt

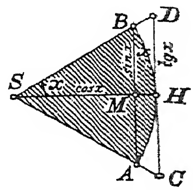


Fig. 277.

$$\sin x \cos x < x < \operatorname{tg} x\,,$$

d. h. nach (3):

$$\sin x \cos x < x < \frac{\sin x}{\cos x}\,.$$

Weil $\sin x$ positiv ist, bleibt diese Ordnung der Größen nach Division mit $\sin x$ dieselbe:

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}\,.$$

Nun strebe der Bogen AB, d. h. auch x nach Null. Wegen $\cos 0 = 1$ ergibt sich dann rechts und links Eins, und daher ist

$$\lim \frac{x}{\sin x} = 1 \quad \text{für} \quad \lim x = 0\,. \tag{10}$$

Dies gilt aber auch, wenn x von **negativen** Werten nach Null strebt. Denn wenn x **positiv** ist, kann man (10) auch so schreiben:

$$\lim \frac{-x}{-\sin x} = 1 \quad \text{für} \quad \lim x = 0\,,$$

und nach Satz 3 ist $-\sin x = \sin(-x)$. Also folgt:

$$\lim \frac{-x}{\sin(-x)} = 1 \quad \text{für} \quad \lim x = 0\,,$$

und hier ist $-x$ **negativ**.

Die Formel (10) läßt sich auch so darstellen:

$$\lim \frac{2x}{2 \sin x} = 1 \quad \text{für} \quad \lim x = 0\,,$$

und da der Zähler $2x$ der Bogen AB sowie der Nenner $2 \sin x$ die Sehne AB ist, steht hier der Inhalt des Hilfssatzes 6, der damit bewiesen ist. Das Vorhergehende zeigt, daß er auch so ausgesprochen werden kann:

Satz 7: Strebt die Veränderliche x und also auch $\sin x$ nach Null, so strebt der Quotient $x : \sin x$ nach Eins.

Um nun den Differentialquotienten von $y = \sin x$ zu ermitteln, wollen wir x vorerst positiv und kleiner als $\frac{1}{2}\pi$, also als spitzen positiven Winkel annehmen, siehe Fig. 278, worin der Kreis um den Scheitel S die Längeneinheit als Radius haben möge, so daß $x = \sphericalangle ASB$ durch den Bogen AB gemessen wird. Die Kathete CB des rechtwinkligen Dreiecks SCB ist dann $\sin x$, also y, ebenfalls gemessen mit dem Radius als Längeneinheit. Jetzt lassen wir x zunehmen, etwa um den Bogen BB', und wir wollen vorläufig eine positive Zunahme machen. Man sieht, daß dann auch y zu- und nicht abnimmt, nämlich um die Differenz EB' von $C'B'$ und CB. Strebt der Bogen BB' nach Null, so werden also BB' und EB' die Differentiale dx und dy, deren Quotient $dy:dx$ berechnet werden soll. Zunächst erkennt man, daß $y = \sin x$ stetig ist, denn man kann BB' so klein annehmen, daß EB' so klein wird, wie man nur immer vorschreiben mag. Das Verhältnis aus der Strecke EB' und dem Bogen BB' bleibt dasselbe, wenn wir beide mit der Sehne BB' dividieren. Deshalb ist $dy:dx$ der Grenzwert von

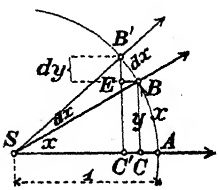


Fig. 278.

$$\frac{\text{Strecke } EB'}{\text{Sehne } BB'} : \frac{\text{Bogen } BB'}{\text{Sehne } BB'}.$$

Der hier an zweiter Stelle stehende Bruch hat nach dem Hilfssatz 6 den Grenzwert Eins. Mithin ist der Differentialquotient der Grenzwert des Bruches

$$\frac{\text{Strecke } EB'}{\text{Sehne } BB'}.$$

Dieser Bruch selbst ist aber augenscheinlich der Kosinus des spitzen positiven Winkels $EB'B$. Beim Grenzübergange strebt die Gerade, auf der die Sehne BB' liegt, nach der Tangente des Kreises im Punkte B, und diese Tangente ist zum Radius SB senkrecht. Da EB' zu SA senkrecht ist, strebt daher $\sphericalangle EB'B$ nach einem Winkel, der gleich $\sphericalangle ASB$ oder x ist, somit jener Bruch nach $\cos x$. Wenn also x zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegt und das Differential dx positiv ist, ergibt sich

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x. \tag{11}$$

Dasselbe ergibt sich, wenn der Zuwachsbogen BB' in Fig. 278 negativ gewählt wird, da dann auch der Zuwachs EB' negativ ausfällt. Also ist $\cos x$ der Differentialquotient von $\sin x$, sobald x zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegt.

Nun sei x ein Winkel im zweiten Quadranten. Dann gehört $z = \pi - x$ dem ersten Quadranten an. Wie bewiesen, ist dann

$$\frac{d \sin z}{d z} = \cos z\,,$$

mithin wegen $z = \pi - x$ und $d z = - d x$:

$$-\frac{d \sin (\pi - x)}{d x} = \cos (\pi - x)\,.$$

Nach (7) ist aber $\sin (\pi - x) = \sin x$ und $\cos (\pi - x) = - \cos x$. Mithin geht wieder (11) hervor, so daß diese Formel für alle Werte x zwischen 0 und π gilt.

Weiter sei x ein Winkel im dritten oder vierten Quadranten. Dann gehört $u = x - \pi$ dem ersten oder zweiten Quadranten an, und da wir wissen, daß dann

$$\frac{d \sin u}{d u} = \cos u$$

ist, ergibt sich wegen $u = x - \pi$ und $d u = d x$:

$$\frac{d \sin (x - \pi)}{d x} = \cos (x - \pi)\,.$$

Nach Satz 3 ist $\sin (x - \pi) = - \sin (\pi - x)$ und dies nach (7) gleich $- \sin x$, ferner kommt $\cos (x - \pi) = \cos (\pi - x) = - \cos x$. Mithin geht abermals die Formel (11) hervor, die demnach für jedes x zwischen 0 und 2π gilt.

Weil $\sin x$ eine periodische Formel mit der Periode $2x$ ist, vgl. Satz 4, ist es leicht, schließlich die Formel (11) für jeden Winkel x zu beweisen. Denn wie auch x gewählt sein mag, stets gibt es eine positive oder negative ganze Zahl n so, daß $x - 2n\pi$ zwischen 0 und 2π liegt. Setzen wir also $t = x - 2n\pi$, so ist bewiesen, daß

$$\frac{d \sin t}{d t} = \cos t$$

ist, also wegen $t = x - 2n\pi$ und $dt = dx$ auch:

$$\frac{d \sin (x - 2n\pi)}{d x} = \cos (x - 2n\pi)\,.$$

Wegen der Periodizität ist $\sin (x - 2n\pi) = \sin x$ und $\cos (x - 2n\pi) = \cos x$, so daß in der Tat wieder die Formel (11) hervorgeht.

Somit hat die stetige Funktion $\sin x$ den Differentialquotienten $\cos x$. Auf das leichteste läßt sich nun der Differentialquotient der Funktion $\cos x$ ableiten. Nach Satz 4 ist ja $\cos x$ dasselbe

wie $\sin(\frac{1}{2}\pi - x)$. Demnach ist $\cos x$ ebenfalls stetig und außerdem:

$$\frac{d\cos x}{dx} = \frac{d\sin(\frac{1}{2}\pi - x)}{dx}.$$

Hierfür läßt sich schreiben:

$$\frac{d\cos x}{dx} = \frac{d\sin(\frac{1}{2}\pi - x)}{d(\frac{1}{2}\pi - x)} \cdot \frac{d(\frac{1}{2}\pi - x)}{dx}.$$

Nach (11) ist der erste Bruch rechts gleich $\cos(\frac{1}{2}\pi - x)$, der zweite dagegen ist gleich -1. Nach Satz 4 ist außerdem $\cos(\frac{1}{2}\pi - x) = \sin x$. Also folgt:

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x. \tag{12}$$

Satz 8: Die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ sind für jedes x stetig und haben die Differentialquotienten $\cos x$ und $-\sin x$:

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x, \qquad \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x.$$

Dies muß man sich fest einprägen. Das ist leicht, man darf aber das in der zweiten Formel stehende Minuszeichen nicht vergessen. Als Gedächtnisstütze diene, daß sich die Worte „minus Sinus" im Takte reimen, während „minus Kosinus" nicht so schön klingen würde.

Da $\sin 0 = 1$ und $\cos 0 = 1$ ist, zeigen die Formeln des Satzes, daß für $x = 0$ die Sinuslinie die Steigung Eins und die Kosinuslinie die Steigung Null hat, vgl. Fig. 274 und 276. Beide Kurven durchsetzen die x-Achse unter 45^0 abwechselnd steigend und fallend, wenn, wie in den Figuren geschehen, die x-Einheit gleich der y-Einheit gewählt wird.

Weil nach (3)

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \tag{13}$$

ist und $\sin x$ und $\cos x$ stetig sind, wird $\operatorname{tg} x$ oder $\operatorname{ctg} x$ nur da unstetig, wo der Nenner $\cos x$ oder $\sin x$ verschwindet. Das erste tritt für $x = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi \ldots$ und für $x = -\frac{1}{2}\pi, -\frac{3}{2}\pi, -\frac{5}{2}\pi \ldots$ ein (siehe Fig. 276), allgemein für $x = (n + \frac{1}{2})\pi$, wo n irgendeine positive oder negative ganze Zahl bedeutet. Das zweite tritt für $x = 0, \pi, 2\pi \ldots$ sowie für $x = -\pi, -2\pi \ldots$ ein (siehe Fig. 274), allgemein für $x = n\pi$. Sehen wir von diesen Stellen ab, so dürfen wir auf die Formeln (13) die Bruchregel anwenden, so daß sich nach Satz 8 ergibt:

$$\frac{d\operatorname{tg} x}{dx} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x}, \quad \frac{d\operatorname{ctg} x}{dx} = \frac{\sin x \cdot (-\sin x) - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x}.$$

Der erste Zähler ist nach (4) gleich 1, der zweite gleich -1. Folglich kommt:

$$\frac{d\,\mathrm{tg}\,x}{d\,x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad \frac{d\,\mathrm{ctg}\,x}{d\,x} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{14}$$

Satz 9: Die Funktionen $\mathrm{tg}\,x$ und $\mathrm{ctg}\,x$ sind überall stetig, abgesehen von den Stellen $x = (n + \frac{1}{2})\pi$ bei $\mathrm{tg}\,x$ und von den Stellen $x = n\pi$ bei $\mathrm{ctg}\,x$, wobei n irgendeine ganze Zahl bedeutet. An allen anderen Stellen haben $\mathrm{tg}\,x$ und $\mathrm{ctg}\,x$ die Differentialquotienten:

$$\frac{d\,\mathrm{tg}\,x}{d\,x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad \frac{d\,\mathrm{ctg}\,x}{d\,x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Auch diese wichtigen Formeln muß man sich merken. Eine Hilfe ist die Erinnerung daran, daß die Differentialquotienten durch Anwendung der Bruchregel auf $\sin x : \cos x$ und auf $\cos x : \sin x$ hervorgegangen sind. Dabei tritt, wie bekannt, im Nenner das Quadrat des alten Nenners, also $\cos^2 x$ und $\sin^2 x$ auf. Der Zähler hat bei $\mathrm{tg}\,x$ die einfachste Form, nämlich Eins. Beim Differentialquotienten von $\mathrm{ctg}\,x$ tritt wie bei dem von $\cos x$ das Minuszeichen auf.

Zu den bisher aufgestellten neun Differentiationsregeln (S. 84, 127, 155, 307, 326) können wir nunmehr hinzufügen die

10. Regel (Goniometrische Regel): Die goniometrischen Funktionen haben die Differentialquotienten

$$\frac{d\sin x}{d\,x} = \cos x, \qquad \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x,$$

$$\frac{d\,\mathrm{tg}\,x}{d\,x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad \frac{d\,\mathrm{ctg}\,x}{d\,x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Tröstend sei bemerkt, daß zu diesen zehn Regeln künftig nur noch eine hinzutreten wird.

1. Beispiel: Nach (5) ist $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$. Mittels der Kettenregel und des Differentialquotienten von $\sin x$ leite man hieraus den Differentialquotienten von $\cos x$ ab.

2. Beispiel: Mittels $\mathrm{ctg}\,x = 1 : \mathrm{tg}\,x$ leite man den Differentialquotienten von $\mathrm{ctg}\,x$ aus dem von $\mathrm{tg}\,x$ ab.

3. Beispiel: Nach (5) ist $\mathrm{tg}\,x = \sqrt{1 - \cos^2 x} : \cos x$. Man kann also den Differentialquotienten von $\mathrm{tg}\,x$ aus dem von $\cos x$ ableiten.

4. Beispiel: Man berechne den Differentialquotienten von $\sin^2 x + \cos^2 x$. Wie erklärt es sich, daß sich der Wert Null ergibt?

5. Beispiel: Dasselbe gilt für $\cos x \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 x}$.

6. Beispiel: Sind φ und r Polarkoordinaten (siehe S. 344), so stelle man die Bildkurve der Funktion

$$r = \sin\varphi$$

her. Weshalb ist sie ein Kreis vom Durchmesser Eins, der den Anfangsstrahl OA im Pol O berührt? Siehe Fig. 279. Weil die Tangente t eines beliebigen Punktes P oder $(\varphi; r)$ des Kreises auf dem zugehörigen Radius senkrecht steht, kann man ferner ableiten, daß $dr : d\varphi$ gleich $\cos\varphi$ ist, indem man die Vorschrift für die Tangentenkonstruktion auf S. 346 benutzt. Wegen $r = \sin\varphi$ läßt sich so aufs neue beweisen, daß der Differentialquotient von $\sin\varphi$ gleich $\cos\varphi$ ist.

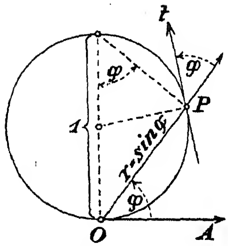


Fig. 279.

7. Beispiel: Man soll $y = \ln\sin x$ differentiieren. Die Kettenregel gibt $dy : dx = \operatorname{ctg} x$.

8. Beispiel: Man soll

$$y = e^{\operatorname{tg}\ln x}$$

differentiieren. Die Kettenregel gibt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\operatorname{tg}\ln x}}{x\cos^2\ln x}.$$

Wir sind jetzt endlich in der Lage, den eigentlichen Grund dafür anzugeben, warum es zweckmäßig ist, die Winkel durch ihr Bogenmaß zu messen (vgl. S. 5, 6): Wenn die Funktion $y = \sin x$ vorliegt und x im Bogenmaß gemessen wird, kommt, wie wir sahen:

$$\frac{dy}{dx} = \cos x.$$

Nehmen wir nun an, der Winkel x sei im Gradmaß gemessen gleich t, also $y = \sin t$. Welchen Wert hat dann der Differentialquotient $dy : dt$? Nach (3), S. 7, ist das Bogenmaß

$$x = \frac{\pi}{180} t.$$

Wir können also schreiben:

$$y = \sin x, \quad x = \frac{\pi}{180} t,$$

so daß die Kettenregel gibt:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\sin x}{dx} \cdot \frac{d\,\frac{\pi}{180}t}{dt} = \cos x \cdot \frac{\pi}{180}$$

oder, da der Winkel statt durch x durchs Gradmaß t gegeben ist:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{180}\cos t.$$

Entsprechendes gilt bei den übrigen goniometrischen Funktionen.

Wenn wir also die Winkel nicht im Bogenmaß x, sondern im Gradmaß t messen, gelten die Differentiationsregeln:

$$\frac{d\sin t}{dt} = \frac{\pi}{180}\cos t, \quad \frac{d\cos t}{dt} = -\frac{\pi}{180}\sin t,$$

$$\frac{d\,\mathrm{tg}\,t}{dt} = \frac{\pi}{180}\frac{1}{\cos^2 t}, \quad \frac{d\,\mathrm{ctg}\,t}{dt} = -\frac{\pi}{180}\frac{1}{\sin^2 t}.$$

Sie sind wegen des Faktors $\pi : 180$ unbequemer als die Regeln, die sich ergeben, wenn die Winkel im Bogenmaß gemessen werden. Hier tritt also ein lästiger Faktor auf wie früher bei der Differentiation von $\log x$, vgl. (11) auf S. 299. Ebenso wie man deshalb (vgl. S. 307) den natürlichen Logarithmus statt des gewöhnlichen benutzt, findet man es bequemer, die Winkel im Bogenmaß statt im Gradmaß zu messen.

Endlich kommen wir zur graphischen Darstellung der Funktionen $\mathrm{tg}\,x$ und $\mathrm{ctg}\,x$. Wenn wir in Fig. 280 beim Kreis um S mit dem Radius Eins die Tangente im Punkt A des Anfangsstrahles SA ziehen, schneidet der Endschenkel SB des Winkels ASB oder x diese Gerade an einer Stelle T. Dann ist $\mathrm{tg}\,x = AT$ (vgl. auch Fig. 269), sobald wir AT positiv oder negativ messen, je nachdem der Sinn der Bewegung von A nach T mit dem positiven Drehsinn übereinstimmt oder nicht. Wenn B im positiven Sinn den Kreis durchläuft, geht auch T im positiven Sinn auf der Tangente hin, d. h. die Funktion $y = \mathrm{tg}\,x$ wächst mit wachsendem x. Dies war nach der Formel

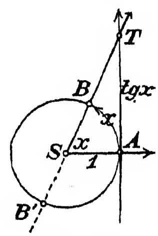


Fig. 280.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

für ihren Differentialquotienten vorauszusehen. Denn dieser Differentialquotient ist stets positiv, so daß die Bildkurve von $y = \mathrm{tg}\,x$ stets steigen muß, siehe Satz 7, S. 104. Aber für $x = \pm\frac{1}{2}\pi, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi \ldots$ wird $\mathrm{tg}\,x$ unendlich groß. Sobald x wachsend einen dieser Werte durchläuft, springt $\mathrm{tg}\,x$ von $+\infty$ zu $-\infty$ über, um weiterhin wieder von $-\infty$ aus mit wachsendem x zuzunehmen, bis $\mathrm{tg}\,x$ bei der nächsten Unstetigkeitsstelle abermals nach $+\infty$ strebt. Demnach zerfällt die Bildkurve, siehe Fig. 281, in lauter aus dem Unendlichen kommende und wieder ins Unendliche gehende Zweige, die in den einzelnen Streifen von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $\frac{1}{2}\pi$, von $\frac{1}{2}\pi$ bis $\frac{3}{2}\pi$ usw. sowie von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $-\frac{3}{2}\pi$ usw. liegen. Die Bildkurve, die Tangenslinie, hat die Periode π, vgl. Satz 2, d. h. durch Verschieben

eines Streifens längs der x-Achse um die Strecke π geht wieder ein Streifen der Bildkurve hervor. Daß $\operatorname{tg} x$ nach Satz 3 eine ungerade Funktion ist, bedeutet geometrisch: Ein Punkt $(x\,;y)$ der Bildkurve geht wieder in einen Punkt der Bildkurve über, wenn x und y zugleich durch $-x$ und $-y$ ersetzt werden. Die beide Punkte verbindende Sehne hat ihre Mitte im Anfangspunkt O. Man nennt deshalb den Anfangs-

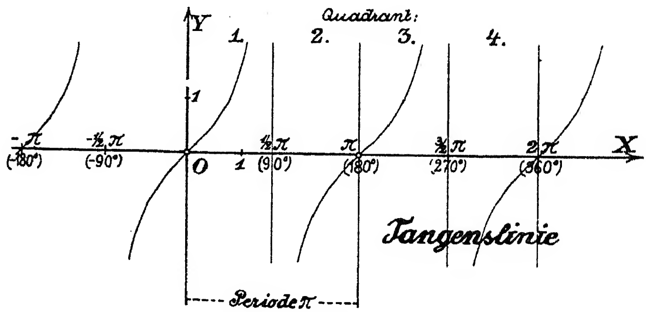


Fig. 281.

punkt einen Spiegelpunkt der Tangenslinie. Die ganze Kurve geht in sich über, wenn man sie um O durch zwei rechte Winkel dreht. Wegen der Periodizität ist jeder Schnittpunkt der Tangenslinie mit der x-Achse ein Spiegelpunkt der Kurve. Die Steigung der Tangenslinie, nämlich $1 : \cos^2 x$, ist für $x = 0$ gleich Eins. Wenn also, wie es in Fig. 281 geschehen ist, die x-Einheit gleich der y-Einheit gewählt wird, ist die Tangente im Anfangspunkt unter 45° geneigt. Dasselbe gilt von den Tangenten aller Schnittpunkte mit der x-Achse. Die Parallelen zur y-Achse mit den Abszissen $\pm\frac{1}{2}\pi$, $\pm\frac{3}{2}\pi$ usw. sind Asymptoten der Tangenslinie (vgl. S. 193).

Was schließlich die Funktion $\operatorname{ctg} x$ betrifft, so ist nach Satz 4 und Satz 3

$$y = \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}\pi - x\right) = -\operatorname{tg}\left(x - \tfrac{1}{2}\pi\right).$$

Mithin geht die Bildkurve von $y = \operatorname{ctg} x$, die Kotangenslinie, aus der Tangenslinie hervor, wenn man diese zuerst um die halbe Periode $\frac{1}{2}\pi$ längs der x-Achse in positiver Richtung verschiebt und dann um die x-Achse herumklappt, siehe Fig. 282.

Den Verlauf der Bildkurven der goniometrischen Funktionen muß man stets geistig vor Augen haben. Die Bildkurven und ihre so leicht zu merkenden Symmetrien und Perioden ersetzen uns nämlich die Formeln.

Schließlich heben wir noch eines hervor: Alle Zahlenwerte, die eine goniometrische Funktion annehmen kann, durchläuft

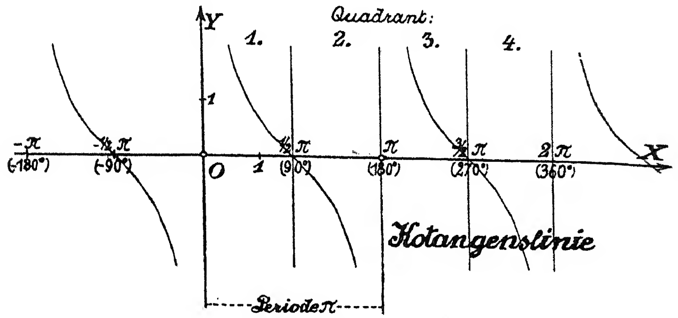


Fig. 282.

sie, abgesehen vom Vorzeichen, auch dann schon, wenn der Winkel selbst nur alle Werte im ersten Quadranten durchläuft. Warum?

9. Beispiel: Man beweise:

$$\frac{d \sec x}{d x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}, \qquad \frac{d \csc x}{d x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

§ 2. Anwendungen der goniometrischen Funktionen.

Wie man die goniometrischen Funktionen berechnet, werden wir später zeigen; vorläufig genügt es, daß man durch Zeichnung die Werte dieser Funktionen für gegebene Winkel angenähert finden kann. Die umgekehrte Aufgabe, zu einem gegebenen Wert einer goniometrischen Funktion den Winkel zu finden, läßt sich ebenso lösen. Allerdings ist es klar, daß z. B. zu einem bestimmten Werte des Sinus nicht nur ein Winkel gehört; es ist aber auch klar, wie man alle zugehörigen Winkel finden kann, sobald man erst einen von ihnen kennt.

In den Sammlungen von Logarithmentafeln finden sich trigonometrische oder goniometrische Tafeln, mittels derer die erwähnten Aufgaben rechnerisch für eine gewisse Anzahl von Dezimalstellen gelöst werden können. Diese Tafeln gelten nur für die Winkel im ersten Quadranten, wo alle goniometrischen Funktionen positiv sind. Aber es gibt zweierlei Tafeln:

Zunächst findet man (allerdings nicht in allen Sammlungen) eine Tafel mit der Aufschrift: „Numerische Werte der trigonometrischen Funktionen“ oder auch: „Natürliche Werte der tri-

gonometrischen Funktionen". Da findet man z. B. in einer vierstelligen Tafel für alle Winkel von 0° bis 90° in Intervallen von etwa je 10 oder 15 Minuten die Werte der goniometrischen Funktionen. Ist α ein Winkel im ersten Quadranten, gemessen im Gradmaß, also $90^{\circ} - \alpha$ der Komplementwinkel, so gibt Satz 4, S. 385:

$$\sin \alpha = \cos (90^{\circ} - \alpha), \qquad \cos \alpha = \sin (90^{\circ} - \alpha),$$
$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} (90^{\circ} - \alpha), \qquad \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} (90^{\circ} - \alpha).$$

Ist also $\alpha > 45^{\circ}$, aber $< 90^{\circ}$, so kommt die Aufgabe, eine Funktion dieses Winkels zu finden, darauf zurück, die Kofunktion des Komplementwinkels zu finden, der kleiner als 45° ist. Hierauf beruht eine Eigentümlichkeit der Tafel: Die Überschriften sin, cos, tg, ctg der einzelnen Spalten beziehen sich auf die in der linken Spalte angegebenen Winkel, dagegen die am unteren Rande jeder Seite stehenden Bezeichnungen cos, sin, ctg, tg auf die in der rechten Spalte angegebenen Winkel.

Das Bestimmen von Zwischenwerten, die nicht in der Tafel stehen, das Einschalten (Interpolieren), geschieht wie bei den logarithmischen Tafeln: Man macht davon Gebrauch, daß die Bildkurven für kurze Intervalle angenähert gerade Linien sind. Man darf deshalb nach § 1 des 2. Kapitels annehmen, daß die Funktionen innerhalb eines genügend kleinen Intervalls proportional zum Winkel wachsen.

Ein Beispiel mag genügen: Wir suchen $\operatorname{ctg} 34^{\circ}\, 13'$. Aus der Tafel entnehmen wir:

$$\operatorname{ctg} 34^{\circ}\, 10' = 1{,}4733, \qquad \operatorname{ctg} 34^{\circ}\, 20' = 1{,}4641.$$

Hier wächst der Winkel um $10'$, sein Kotangens dagegen nimmt um 92 Einheiten der letzten Dezimalstelle ab. Wenn also der Winkel um $1'$ wächst, wird der Kotangens angenähert um 9,2 Einheiten abnehmen, d. h. wenn der Winkel von $34^{\circ}\, 10'$ bis zum gegebenen Winkel von $34^{\circ}\, 13'$, also um $3'$ wächst, wird der Kotangens um rund 28 Einheiten der letzten Dezimalstelle abnehmen, so daß sich $\operatorname{ctg} 34^{\circ}\, 13' = 1{,}4705$ ergibt. Man muß immer darauf achten, ob die Funktion wächst oder abnimmt. Das sieht man sofort in der Tafel selbst an den beiden Werten, zwischen denen die Einschaltung stattfindet.

Umgekehrt: Gegeben sei $\operatorname{tg} \alpha = 1{,}4408$, gesucht wird α im ersten Quadranten. In der Tangensspalte suchen wir 1,4408 oder einen nahe dabei gelegenen Wert, finden jedoch keinen, was einfach daran liegt, daß die Tafel zwei Tangensspalten, nämlich noch eine hat, deren Bezeichnung unten steht und die zu den rechts angegebenen Winkeln gehört. In ihr finden wir:

$$1{,}4370 = \text{tg}\, 55^{\circ}\, 10', \qquad 1{,}4460 = \text{tg}\, 55^{\circ}\, 20',$$

und zwischen beiden Werten liegt der gegebene Wert 1,4408. Hier wächst der Tangens um 90 Einheiten der letzten Dezimalstelle, wenn der Winkel um 10′ zunimmt. Da nun 1,4408 um 38 Einheiten der letzten Dezimalstelle größer als 1,4370 ist, haben wir zu 55° 10′ noch $10' \cdot \frac{38}{90}$, d. h. rund 4′ zu addieren. Also ergibt sich der Winkel $\alpha = 55^{\circ}\, 14'$.

Wir wollen noch den Anfang der Sinustafel mit dem Anfange der auf S. 10 erwähnten Tafel der Kreisbogen (siehe die Tafel I des Anhanges) für den Halbmesser Eins vergleichen. Man hat da die folgenden Werte:

Winkel	Bogenmaß	Sinus
0°	0,0000	0,0000
1°	0,0175	0,0175
2°	0,0349	0,0349
3°	0,0524	0,0523
4°	0,0698	0,0698
5°	0,0873	0,0872
6°	0,1047	0,1045

Die geringen Unterschiede erklärt Satz 7, S. 391. Denn weil $x : \sin x$ für $\lim x = 0$ nach Eins strebt, stimmen sehr kleine positive Winkel mit ihren Sinuswerten nahezu überein, vorausgesetzt, daß die Winkel im Bogenmaß ausgedrückt werden, sonst jedoch nicht.

Häufiger wird die viel ausführlichere Tafel gebraucht, deren Überschrift meistens lautet: „Die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen von Minute zu Minute.“ Hier findet man die gewöhnlichen Logarithmen der goniometrischen Funktionen, also $\log \sin \alpha$, $\log \cos \alpha$, $\log \text{tg}\, \alpha$, $\log \text{ctg}\, \alpha$. Diese Tafel hat wieder zwei Eingänge, die Bezeichnungen oben und links gehören zusammen und ebenso die Bezeichnungen unten und rechts. Da $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ im ersten Quadranten zwischen 0 und 1 liegen, sind ihre Logarithmen negativ. In den Tafeln findet man jedoch positive Werte, man hat sich hier überall noch -10 hinzuzudenken (vgl. S. 301). Da $\text{tg}\, \alpha$ für $\alpha < 45^{\circ}$ ebenfalls zwischen 0 und 1 liegt und dasselbe für $\text{ctg}\, \alpha$ gilt, sobald $45^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$ ist, findet man auch hier nur positive Werte, von denen man 10 abzuziehen hat; z. B. schlage man nach:

$$\log\sin 21^{\circ}16' = 9{,}55956 - 10\,, \quad \log\cos 68^{\circ}44' = 9{,}55956 - 10\,,$$
$$\log\operatorname{tg} 21^{\circ}16' = 9{,}59019 - 10\,, \quad \log\operatorname{ctg} 68^{\circ}44' = 9{,}59019 - 10\,.$$

Das Einschalten geschieht wie bei den Tafeln der gewöhnlichen Logarithmen, und man findet hier wie dort (vgl. S. 302) Nebentäfelchen mit der Überschrift P. P. (partes proportionales) zur Erleichterung der Rechnung. Alles Nähere möge der Leser in der Anleitung nachlesen, die seiner Logarithmentafel vorgedruckt ist.

1. Beispiel: Die Sinuslinie in Fig. 274, S. 388, hat unendlich viele Berge und Täler; daher gehen vom Anfangspunkt O unendlich viele Tangenten an die Kurve. Eine davon ist die, die in O selbst die Kurve berührt und unter 45° ansteigt. Wir suchen diejenige, die von O ausgehend das erste Tal rechts berührt. Die Abszisse des Berührungspunktes sei x, d. h. $\sin x$ seine Ordinate, so daß die gesuchte Tangente die Steigung $\sin x : x$ haben soll. Nach Satz 8, S. 394, muß aber die Steigung gleich $\cos x$ sein. Also muß x derjenige Winkel im dritten Quadranten sein, für den $\sin x : x = \cos x$, d. h. nach (3), S. 378:

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} - 1 = 0 \tag{1}$$

ist. Der gesuchte Winkel x ist daher eine Lösung einer transzendenten Gleichung (vgl. S. 161). Zur Berechnung benutzen wir die Regula falsi (S. 118). Da x zwischen π und $\frac{3}{2}\pi$, d. h. zwischen 3,1 und 4,8 liegt, setzen wir zur Probe für x den Wert $x_1 = 4{,}500$. Dann ist aus

$$y = \frac{\operatorname{tg} x}{x} - 1$$

der zu $x = x_1$ gehörige Fehler $y = y_1$ zu berechnen. Zuerst müssen wir das Gradmaß von x_1 haben. Es ist $x_1 - \pi = 1{,}358$; Tafel I im Anhang gibt zu 1,358 das Gradmaß $77^{\circ}\,48'$. Da der Tangens die Periode π hat, ist also $\operatorname{tg} x_1 = \operatorname{tg} 77^{\circ}\,48'$. Wir schlagen nach:

$$\begin{aligned} \log\operatorname{tg} 77^{\circ}48' &= 0{,}6651\,,\\ \log 4{,}500 &= \underline{0{,}6532}\,,\\ \text{Differenz} = \log\frac{\operatorname{tg} x_1}{x_1} &= 0{,}0119\,,\\ \frac{\operatorname{tg} x_1}{x_1} &= 1{,}028\,, \qquad y_1 = 0{,}028\,. \end{aligned}$$

Wählen wir dagegen den etwas kleineren Näherungswert $x_2 = 4{,}490$, so kommt:

$$\begin{aligned} \log\operatorname{tg} x_2 = \log\operatorname{tg} 77^{\circ}13' &= 0{,}6442\,,\\ \log x_2 &= \underline{0{,}6522_5}\,,\\ \log\frac{\operatorname{tg} x_2}{x_2} &= 0{,}9919_5 - 1\,,\\ \frac{\operatorname{tg} x_2}{x_2} &= 0{,}982\,, \qquad y_2 = -0{,}018\,. \end{aligned}$$

Nach (10), S. 117, ergibt sich hieraus der bessere Näherungswert $x_3 = 4{,}494$. Man führe die Rechnung weiter durch; man kommt dann zu einem Näherungswerte

4,4934. Genauer läßt sich mit vierstelligen Tafeln nicht rechnen. Das zugehörige Gradmaß ist nach Tafel I gleich $257^0\ 27'$. Die Steigung der so bestimmten Tangente ist $\cos x = -0{,}2173$, wie man ebenfalls berechnen möge.

2. Beispiel: Nach dem Brechungsgesetze besteht zwischen den spitzen Winkeln α und β, die ein Lichtstrahl an der Grenze zwischen zwei optisch verschiedenen durchsichtigen Stoffen mit der Senkrechten zur Trennungsfläche vor und nach der Brechung bildet, die Beziehung

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n,$$

wo n eine von den Stoffen, der Lichtart und der Temperatur abhängige Konstante, der Brechungsindex, ist. Handelt es sich um Luft und Wasser und um das Licht der Natriumlinie des Spektrums bei 18^0 C, so ist $n = 1{,}3335$, also

$$\sin\alpha = 1{,}3335 \sin\beta .$$

Da aber $\sin\alpha$ nie größer als Eins wird, kann β einen gewissen größten Wert nicht überschreiten. Um diesen, den Winkel der totalen Reflexion, zu finden, haben wir β aus $\sin\beta = 1 : 1{,}3335$ zu berechnen. Man tue dies logarithmisch. Es kommt $\beta = 48^0\ 34'\ 57''$.

3. Beispiel: Wächst der Winkel x von 0 bis π beständig um dieselbe unendlich kleine Größe, so ergeben sich unendlich viele Werte von $\sin x$, deren arithmetisches Mittel bestimmt werden soll. Dies ist die auf S. 245 erwähnte Mittelwertaufgabe, deren Lösung wir damals ohne Beweis angaben. Vgl. Fig. 195 auf S. 244, in der das Lot $QP = \sin x$ ist. Nach Satz 8, ebenda, ist der gesuchte Mittelwert:

$$m = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x\, dx .$$

Nach S. 236 lassen wir zuerst die obere Grenze des Integrals beliebig, gleich x. Das Integral ist dann eine Funktion von x mit dem Differentialquotienten $\sin x$. Da $-\cos x$ nach Satz 8, S. 394, diesen Differentialquotienten hat, muß das unbestimmte Integral gleich $-\cos x +$ konst. sein, nach Satz 2, S. 213. Weil die untere Grenze Null ist, muß es gleich Null sein für $x = 0$. Also ist die Konstante gleich 1. Setzen wir schließlich für x die obere Grenze π, also $\cos x = \cos\pi = -1$ ein, so kommt $m = 2 : \pi = 0{,}63662$, wie auf S. 245 behauptet wurde.

4. Beispiel: Man berechne ebenso das arithmetische Mittel aller Werte von $\sin x$, wenn x von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ wächst. Warum ergibt sich hier derselbe Wert?

5. Beispiel: Man berechne das arithmetische Mittel aller Werte von $\cos x$, wenn x von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ wächst. Warum ergibt sich wieder derselbe Wert?

6. Beispiel: Wie groß ist die Fläche zwischen der x-Achse und einem Berg der Sinuslinie (siehe Fig. 274, S. 388)? Nach Satz 5, S. 229, hat sie den Wert:

$$F = \int_0^\pi \sin x\, dx = 2 .$$

Das zugehörige Intervall von x hat die Länge π. Dividieren wir F hiermit, so geht derselbe Wert wie im 3. Beispiel hervor (warum muß das so sein?).

7. Beispiel: Auf wagerechter Unterlage ruhe eine Last von p kg, in deren Schwerpunkt O, siehe Fig. 283, ein Zugseil schräg nach oben angebracht sei, das mit einem Gewicht von r kg gespannt werde; diese Spannung sei durch die Strecke OP veranschaulicht. Wir zerlegen sie in ihre wagerechte und senkrechte Komponente OU und OV. Ist $\sphericalangle UOP = \varphi$, so ist $OU = r\cos\varphi$, $OV = r\sin\varphi$. Die zweite Komponente verringert den Druck, so daß er nur $(p - r\sin\varphi)$ kg beträgt. Bedeutet ϱ den Reibungskoeffizienten, so ist deshalb $\varrho\,(p - r\sin\varphi)$ kg das dem Zug OU von $r\cos\varphi$ kg entgegenwirkende Gewicht. Die Reibung wird überwunden, sobald $r\cos\varphi$ größer als $\varrho\,(p - r\sin\varphi)$ wird. Die geringste nötige Zugkraft ist daher:

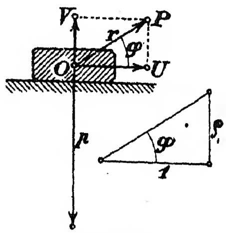


Fig. 283.

$$r = \frac{\varrho p}{\cos\varphi + \varrho\sin\varphi}. \tag{2}$$

Sie ist verschieden je nach dem Zugwinkel φ. Welcher Zugwinkel ist der vorteilhafteste, d. h. für welchen spitzen Winkel φ hat r sein Minimum? Da der Zähler ϱp konstant ist, fragen wir nach dem Maximum des Nenners

$$z = \cos\varphi + \varrho\sin\varphi.$$

Wir berechnen also

$$\frac{dz}{d\varphi} = -\sin\varphi + \varrho\cos\varphi$$

und sehen zu, wann dieser Differentialquotient gleich Null wird (vgl. Satz 8, S. 106). Offenbar für $\operatorname{tg}\varphi = \varrho$. Die Nebenfigur gibt die Konstruktion des günstigsten Zugwinkels an. Dabei ist $\varrho = 0{,}65$ gewählt, wie es beim langsamen Schleppen von Gußeisen auf nasser Eichenholzunterlage der Fall ist.

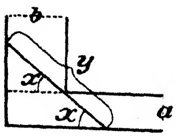


Fig. 284.

8. Beispiel: Ein Weg von a m Breite trifft rechtwinklig auf einen von b m Breite, siehe Fig. 284. Wie lang darf eine Stange sein, die auf den Wegen wagerecht um die Ecke geschafft werden soll? Ist dies eine Aufgabe, in der ein Maximum oder ein Minimum gesucht wird? (Vgl. das 7. Beispiel, S. 169.) Wir geben die Lösung ohne Worte mit Hinweis auf Fig. 284 an:

$$y = \frac{a}{\sin x} + \frac{b}{\cos x}, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{a\cos x}{\sin^2 x} + \frac{b\sin x}{\cos^2 x},$$

$$\operatorname{tg} x = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}, \qquad y = \sqrt{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}}^{\,3}.$$

9. Beispiel: Die Längeneinheit eines homogenen Kreisbogens AB vom Radius r und von der Länge $2\,l$ habe die Masse m. Welche Anziehung übt eine in der Kreismitte O vorhandene Masse μ auf ihn aus? Siehe Fig. 285. Da die Anziehung in der Symmetriegeraden OC stattfindet, kommen nur die zu OC parallelen Kraftkomponenten in Betracht. Die Länge von C bis zu irgendeiner Stelle P des Bogens sei x, positiv gerechnet in der Richtung von C nach A. Wir denken uns den Bogen (wie im 16. Beispiel, S. 259, die Strecke AB) in lauter Teilchen von der Länge dx zerlegt. Das bei P liegende Teilchen hat die Masse $m\,dx$. Nach dem 6. Beispiel, S. 142, übt μ auf diese Masse die Anziehung $k\mu m\,dx : r^2$ aus, wo k eine

Konstante ist. Diese Kraft werde durch UO veranschaulicht. Ihre Komponente VO längs CO geht wegen $OV : OU = \cos(x : r)$ durch Multiplikation mit $\cos(x : r)$ hervor. Daher ist die Gesamtanziehung:

$$y = \int_{-l}^{+l} \frac{k\mu m}{r^2} \cos\frac{x}{r}\, dx,$$

weil x von $-l$ (in B) bis $+l$ (in A) geht. Bleibt die obere Integralgrenze zunächst willkürlich, so handelt es sich um eine Funktion, deren Differentialquotient gleich $\cos(x : r)$, multipliziert mit der Konstante $k\mu m : r^2$ ist. Weil $\sin(x : r)$ nach der Kettenregel den Differentialquotienten

$$\frac{1}{r}\cos\frac{x}{r}$$

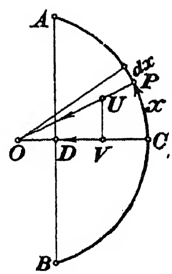


Fig 285.

hat, ist also der Wert des Integrals mit willkürlicher oberer Grenze:

$$\frac{k\mu m}{r}\sin\frac{x}{r} + \text{konst.},$$

vgl. Satz 2, S. 213. Für $x = -l$ muß dieser Wert gleich Null sein. Da aber $\sin(x : r)$ dann gleich $-\sin(l : r)$ ist, wird die Konstante gleich $\sin(l : r)$, multipliziert mit $k\mu m : r$. Wird schließlich die obere Grenze $x = l$ eingesetzt, so kommt:

$$y = 2\frac{k\mu m}{r}\sin\frac{l}{r}.$$

Ist die Sehne $AB = s$, so ist $y = k\mu m s : r^2$. Bedeutet M die Gesamtmasse $2lm$ des Bogens AB, so wird $y = k\mu Ms : (2r^2 l)$. Dieselbe Anziehung erfährt eine an einer Stelle auf OC befindliche gleichgroße Masse M durch die Masse μ, sobald sie von O die Entfernung $r\sqrt{2l : s}$ hat.

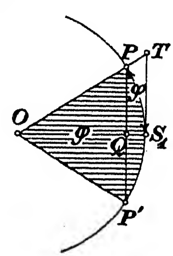


Fig. 286.

10. Beispiel: Im 1. Beispiel, S. 358 u. f., besprachen wir die hyperbolischen Funktionen. Dort wurde gesagt, daß ihre Bezeichnungen daher rühren, daß sie bei der gleichseitigen Hyperbel eine ähnliche Rolle spielen wie die goniometrischen Funktionen beim Kreise vom Halbmesser Eins. In der Tat, wenn wir in Fig. 245, S. 357, die Hyperbel durch den Kreis um O mit dem Halbmesser $OS_1 = 1$ ersetzen, geht Fig. 286 hervor, worin φ wie damals die Fläche OPP' bedeute. Diese Fläche ist als Kreisausschnitt gleich dem halben Produkt aus dem Bogen PP' und Radius, daher der halbe Bogen $S_1P = \varphi$, so daß φ zugleich den Zentriwinkel S_1OP bedeutet. Augenscheinlich ist nun:

$$QP = \sin\varphi, \qquad OQ = \cos\varphi, \qquad S_1T = \operatorname{tg}\varphi.$$

Diese Formeln gehen in die Formeln (12) auf S. 359 über, wenn sin, cos und tg durch Sin, Cos und Tg ersetzt werden.

Wir gehen jetzt an die Ableitung der wichtigsten Sätze der Trigonometrie, der Lehre vom Ausmessen der Dreiecke:

In der Ebene seien zwei Geraden g und h beliebig gezogen. Jede sei mit einem Pfeil versehen. Dann bedeutet $\sphericalangle gh$ den Winkel, den g

drehend beschreiben muß, um in h überzugehen und zwar so, daß auch der Pfeilsinn von g dabei in den von h übergeführt wird. Der Satz 3, S. 385, nach dem der Kosinus eine gerade Funktion ist, während Sinus, Tangens und Kotangens ungerade Funktionen sind, läßt sich so ausdrücken:

$$(3)\quad \left\{ \begin{array}{c} \cos gh = \cos hg\,, \\ \sin gh = -\sin hg, \quad \operatorname{tg} gh = -\operatorname{tg} hg, \quad \operatorname{ctg} gh = -\operatorname{ctg} hg\,. \end{array} \right.$$

Wir erinnern ferner daran, daß das Bogenmaß vom $\sphericalangle gh$ nur bis auf ein beliebiges ganzes additives Vielfaches $2n\pi$ von 2π bestimmt ist (S. 384), daß aber alle vier goniometrischen Funktionen ungeändert bleiben, wenn man den Winkel um $2n\pi$ wachsen läßt. Wenn wir also nicht für die Winkel selbst, sondern ausschließlich für ihre goniometrischen Funktionen Formeln aufstellen wollen, brauchen wir uns um dies additive $2n\pi$ gar nicht zu kümmern.

Sind nun g, h, k drei beliebige mit Pfeilen versehene Geraden, so dürfen wir hiernach ansetzen:

$$\sphericalangle gh + \sphericalangle hk = \sphericalangle gk\,,$$

obgleich es eigentlich heißen müßte:

$$\sphericalangle gh + \sphericalangle hk = \sphericalangle gk + 2n\pi\,.$$

Insbesondere wollen wir annehmen, die dritte Gerade k gehe mit ihrem Pfeilsinne durch positive Drehung von h um einen rechten Winkel $(\frac{1}{2}\pi)$ hervor. Dann dürfen wir $\sphericalangle hk = \frac{1}{2}\pi$ setzen, so daß wir haben:

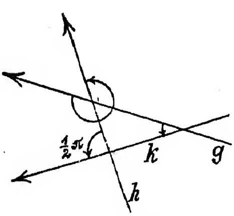


Fig. 287.

$$\sphericalangle gh + \tfrac{1}{2}\pi = \sphericalangle gk\,.$$

Wieder müßte eigentlich noch auf einer Seite $2n\pi$ addiert werden, denn wenn z. B. g zu h und k so wie in Fig. 287 liegt und die Winkel, wie hier angegeben, positiv gemessen werden, ist $\sphericalangle gh + \frac{1}{2}\pi$ gleich $\sphericalangle gk + 2\pi$. Weil ferner $\sphericalangle gh = -\sphericalangle hg$ gesetzt werden darf (eigentlich $\sphericalangle gh = -\sphericalangle hg + 2n\pi$), können wir also die Gleichung benutzen:

$$(4)\qquad \sphericalangle gk + \sphericalangle hg = \tfrac{1}{2}\pi\,.$$

Demnach gilt für $\sphericalangle gk$ und $\sphericalangle hg$ das über Komplementwinkel Bekannte, vgl. Satz 4, S. 385. Somit ist $\sin gk = \cos hg$, also nach (3) auch $\sin gk = \cos gh$, ferner $\cos gk = \sin hg$, nach (3) mithin

$\cos gk = -\sin gh$, usw. Wir bekommen: auf diese Art:

$$(5)\qquad \begin{cases} \sin gk = \cos gh\,, & \cos gk = -\sin gh\,, \\ \operatorname{tg} gk = -\operatorname{ctg} gh\,, & \operatorname{ctg} gk = -\operatorname{tg} gh\,. \end{cases}$$

Diese Formeln, die wir nachher benutzen wollen, gelten also, wenn g und h zwei beliebige mit Pfeilen versehene Geraden sind und die dritte Gerade k mit ihrem Pfeil aus h durch positive Drehung um einen rechten Winkel entsteht.

Nun müssen wir den Begriff der senkrechten Projektion einer Strecke einführen: Auf irgendeiner Geraden g seien zwei Punkte A und B gewählt. Dann soll die Strecke AB positiv oder negativ in Rechnung gesetzt werden, je nachdem die Bewegung von A nach B dem Pfeil von g entspricht oder nicht. Die Lote von A und B auf die Gerade h mögen die Fußpunkte A' und B' haben. Die Strecke $A'B'$ soll ihrerseits auch positiv oder negativ genommen werden, je

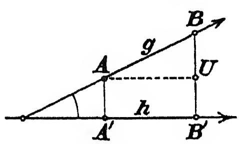


Fig. 288.

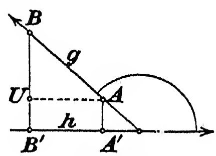


Fig. 289.

nachdem die Bewegung von A' nach B' dem Pfeil von h entspricht oder nicht. Diese Strecke $A'B'$ heißt die senkrechte Projektion von AB auf h. In Fig. 288 z. B. sind AB und $A'B'$ beide positiv, in Fig. 289 dagegen ist zwar AB positiv, aber $A'B'$ negativ. Die Parallele zu h durch A schneide BB' in U. Da sie mit g denselben Winkel bildet wie h mit g, ist $AU = AB \cos gh$ und wegen $A'B' = AU$ also:

$$(6)\qquad A'B' = AB \cos gh.$$

Diese Formel stimmt stets auch im Vorzeichen, wie auch immer g und h mit ihren Pfeilen gegeben sein mögen und welches Vorzeichen auch immer AB haben mag. Denn in Fig. 288 ist $\sphericalangle\, gh$ spitz, also $\cos gh$ positiv, einerlei ob $\sphericalangle\, gh$ positiv oder negativ ist, weil nach der ersten Formel (3) ja $\cos gh = \cos hg$ ist. Also sind alle drei Glieder $A'B'$, AB, $\cos gh$ im Fall der Fig. 288 positiv, so daß die Vorzeichen stimmen. In dem Fall, wo $\sphericalangle\, gh$ nicht spitz ist, siehe Fig. 289, ist $\cos gh$ bekanntlich negativ, siehe (6) auf S. 380; hier ist aber auch $A'B'$ negativ, während AB positiv ist, so daß die Vorzeichen jetzt ebenfalls stimmen. Hätten wir in Fig. 288 oder Fig. 289 die Bezeichnungen A und B vertauscht, also auch die Bezeichnungen

A' und B', so hätten AB und $A'B'$ beide das entgegengesetzte Vorzeichen wie bisher, und die Formel (6) ändert sich nicht, wenn man beiderseits das Minuszeichen vorsetzt. In der Tat also ist der Ausdruck (6) der Projektion $A'B'$ von AB stets richtig.

Satz 10: Die senkrechte Projektion $A'B'$ einer Strecke AB einer mit Pfeil versehenen Geraden g auf eine ebenfalls mit Pfeil versehene Gerade h ist gleich $AB \cos gh$, sobald AB und $A'B'$ positiv oder negativ gerechnet wird, je nachdem die Bewegung von A nach B und die von A' nach B' dem Pfeil auf g und h entspricht oder nicht.

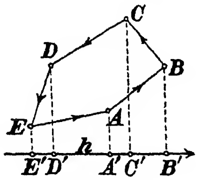


Fig. 290.

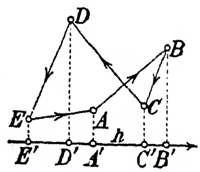


Fig. 291.

Jetzt nehmen wir irgendeinen gebrochenen Linienzug an, der sich schließt, siehe z. B. $ABCDE$ in Fig. 290 oder auch den sich selbst überschneidenden Linienzug $ABCDE$ in Fig. 291. Er möge in einem bestimmten Sinn durchlaufen werden, und dementsprechend versehen wir seine einzelnen Strecken mit Pfeilen. Werden diese Strecken auf eine mit Pfeil versehene Gerade h projiziert, so findet man, daß die Summe der Projektionen gleich Null ist, denn z. B. in unseren Figuren sind $A'B'$ und $E'A'$ positiv, dagegen $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$ negativ. Also:

Satz 11: Die Summe der Projektionen der Strecken eines geschlossenen Linienzuges auf eine Gerade ist stets gleich Null.

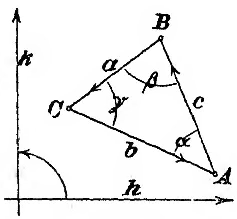


Fig. 292.

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir ein Dreieck ABC, siehe Fig. 292. Mit a, b, c seien die Seiten BC, CA, AB bezeichnet, gemessen im Sinn des Umlaufes von A über B nach C und zurück nach A. Zugleich sollen a, b, c die positiven Maßzahlen der Seiten bedeuten. Die Projektion von a auf irgendeine mit Pfeil gegebene Gerade h ist dann $a \cos ah$. Nach Satz 11 kommt somit:

(7) $$a \cos ah + b \cos bh + c \cos ch = 0\,.$$

Bedeutet k eine Gerade, die mit ihrem Pfeil aus h durch positive Drehung um einen rechten Winkel entsteht, so bekommt man ebenso durch Projektion auf k:

$$a \cos a k + b \cos b k + c \cos c k = 0.$$

Nach (5) kann aber hierfür geschrieben werden:

$$a \sin a h + b \sin b h + c \sin c h = 0. \tag{8}$$

Weil man als Gerade h insbesondere a selbst wählen dürfte, folgt aus (8) wegen $\sin a a = \sin 0 = 0$:

$$b \sin b a + c \sin c a = 0$$

oder, da $\sin b a = - \sin a b$ nach (3) ist:

$$b \sin a b = c \sin c a.$$

Ebenso kommt, wenn man a, b, c zyklisch vertauscht, d. h. a durch b sowie b durch c und c durch a ersetzt:

$$c \sin b c = a \sin a b$$

und nach abermaliger zyklischer Vertauschung:

$$a \sin c a = b \sin b c.$$

Aus diesen drei Formeln ergibt sich:

$$a : b : c = \sin b c : \sin c a : \sin a b. \tag{9}$$

Die Gleichungen (7) und (8) bleiben mithin richtig, wenn man darin a, b, c durch $\sin b c$, $\sin c a$, $\sin a b$ ersetzt, wie auch immer die Gerade h gewählt sein mag. Also kommt:

Satz 12: Sind a, b, c, h vier mit Pfeilen versehene Geraden der Ebene, so ist stets:

$$\sin b c \cos a h + \sin c a \cos b h + \sin a b \cos c h = 0.$$
$$\sin b c \sin a h + \sin c a \sin b h + \sin a b \sin c h = 0.$$

Allerdings wurde angenommen, daß a den Pfeil von B nach C hin habe, usw. Diese Voraussetzungen sind aber ohne Bedeutung. Denn wenn man den Pfeil von a ändert, kommt dies darauf hinaus, daß alle Winkel, die a als einen Schenkel haben, um π wachsen oder abnehmen. Nach (7), S. 381, ändern dabei die zugehörigen Sinus und Kosinus das Vorzeichen. Die Formeln des Satzes 12 bleiben aber unverändert, wenn man $\cos a h$, $\sin c a$, $\sin a b$ und $\sin a h$ sämtlich mit dem Minuszeichen versieht.

Bezeichnen wir die positiv gemessenen Innenwinkel des Dreiecks ABC mit α, β, γ, siehe wieder Fig. 292, so ist der kleinste positive Winkel von b mit c gleich $\pi - \alpha$, also $\sin b\,c = \sin\alpha$, nach (7), S. 381. Ebenso ist $\sin c\,a = \sin\beta$, $\sin a\,b = \sin\gamma$. Aus (9) folgt somit:

Satz 13: Die Seitenlängen a, b, c eines Dreiecks verhalten sich zueinander wie der Sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel α, β, γ des Dreiecks, in Formel:

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma\,.$$

Dies ist der Sinussatz der Trigonometrie.

Wir lassen jetzt die Gerade h mit a zusammenfallen. Dann ist $\cos a\,h = \cos 0 = 1$, so daß aus (7) folgt:

$$a + b\cos b\,a + c\cos c\,a = 0\,.$$

Ebenso kommt durch zweimalige zyklische Vertauschung von a, b, c:

$$b + c\cos c\,b + a\cos a\,b = 0\,,$$
$$c + a\cos a\,c + b\cos b\,c = 0\,.$$

Nach (3) ist $\cos b\,a = \cos a\,b$ usw. Wenn wir diese Werte einsetzen, darauf die erste Gleichung mit a, die zweite mit b und die dritte mit $-c$ multiplizieren und dann alle drei addieren, folgt:

$$a^2 + b^2 - c^2 + 2\,a\,b\cos a\,b = 0\,.$$

Für das Dreieck in Fig. 292 bedeutet dies, da $\sphericalangle\, ab = \pi - \gamma$, also $\cos a\,b = -\cos\gamma$ nach (7), S. 381, ist:

Satz 14: Sind a, b, c die Seitenlängen und α, β, γ die ihnen gegenüberliegenden Winkel eines Dreiecks, so ist

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma\,.$$

Dies ist der Kosinussatz der Trigonometrie. Natürlich ergibt sich ebenso:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha\,,\quad b^2 = c^2 + a^2 - 2\,c\,a\cos\beta\,.$$

Wir wollen ferner die für trigonometrische Rechnungen nötigen goniometrischen Formeln ableiten:

Drei ganz beliebig gewählte Winkel mögen x, y, z heißen. Nehmen wir eine Gerade h mit einem Pfeil an, so können wir drei Geraden a, b, c mit Pfeilen ziehen, die mit h diese Winkel bilden, so daß $\sphericalangle\, ah = x$, $\sphericalangle\, bh = y$, $\sphericalangle\, ch = z$ ist. Da $\sphericalangle\, bc + \sphericalangle\, ch = \sphericalangle\, bh$ ist, folgt $\sphericalangle\, bc + z = y$, also $\sphericalangle\, bc = y - z$. Ebenso ist $\sphericalangle\, ca = z - x$, $\sphericalangle\, ab = x - y$. Aus Satz 12 ergibt sich somit der

Satz 15: Sind x, y, z drei beliebige Winkel, so ist stets:

$$\sin(y-z)\cos x + \sin(z-x)\cos y + \sin(x-y)\cos z = 0,$$
$$\sin(y-z)\sin x + \sin(z-x)\sin y + \sin(x-y)\sin z = 0.$$

Wählen wir $z = 0$, so gibt die erste Formel, da $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos 0 = 1$ ist:

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y. \tag{10}$$

Ersetzen wir y durch $-y$, was wir tun dürfen, da y ein ganz beliebiger Winkel ist, so bleibt $\cos y$ ungeändert, während $\sin y$ durch $-\sin y$ zu ersetzen ist. Also folgt:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y. \tag{11}$$

Wenn wir in (10) und (11) den Winkel x durch den Komplementwinkel $\frac{1}{2}\pi - x$ ersetzen, kommt nach Satz 4, S. 385:

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \tag{12}$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y. \tag{13}$$

Nach der ersten Formel (3), S. 378, folgt durch Division von (11) mit (12) ein Ausdruck für $\operatorname{tg}(x+y)$. Wenn wir darin Zähler und Nenner des Bruchs rechts mit $\cos x \cos y$ dividieren, kommt:

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

Wenn wir y durch $-y$ ersetzen und beachten, daß $\operatorname{tg}(-y) = -\operatorname{tg} y$ nach Satz 3, S. 385, ist, ergibt sich hieraus eine Formel für $\operatorname{tg}(x-y)$. Da ferner nach (2), S. 377, $\operatorname{ctg}\alpha = 1 : \operatorname{tg}\alpha$ ist, kann man auch leicht Formeln für $\operatorname{ctg}(x+y)$ und $\operatorname{ctg}(x-y)$ aufstellen. So kommt der

Satz 16: Zur Berechnung der goniometrischen Funktionen der Summe oder Differenz zweier Winkel aus den goniometrischen Funktionen dieser beiden Winkel selbst dienen die Formeln:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y. \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y,$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}, \qquad \operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},$$
$$\operatorname{ctg}(x+y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y}, \qquad \operatorname{ctg}(x-y) = -\frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y + 1}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y}.$$

Die links stehenden Formeln geben, wenn man $x = y$ annimmt:

Satz 17: Zur Berechnung der goniometrischen Funktionen des Doppelten eines Winkels aus denen des Winkels selbst dienen die Formeln:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x\,, \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x\,,$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}\,, \qquad \operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x}\,.$$

Werden die Formeln der ersten Zeile in Satz 16 addiert oder subtrahiert, ebenso die der zweiten Zeile, so kommt.

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) + \sin(x-y) &= 2\sin x\cos y\,,\\
\sin(x+y) - \sin(x-y) &= 2\cos x\sin y\,,\\
\cos(x+y) + \cos(x-y) &= 2\cos x\cos y\,,\\
\cos(x+y) - \cos(x-y) &= -2\sin x\sin y\,.
\end{aligned}$$

Wird $x+y=u$, $x-y=v$, also $x=\frac{1}{2}(u+v)$ und $y=\frac{1}{2}(u-v)$ gesetzt, so ergibt sich hieraus der

Satz 18: Um die Summe oder Differenz der Sinus oder Kosinus zweier Winkel durch ein Produkt von goniometrischen Funktionen darzustellen, hat man die Formeln zu benutzen:

$$\begin{aligned}
\sin u + \sin v &= 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}\,,\\
\sin u - \sin v &= 2\cos\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}\,,\\
\cos u + \cos v &= 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}\,,\\
\cos u - \cos v &= -2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}\,.
\end{aligned}$$

Wenn wir die in Satz 17 stehende Formel

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

zu der bekannten Formel

$$1 = \cos^2 x + \sin^2 x\,,$$

vgl. (4), S. 378, addieren oder sie von ihr subtrahieren, finden wir:

(14) $$\cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)\,, \quad \sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x)\,.$$

Aus demselben Satz 17 folgt ferner:

$$\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = \frac{2\sin x\cos x}{1+\cos^2 x - \sin^2 x}$$

oder, wenn $1 - \sin^2 x$ im Nenner rechts durch $\cos^2 x$ ersetzt wird:

$$\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x .$$

Ebenso kommt:

$$\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \operatorname{tg} x .$$

Da $\operatorname{ctg} x = 1 : \operatorname{tg} x$ ist, können wir auch $\operatorname{ctg} x$ durch $\sin 2x$ und $\cos 2x$ ausdrücken. Wenn wir schließlich $2x$ mit w bezeichnen, erhalten wir den

Satz 19: Um die goniometrischen Funktionen des halben Winkels durch die des ganzen auszudrücken, hat man die Formeln zu benutzen:

$$\sin \tfrac{1}{2} w = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \cos w)}, \qquad \cos \tfrac{1}{2} w = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + \cos w)},$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} w = \frac{\sin w}{1 + \cos w} = \frac{1 - \cos w}{\sin w},$$

$$\operatorname{ctg} \tfrac{1}{2} w = \frac{1 + \cos w}{\sin w} = \frac{\sin w}{1 - \cos w}.$$

Wie man sieht, sind der Sinussatz und der Kosinussatz der Trigonometrie, nämlich Satz 13 und 14, sowie die goniometrischen Formeln der übrigen Sätze 15 bis 19 eigentlich nur Folgen des einen Satzes 12, der sich auf beliebige vier Geraden der Ebene bezieht, denn außer diesem Satz wurden nur aus dem ersten Paragraphen bekannte Eigenschaften der goniometrischen Funktionen benutzt. Der Sinussatz, nach dem sich die Seiten eines Dreiecks wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel verhalten, ist leicht zu merken. Aber auch der Kosinussatz. Man denke da nämlich zunächst an ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c. Für dieses ist ja nach Pythagoras $c^2 = a^2 + b^2$. Ist das Dreieck nicht rechtwinklig, d. h. ist der c gegenüber liegende Winkel γ kein rechter, so muß man sich nur noch merken, daß ein sogenanntes Korrektionsglied hinzutritt, durch das die Formel auch dann richtig wird, daß nämlich $2ab \cos \gamma$ zu subtrahieren ist. Wieviel man sich von den goniometrischen Formeln der Sätze 15 bis 19 im Kopfe zu merken hat, hängt ganz davon ab, wie stark man von ihnen Gebrauch machen will. Jedenfalls ist es recht nützlich, wenn man sich die Formeln des Satzes 16 für den Sinus und Kosinus der Summe zweier Winkel x und y merkt:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y ,$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y .$$

Denn daraus kann man leicht auch $\sin(x - y)$ und $\cos(x - y)$ sowie die Formeln für den Tangens und Kotangens von $x + y$ und $x - y$ ableiten. **Besonders häufig braucht man die Formeln des Satzes 17 für $\sin 2x$ und $\cos 2x$.** Aber sie ergeben sich sofort aus den beiden vorstehenden Formeln, wenn man in ihnen $x = y$ setzt.

Wer sich die goniometrischen Formeln nicht ins Gedächtnis einprägen kann, braucht sich deshalb keine Sorge zu machen; im Bedarfsfalle blickt man eben auf die Sätze 15 bis 19 zurück. Man muß sich also nur **merken, daß es überhaupt Formeln für die goniometrische Funktion von Summen (Satz 16) und für die Summen von goniometrischen Funktionen (Satz 18) sowie für die goniometrischen Funktionen der doppelten Winkel (Satz 17) und die der halben Winkel (Satz 19) gibt.**

11. Beispiel: Wie sieht die Bildkurve der Funktion

$$y = \sin^2 x$$

aus? Sie verläuft zwischen der x-Achse und der Geraden $y = 1$. Da $\sin^2 x$ dasselbe wie $\sin^2(x + \pi)$ ist, hat y die Periode π. Nach (14) ist:

$$y = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2x.$$

Nun hat $\frac{1}{2}\cos 2x$ als Bildkurve diejenige Linie, die aus der Kosinuslinie in Fig. 276, S. 390, hervorgeht, wenn man von allen Abszissen und Ordinaten die Hälften nimmt. Dies gibt die in Fig. 293 gestrichelte Kurve. Die Bildkurve von $-\frac{1}{2}\cos 2x$ geht hieraus durch Umklappung um die x-Achse hervor, siehe die punktierte Linie. Verschieben wir diese schließlich noch um $\frac{1}{2}$ parallel zur y-Achse, so ergibt sich die Bildkurve von $y = \sin^2 x$. Nach dem 6. Beispiel, S. 403, ist die Fläche eines Berges der Sinuslinie gleich 2, also auch die eines Berges der Kosinuslinie. Daraus folgt, daß die in Fig. 293 geschraffte Fläche f gleich $2 : 4 = \frac{1}{2}$ ist. Wie groß ist die Fläche

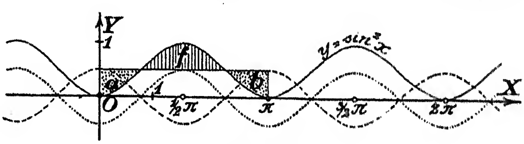


Fig. 293.

zwischen der Bildkurve von $y = \sin^2 x$ und der x-Achse von $x = 0$ bis $x = \pi$? Da die Flächenstücke a und b zusammen gleich dem Flächenstück f sind, ist sie gleich der Fläche des Rechtecks mit den Seiten π und $\frac{1}{2}$, also gleich $\frac{1}{2}\pi$. Man kann dies auch rechnerisch finden, denn nach Satz 5, S. 229, ist die Fläche das bestimmte Integral:

$$\int_0^\pi \sin^2 x\, dx = \int_0^\pi (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2x)\, dx.$$

Das Integral mit der oberen Grenze x ist eine Funktion von x mit dem Differentialquotienten $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$, und diesen Differentialquotienten hat augenscheinlich

auch die Funktion $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$. Hieraus folgt in bekannter Weise:

$$\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}\pi\,.$$

12. **Beispiel:** Will man das Integral

$$y = \int_0^x \sin^2 kx\,dx$$

berechnen, worin k konstant sei, so setzt man nach (14)

$$\sin^2 kx = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2kx)$$

und bekommt:

$$y = \int_0^x \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2kx)\,dx\,.$$

Da $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4k}\sin 2kx$ denselben Differentialquotienten hat, ergibt sich:

$$y = \tfrac{1}{2}x - \frac{1}{4k}\sin 2kx\,.$$

13. **Beispiel:** Um

$$y = \int_0^x \cos^2 kx\,dx$$

aus dem letzten Ergebnis abzuleiten, setzen wir für $\cos^2 kx$ den Wert $1 - \sin^2 kx$ ein. Dann wird

$$y = \int_0^x (1 - \sin^2 kx)\,dx\,.$$

Nach Satz 6, S. 237, kommt daher:

$$y = \int_0^x dx - \int_0^x \sin^2 kx\,dx = x - \tfrac{1}{2}x + \frac{1}{4k}\sin 2kx = \tfrac{1}{2}x + \frac{1}{4k}\sin 2kx\,.$$

14. **Beispiel:** Wenn k und l Konstanten sind, soll das Integral

$$y = \int_0^x \sin kx \cos lx\,dx$$

berechnet werden. Nach der ersten Formel des Satzes 18 verwandeln wir das Produkt $\sin kx \cos lx$ in eine Summe. Wir setzen also $kx = \frac{1}{2}(u + v)$ und $lx = \frac{1}{2}(u - v)$, d. h. $u = (k + l)x$ und $v = (k - l)x$ und finden:

$$\sin kx \cos lx = \tfrac{1}{2}\sin(k + l)x + \tfrac{1}{2}\sin(k - l)x\,.$$

Nach Satz 6, S. 237, ist daher:

$$y = \int_0^x \tfrac{1}{2} \sin (k + l)\, x\, dx + \int_0^x \tfrac{1}{2} \sin (k - l)\, x\, dx .$$

Nun hat $\cos (k + l)\, x$ den Differentialquotienten $-(k + l) \sin (k + l)\, x$. Das erste Integral hat folglich denselben Differentialquotienten wie die Funktion

$$-\frac{1}{2\,(k + l)} \cos (k + l)\, x ,$$

und da diese Funktion für $x = 0$ den Wert $-1 : 2\,(k + l)$ annimmt, hat das erste Integral den Wert:

$$\frac{1 - \cos (k + l)\, x}{2\,(k + l)} .$$

In entsprechender Art berechnet man das zweite. Schließlich kommt:

$$\int_0^x \sin kx \cos lx\, dx = \frac{1 - \cos (k + l)\, x}{2\,(k + l)} + \frac{1 - \cos (k - l)\, x}{2\,(k - l)} .$$

Ist die obere Grenze $x = 2\pi$ und sind k und l insbesondere **ganze positive** Zahlen, so ist $\cos (k + l)\, x = \cos 2\,(k + l)\, \pi$, also gleich dem Kosinus eines ganzen Vielfachen von 2π, daher gleich Eins. Dasselbe gilt dann von $\cos (k - l)\, x$. Somit ist

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cos lx\, dx = 0 , \tag{15}$$

wenn k und l ganze positive Zahlen sind. Allerdings ist dieser Schluß nicht erlaubt, wenn $k - l = 0$ ist, weil $k - l$ vorhin in einem Nenner vorkam. In diesem Fall benutzen wir die erste Formel des Satzes 17 und erhalten:

$$\int_0^x \sin kx \cos kx\, dx = \int_0^x \tfrac{1}{2} \sin 2kx\, dx = \frac{1 - \cos 2kx}{4k} .$$

Ist wieder die obere Grenze $x = 2\pi$ und k eine ganze Zahl, so wird $\cos 2kx = \cos 4k\pi = 1$, mithin das Integral gleich Null, so daß (15) auch für $k = l$ gilt.

15. Beispiel: In derselben Art berechne man die Formeln:

$$\int_0^x \sin kx \sin lx\, dx = -\frac{\sin (k + l)\, x}{2\,(k + l)} + \frac{\sin (k - l)\, x}{2\,(k - l)} .$$

$$\int_0^x \cos kx \cos lx\, dx = \frac{\sin (k + l)\, x}{2\,(k + l)} + \frac{\sin (k - l)\, x}{2\,(k - l)} .$$

Sie sind unbrauchbar, wenn $k = l$ oder $k = -l$ ist. In diesen Fällen liegen die schon im 12. und 13. Beispiel behandelten Integrale vor. Ist die obere Grenze $x = 2\pi$

und sind k und l zwei verschiedene ganze positive Zahlen, so sind $\sin(k+l)x$ oder $\sin 2(k+l)\pi$ und $\sin(k-l)\pi$ oder $\sin 2(k-l)\pi$ als Sinus von ganzen Vielfachen von 2π gleich Null. Daher kommt:

$$(16) \qquad \int_0^{2\pi} \sin kx \sin lx \, dx = 0\,, \quad \int_0^{2\pi} \cos kx \cos lx \, dx = 0\,,$$

sobald k und l zwei verschiedene ganze positive Zahlen sind. Im Fall $k = l$ dagegen kommt nach dem 12. und 13. Beispiel:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 kx \, dx = \pi - \frac{1}{4k} \sin 4k\pi\,, \qquad \int_0^{2\pi} \cos^2 kx \, dx = \pi + \frac{1}{4k} \sin 4k\pi\,.$$

Da k eine ganze Zahl ist, wird $\sin 4k\pi = 0$. Also folgt:

$$(17) \qquad \int_0^{2\pi} \sin^2 kx \, dx = \pi\,, \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 kx \, dx = \pi\,,$$

wenn k eine ganze positive Zahl ist,

16. Beispiel: Um das Integral

$$\int_0^x \sin(x+k) \sin(x+l) \, dx$$

zu berechnen, worin k und l irgendwelche Konstanten bedeuten sollen, wenden wir die letzte Formel des Satzes 18 an, indem wir $x + k = \frac{1}{2}(u+v)$ und $x + l = \frac{1}{2}(u-v)$, also $u = 2x + k + l$, $v = k - l$ setzen, so daß kommt:

$$\sin(x+k)\sin(x+l) = -\tfrac{1}{2}\cos(2x+k+l) + \tfrac{1}{2}\cos(k-l)\,.$$

Nach Satz 6, S. 237, ist daher:

$$\int_0^x \sin(x+k)\sin(x+l)\,dx = -\int_0^x \tfrac{1}{2}\cos(2x+k+l)\,dx + \int_0^x \tfrac{1}{2}\cos(k-l)\,dx\,.$$

Der Integrand des letzten Integrals ist konstant, das Integral also $\frac{1}{2}x\cos(k-l)$. Da ferner $\sin(2x+k+l)$ den Differentialquotienten $2\cos(2x+k+l)$ hat, ist das erste Integral gleich $\frac{1}{4}\sin(2x+k+l) - \frac{1}{4}\sin(k+l)$. Also ergibt sich:

$$\int_0^x \sin(x+k)\sin(x+l)\,dx = -\tfrac{1}{4}\sin(2x+k+l) + \tfrac{1}{2}x\cos(k-l) + \tfrac{1}{4}\sin(k+l)\,.$$

§ 3. **Periodische Vorgänge.**

Bei den goniometrischen Funktionen haben wir zum erstenmal eine Periodizität wahrgenommen (siehe S. 384). Viele Naturerscheinungen sind periodisch, da sie regelmäßig nach Ablauf derselben Zeitspanne,

ihrer Periode, wiederkehren. Auch in der Technik gewahrt man viele periodische Vorgänge. Man baut die Maschinen so, daß sie eine periodisch wiederkehrende Arbeit leisten. Bekanntlich bezeichnet man in diesem Fall eine Periode auch als eine Tour. Die Tourenzahl einer Maschine ist die Anzahl der in der Zeiteinheit, z. B. einer Minute, enthaltenen Perioden.

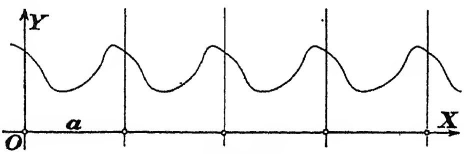


Fig. 294.

Bei der mathematischen Behandlung periodischer Vorgänge treten periodische Funktionen auf. Eine Funktion $f(x)$ heißt periodisch mit der Periode a, wenn es eine von Null verschiedene Konstante a derart gibt, daß für jeden Wert von x

$$f(x+a)=f(x) \tag{1}$$

ist. Stellt man die Funktion graphisch dar, so heißt dies: Eine Kurve ist periodisch längs der x-Achse, wenn es eine von Null verschiedene Konstante a derart gibt, daß die Kurve bei einer Verschiebung längs der x-Achse um die Strecke a wieder in sich übergeht. Daß der Fall $a=0$ gar nicht in Betracht kommt, leuchtet ein. Die Kurve besteht aus lauter kongruenten Stücken, siehe Fig. 294; jedes einzelne geht bei der Verschiebung in das folgende über. Der Gesamtverlauf der Kurve ist bekannt, sobald man nur ihren Verlauf von $x=0$ bis $x=a$ kennt. Die Kurve geht auch dann in sich über, wenn man sie längs der Abszissenachse um $2a$, $3a$ usw. oder um $-a$, $-2a$ usw., d. h. rückwärts, verschiebt. Zugleich mit a ist daher jedes positive oder negative ganze Vielfache von a eine Periode. Man nennt deshalb a die wesentliche Periode, während $2a$, $3a$ usw. sowie $-a$, $-2a$ usw. unwesentliche, d. h. selbstverständlich dann ebenfalls vorhandene Perioden sind. Auch erkennt man: Immer darf angenommen werden, daß die Periode a positiv sei, denn wenn a negativ wäre, könnte man ja $-a$ als die wesentliche Periode erklären. Schließlich leuchtet noch ein: Ist die Funktion in der Periode von $x=0$ bis $x=a$ stetig, so ist sie überall stetig.

Wir wissen, daß $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ die Periode 2π haben, aber auch, daß dies nur bei $\sin x$ und $\cos x$ die wesentliche Periode ist, denn $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{ctg} x$ haben die halb so große Periode π als wesentliche Periode, vgl. Satz 2, S. 384.

Nehmen wir an, eine Funktion $y=f(x)$ habe sowohl die Periode a als auch die Periode b. Beide Perioden dürfen wir

positiv voraussetzen. Die Bildkurve geht dann bei der Verschiebung längs der Abszissenachse in sich über, wenn die Verschiebungsstrecke ein ganzes Vielfaches von a oder von b ist, also auch, wenn diese Strecke gleich $ma + nb$ ist, wo m und n irgendwelche **ganze** Zahlen sind. Von den beiden Perioden a und b sei etwa a die größere. Dann ist auch $a - b$ eine Periode, ebenso $a - 2b$, $a - 3b$ usw. Wir wollen nun b so oft von a abziehen, bis ein positiver Rest c verbleibt, der kleiner als b ist. Da c die Form $a - nb$ hat, ist dann c ebenfalls eine Periode. Nun ziehen wir wieder c von b so oft ab, bis ein positiver Rest d kleiner als c verbleibt, der ebenfalls eine Periode ist. So können wir fortfahren. Auf diesem Wege würden wir zu immer kleineren Perioden gelangen und zwar zu Perioden, die nach Null streben, wenn nicht noch eine andere Möglichkeit vorhanden wäre: es könnte sich einmal der Rest Null ergeben. Wenn z. B. $d = 0$ ist, bedeutet dies, daß c in b aufgeht, d. h. b ein ganzes Vielfaches von c ist. Da von a die Periode b so oft abgezogen wurde, bis c übrigblieb, ist dann a die Summe aus c und einem ganzen Vielfachen von b, d. h. auch a ist ein ganzes Vielfaches von c. Dieselbe Schlußweise rückwärts kann man immer machen, sobald einmal der Rest Null auftritt, d. h. dann sind a und b ganze Vielfache einer kleineren Periode, die also die einzige wesentliche Periode ist.

Dies gilt, wie gesagt, wenn einmal der Rest Null vorkommt. Andernfalls hat sich gezeigt, daß der Funktion $f(x)$ Perioden h zukommen müssen, die nach Null streben. Da dann für jedes x und für jede dieser Perioden $f(x+h) = f(x)$ ist, besteht die Gleichung

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0\,,$$

und da h nach Null strebt, ist

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0\,.$$

Hier steht links nach S. 68, 69 der Differentialquotient von $f(x)$; der sonst Δx genannte Zuwachs von x ist mit h bezeichnet. Somit hat $f(x)$ den Differentialquotienten Null und ist also konstant.

Insgesamt hat sich daher ergeben:

Satz 20: Eine Funktion $f(x)$, die nicht bloß eine Konstante ist, kann höchstens eine wesentliche Periode haben.

Nur nebenbei erwähnen wir, daß man die wesentliche Periode auch die primitive Periode nennt.

Wenn man die Bildkurve einer periodischen Funktion, siehe Fig. 294,

parallel zur x-Achse verschiebt, bleibt sie augenscheinlich periodisch mit derselben Periode. Rechnerisch drückt sich diese Verschiebung dadurch aus, daß man x durch $x +$ konst. ersetzt. Ferner: Wenn man alle Ordinaten der Kurve mit derselben Größe multipliziert, d. h. wenn man eine affine Kurve (S. 88) herstellt, wobei die x-Achse die Affinitätsachse ist, geht offensichtlich auch wieder eine periodische Kurve mit derselben Periode hervor. Deshalb ist mit $f(x)$ auch $A f(x + C)$ eine periodische Funktion von der Periode a, wie auch die Konstanten A und C gewählt sein mögen. Dasselbe ergibt sich analytisch so: Wenn (1) für alle Werte von x gilt, ist offenbar

$$A f(x + a) = A f(x),$$

und da man statt x auch $x + C$ setzen darf, folgt:

$$A f(x + C + a) = A f(x + C).$$

Wird nun die Funktion $A f(x + C)$ von x mit $F(x)$ bezeichnet, so ist $F(x + a) = A f(x + a + C)$, so daß die Gleichung zeigt, daß $F(x + a) = F(x)$ ist, also $F(x)$ die Periode a hat.

Was ergibt sich nun aus der periodischen Kurve in Fig. 294, wenn man alle Abszissen mit derselben Konstante multipliziert? Nimmt man z. B. alle Abszissen n-mal so groß wie bisher an, so wird die Kurve in der Richtung der x-Achse mehr gestreckt, d. h. die Kurve bleibt periodisch, aber die Periode wird n-mal so groß, also gleich $n a$. Aber jetzt sind die alten Abszissen x nur noch die n-ten Teile der neuen, d. h. statt $y = f(x)$ ist jetzt

$$y = f\left(\frac{x}{n}\right)$$

die Funktion, deren Bild die mehr längs der Abszissenachse gestreckte Kurve darstellt. Wir schließen also: Hat $f(x)$ die Periode a, so hat diese neue Funktion die Periode $n a$, vorausgesetzt, daß n eine Konstante ist. Bezeichnen wir $1 : n$ mit B, so können wir also sagen: Hat $f(x)$ die Periode a, so hat $f(B x)$ die Periode $a : B$. Auch dies ist leicht analytisch dargetan: Wenn in (1) statt x der Wert $B x$ gesetzt wird, kommt:

$$f(Bx + a) = f(Bx),$$

und hierfür kann man schreiben:

$$f\left[B\left(x + \frac{a}{B}\right)\right] = f(Bx).$$

Rechts steht die Funktion $f(B x)$, links steht dieselbe, aber nicht für den Wert x, sondern für den Wert

$$x + \frac{a}{B}$$

der unabhängigen Veränderlichen. Also besagt die Gleichung, daß $f(Bx)$ in der Tat die Periode $a : B$ hat.

Vorhin sahen wir, daß eine Funktion ihre Periode a behält, wenn man x um irgendeine Konstante C vermehrt und die Funktion mit irgendeiner Konstante A multipliziert. Fassen wir dies mit dem letzten Ergebnisse zusammen, d. h. ersetzen wir auch noch x durch Bx, wo B eine Konstante sei, so folgt:

Satz 21: Hat eine Funktion $f(x)$ die Periode a, so hat die Funktion

$$Af(Bx + C),$$

in der A, B, C irgendwelche Konstanten bedeuten, die Periode $a : B$. Dabei wird $B \neq 0$ vorausgesetzt.

Die Voraussetzung $B \neq 0$ ist nötig, weil sonst die neue Funktion bloß eine Konstante wäre.

Einige Beispiele: Da $\sin x$ die Periode 2π hat, kommt der Funktion $\sin 2x$ die Periode π zu. Da $\operatorname{tg} x$ die Periode π hat, kommt der Funktion $\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\pi - x)$, die ja nach Satz 3, S. 385, gleich $-\operatorname{tg}(x - \frac{1}{2}\pi)$ ist, dieselbe Periode zu. In der Tat ist $\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\pi - x)$ nach Satz 4, S. 385, gleich $\operatorname{ctg} x$, und wir wissen, daß $\operatorname{ctg} x$ die Periode π hat. Ferner: $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$ hat die Periode 2π, weil $\operatorname{tg} x$ die Periode π hat.

In den Naturwissenschaften und in der Technik tritt insbesondere häufig die überall stetige periodische Funktion

$$y = A \sin(Bx + C) \tag{2}$$

auf, worin A, B, C Konstanten bedeuten. Zwar kommt auch die Funktion $A \cos(Bx + C)$ oft vor; sie läßt sich aber nach Satz 4, S. 385, in der Form $A \sin(\frac{1}{2}\pi - Bx - C)$ oder $A \sin(-Bx + \frac{1}{2}\pi - C)$ durch den Sinus ausdrücken.

Was nun die Funktion (2) betrifft, so können darin die Konstanten A, B, C positive oder negative Werte haben. Aber man erkennt leicht, daß wir doch nicht alle Möglichkeiten zu berücksichtigen brauchen. Wäre nämlich B negativ, so würden wir $y = -A \sin(-Bx - C)$ statt (2) schreiben, was ja nach Satz 3, S. 385, dasselbe ist, und hier wäre der konstante Faktor von x, nämlich $-B$, nun doch positiv. Also dürfen wir immer B positiv annehmen. Wäre ferner die Konstante A negativ, so würden wir $y = -A \sin(Bx + C + \pi)$ statt (2) schreiben, was ja nach (7), S. 381, dasselbe ist. Hier aber wäre der zuerst stehende konstante Faktor $-A$ nun doch positiv. Mithin

dürfen wir auch A immer positiv annehmen. Schließlich können wir auch in bezug auf die dritte Konstante C eine Einschränkung machen: Da der Sinus die Periode 2π hat, läßt sich nämlich (2) auch so darstellen:

$$y = A \sin(Bx + C + 2n\pi),$$

wobei n irgendeine positive oder negative ganze Zahl bedeutet. Also tritt jetzt $C + 2n\pi$ an die Stelle von C. Wenn man aber zu C hinreichend viele ganze Vielfache von 2π addiert oder subtrahiert, kann man immer erreichen, daß $C + 2n\pi$ zwischen 0 und -2π liegt. Somit dürfen wir annehmen, daß die letzte Konstante C in (2) negativ sei und ihr absoluter Betrag 2π nicht übersteige. Insgesamt dürfen wir also diese drei Voraussetzungen machen:

$$A > 0, \quad B > 0, \quad -2\pi \leqq C \leqq 0.$$

Von den Annahmen $A = 0$ und $B = 0$ ist aus offensichtlichem Grund abzusehen.

Weil $\sin x$ die Periode 2π hat, kommt der Funktion (2) nach Satz 21 die Periode $2\pi : B$ zu. Wegen $B > 0$ ist sie positiv. Wir bezeichnen sie von jetzt an mit T, setzen also $B = 2\pi : T$. Ferner ist $-C$ nach den gemachten Voraussetzungen zwischen 0 und 2π enthalten, folglich $-C : 2\pi$ eine zwischen 0 und 1 gelegene Konstante. Wir bezeichnen diese mit p, setzen also $C = -2\pi p$. Alsdann nimmt die Funktion (2) die folgende Form an:

$$y = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} x - 2\pi p\right),$$

d. h.

$$(3) \quad y = A \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{T} - p\right)\right], \quad \text{wo } A > 0,\ T > 0,\ 0 \leqq p \leqq 1 \text{ ist.}$$

Unsere Aufgabe soll es nun sein, den Verlauf dieser oft in den Naturwissenschaften und in der Technik vorkommenden Funktion genauer zu untersuchen.

Ihre Bildkurve geht aus der Sinuslinie (siehe Fig. 274, S. 388) so hervor: Alle Abszissen x werden im Maßstabe $2\pi : T$ verkleinert, so daß die neuen Abszissen zu den alten im Verhältnisse von T zu 2π stehen. Darauf werden alle Abszissen um pT vergrößert, d. h. man schiebt die Kurve längs der x-Achse um das Stück pT vorwärts. Schließlich multipliziert man alle Ordinaten mit A. Deshalb hat die Bildkurve von (3) im großen und ganzen ähnliche Merkmale wie die Sinuslinie, nämlich ihre Symmetrien und ihre Wellenform. Wir be-

zeichnen sie daher als eine **Sinuswelle**, obgleich man sie meistens ebenfalls eine Sinuslinie nennt. Zur Vermeidung von Verwechslungen wollen wir jedoch dies nicht tun. Die **Sinuslinie** soll also in diesem Buche immer nur diejenige besondere Sinuswelle sein, die sich als Bildkurve von $y = \sin x$, also aus (3) für $A = 1$, $T = 2\pi$, $p = 0$ ergibt, und zwar im Falle gleicher x- und y-Einheiten.

Die Funktion (3) hat den Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = 2\pi\frac{A}{T}\cos\left[2\pi\left(\frac{x}{T} - p\right)\right]. \tag{4}$$

Mit seiner Hilfe bestimmt man nach Satz 8, S. 106, die **Gipfel- und Talpunkte** der Sinuswelle. Als **Knotenpunkte** bezeichnet man die Schnittpunkte mit der Abszissenachse, und zwar heißen sie aufsteigende oder absteigende Knoten, je nachdem ihnen eine positive oder negative Steigung zukommt. Die folgende Tafel gibt eine Übersicht.

Sinuswelle.

$$y = A\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{T} - p\right)\right]$$

$(A > 0,\ T > 0,\ 0 \leqq p \leqq 1,\ n$ eine ganze Zahl)

	x	y	Steigung
Aufsteigende Knoten	$(n + p)\,T$	0	$2\pi\frac{A}{T}$
Gipfelpunkte . . .	$(n + \frac{1}{4} + p)\,T$	A	0
Absteigende Knoten	$(n + \frac{1}{2} + p)\,T$	0	$-2\pi\frac{A}{T}$
Talpunkte	$(n + \frac{3}{4} + p)\,T$	$-A$	0

Die Größe A, die Höhe der Wellenberge und Tiefe der Wellentäler, heißt die **Wellenhöhe** oder **Amplitude**. Die Periode T heißt die **Wellenlänge**; sie ist nämlich gleich der längs der Abszissenachse gemessenen Länge eines Wellenberges und Wellentales, d. h. die Entfernung von einem aufsteigenden Knotenpunkte zum nächsten. Nebenbei bemerkt sind die Knotenpunkte **Wendepunkte** (S. 143).

Diejenige Sinuswelle, bei der $p = 0$ ist:

$$y = A\sin\frac{2\pi x}{T} \tag{5}$$

hat im Anfangspunkte einen aufsteigenden Knotenpunkt, während der erste auf der positiven x-Achse liegende aufsteigende Knotenpunkt der Sinuswelle (3) die Abszisse $p\,T$ hat. Beide Sinuswellen sind kongruent; die Sinuswelle (3) geht aus der Sinuswelle (5) durch Verschiebung um die Strecke $p\,T$ längs der positiven x-Achse hervor. Man erinnere sich daran, daß p zwischen 0 und 1 liegt. Demnach gibt p den Bruchteil der Wellenlänge an, um den die Sinuswelle (3) gegenüber der Sinuswelle (5) vorangeht, d. h. nach der positiven Richtung der x-Achse hin verschoben ist. Diese zwischen 0 und 1 gelegene Zahl p heißt die Phase, was nach dem Griechischen Erscheinung bedeutet.

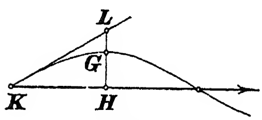


Fig. 295.

Die Gestalt der Sinuswelle hängt nur von dem Verhältnis der Wellenhöhe oder Amplitude A zur Wellenlänge T ab. Da $2\pi A : T$ die Steigung in einem aufsteigenden Knoten ist, ergibt sich die Tangente $K\,L$ eines derartigen Punktes K in Fig. 295, indem man die Wellenhöhe $G\,H$ des nächsten Gipfels G im Verhältnis $\frac{1}{2}\pi$ zu 1 vergrößert, denn die Strecke $K\,H$ ist gleich $\frac{1}{4}\,T$.

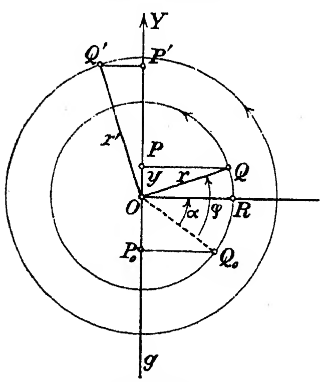


Fig. 296.

Zu der Funktion (3), deren Bild eine Sinuswelle ist, kommt man nun auch durch folgende Betrachtung: Ein Punkt Q möge einen Kreis um einen Punkt O mit gegebenem Radius r gleichförmig beschreiben, d. h. so, daß er in gleichen Zeiten gleiche Bogen zurücklegt. Die Zeit eines ganzen Umlaufes sei T. Der Sinn der Bewegung entspreche der positiven Drehung. Durch den Kreismittelpunkt werde eine Gerade g gezogen. Nun möge das Lot von Q auf g gefällt werden. Während Q beständig den Punkt O umkreist, macht der Fußpunkt P dieses Lotes auf- und abgehende Bewegungen auf g, indem er den auf g gelegenen Durchmesser hin und her durchläuft, siehe Fig. 296. Man sagt, daß Q einfache Schwingungen längs g um die Null-Lage O herum ausführe. Um sie rechnerisch auszudrücken, geben wir der Geraden g einen Pfeil; die Strecke $O\,P$ auf g soll dann positiv oder negativ gerechnet werden, je nachdem der Sinn von O nach P der des Pfeils ist oder nicht. Diese Strecke sei y genannt, also die Gerade g als eine y-Achse aufgefaßt. Die Anfangslage Q_0 von Q sei durch den positiven

Winkel α festgelegt, den OQ_0 beschreiben muß, um in die Strecke $OR \perp g$ überzugehen. Dabei sei OR diejenige der beiden möglichen Strecken, die bei positiver Drehung um einen rechten Winkel in die positive Hälfte der y-Achse verwandelt wird. Ferner sei φ der Winkel, den der Radius OQ_0 in der Zeit t bis zu einer beliebigen Lage OQ zurücklegt. Sowohl α als auch φ sei im Bogenmaß gemessen. Die Strecke $OP = y$ ist die Projektion von OQ auf die y-Achse, also gleich $r \cos(\frac{1}{2}\pi - \varphi + \alpha)$, denn offenbar ist $\sphericalangle\, QOP = \frac{1}{2}\pi - \varphi + \alpha$. Nach Satz 4, S. 385, kommt daher $y = r \sin(\varphi - \alpha)$. Wegen der Gleichförmigkeit der Drehung von Q um O ist ferner $\varphi : 2\pi = t : T$. d. h. $\varphi = 2\pi t : T$. Der Winkel α liegt zwischen 0 und 2π, also ist $\alpha : 2\pi$ eine zwischen 0 und 1 gelegene Konstante. Sie sei mit p bezeichnet. Nunmehr haben wir:

$$(6) \qquad y = r \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \alpha\right) = r \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - p\right)\right].$$

Dies aber ist wieder die Funktion (3), nur steht r statt A, und die unabhängige Veränderliche ist jetzt die Zeit t, nicht eine Strecke x. Dieser Zusammenhang kann so erläutert werden:

Photographiert man die Bewegung des in Fig. 296 schwingenden Punktes P wie bei einer Filmaufnahme in kurzen, gleich langen Zeitabschnitten Δt und wirft man die Bilder dann nicht wie bei der Vorführung eines Films nacheinander auf dieselbe Stelle, sondern setzt man sie nebeneinander in kurzen, gleichen Abständen $\Delta x = \Delta t$, so daß man alle Bilder gleichzeitig betrachten kann, so ist der Ort der Punkte P die vorhin betrachtete Sinuswelle mit der Amplitude $A = r$. Dies wird durch Fig. 297 erläutert, worin links zwölf regelmäßig auf dem Kreis um O angeordnete Punkte Q gewählt und die zugehörigen Punkte P gezeichnet sind, während rechts die zwölf Strecken OP nebeneinander in gleichen Abständen stehen.

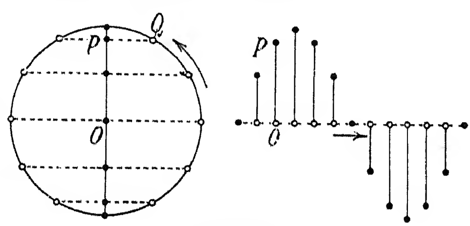


Fig. 297.

Bei den durch das Gesetz (6) ausgedrückten **einfachen Schwingungen** eines Punktes P um eine Null-Lage O auf einer Geraden g heißt r wieder die **Amplitude** oder auch die **Schwingungsweite**. Die Zeit T heißt die **Schwingungsdauer**. Obwohl die Schwingungen sich beständig wiederholen, also andauern, versteht man eben unter T nur die Zeit, die eine ganze Schwingung hin und her

erfordert, also die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden größten Ausschlägen nach derselben Seite hin oder das Doppelte der Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Null-Lagen. Wie früher wird p die **Phase** genannt. Sie gibt jetzt an, um welchen Bruchteil der Schwingungsdauer T die Bewegung vor denjenigen einfachen Schwingungen voraus ist, bei denen sich der Punkt gerade zur Zeit $t = 0$ in der Null-Lage befindet und von da nach der positiven Seite von g hinstrebt. Der Differentialquotient $dy : dt$ stellt jetzt nach S. 70 die **Geschwindigkeit** v der Bewegung dar. An Stelle der Tafel auf S. 423 gilt also jetzt diese:

Einfache Schwingungen.

$$y = r \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - p\right)\right], \quad v = \frac{2\pi r}{T} \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - p\right)\right]$$

$$(r > 0, \quad T > 0, \quad 0 \leqq p \leqq 1, \quad n \text{ eine ganze Zahl})$$

	t	y	v
Null-Lagen mit positivem Fortschritt ...	$(n + p)\,T$	0	$\dfrac{2\pi r}{T}$
Größte positive Ausschläge	$(n + \frac{1}{4} + p)\,T$	r	0
Null-Lagen mit negativem Fortschritt ..	$(n + \frac{1}{2} + p)\,T$	0	$-\dfrac{2\pi r}{T}$
Größte negative Ausschläge	$(n + \frac{3}{4} + p)\,T$	$-r$	0

In Fig. 296 ist auch die Geschwindigkeit v graphisch dargestellt. Die Geschwindigkeit

$$v = \frac{2\pi r}{T} \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - p\right)\right] \tag{7}$$

läßt sich nämlich auch mittels des Sinus so ausdrücken:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - p + \frac{1}{4}\right)\right], \tag{8}$$

und diese Funktion von t hat dieselbe Form wie die Funktion y von t in (6), nur ist r durch $2\pi r : T$ und p durch $p - \frac{1}{4}$ zu ersetzen. Wenn man also die Geschwindigkeit v des auf der y-Achse schwingenden Punktes P durch eine Strecke OP' auf dieser Achse darstellen will, gemessen mit derselben Längeneinheit, mit der r gemessen wird, kann man zu diesem Zweck einen ebenfalls gleichförmig um O auf einem Kreis herumgehenden Punkt Q' benutzen. Der Radius r' dieses Kreises muß gleich $2\pi r : T$ gewählt werden, und wieder ist T die Zeit eines Um-

laufes um O herum. Weil p durch $p - \frac{1}{4}$ ersetzt werden muß, ist aber der Radius $r' = OQ'$ derjenige, der aus dem Radius $r = OQ$ durch eine positive Drehung um einen rechten Winkel hervorgeht. Man kann sich $\sphericalangle\, QOQ'$ als starren rechten Winkel denken. Wenn er sich gleichförmig um O dreht, macht die Projektion P von Q auf g einfache Schwingungen, deren jeweilige Geschwindigkeit durch die Projektion OP' von OQ' dargestellt wird.

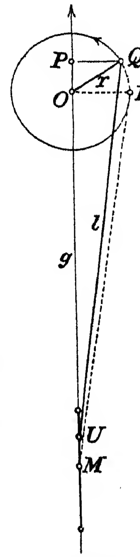


Fig. 298.

Schließlich sei noch bemerkt, daß $2\pi : T$ die Winkelgeschwindigkeit der Drehung von Q um O heißt, weil eine volle Umdrehung 2π in der Zeit T zurückgelegt wird.

1. Beispiel: Das Schubkurbelgetriebe besteht im wesentlichen aus einem sich um einen Punkt O drehenden Stab $OQ = r$, dem Kurbelradius, an den im Kurbelzapfen Q ein zweiter Stab $QU = l$, die Schubstange, mittels eines Gelenkes geknüpft ist; ferner ist die Schubstange in U durch ein Gelenk mit der Kolbenstange verbunden, die sich längs einer durch O gehenden Geraden g hin und her bewegen kann. Siehe Fig. 298. Dreht sich Q um O einmal herum, so beschreibt das Kolbenende U eine gewisse in der Figur angegebene Strecke auf g einmal hin und her. Ist die Bewegung von Q um O insbesondere gleichförmig, so führt der Fußpunkt P des Lotes von Q auf g einfache Schwingungen aus. Wenn nun die Schubstange l verglichen mit dem Kurbelradius r sehr lang ist, wird UP nahezu gleich der konstanten Länge l von UQ sein. Deshalb beschreibt dann das Kolbenende U nahezu einfache Schwingungen, und zwar um einen Punkt M herum, dessen Ermittelung aus der Figur ersichtlich ist.

Wir wollen jetzt annehmen, daß sich mehrere Punkte Q, z. B. in Fig. 299 drei Punkte Q_1, Q_2, Q_3, gleichförmig auf Kreisen um einen festen Punkt O herumbewegen und zwar so, daß alle zu einem Umlauf dieselbe Zeit T brauchen. Die Radien der Kreise seien r_1, r_2, r_3. Dann leuchtet ein, daß die sich um O drehenden Radien OQ_1, OQ_2, OQ_3 immer dieselbe gegenseitige Lage behalten, sich also so bewegen, als ob sie starr miteinander verbunden wären. Wir bilden nun so, wie man die Mittelkraft mehrerer an derselben Stelle angreifenden Kräfte bestimmt, ein Vieleck, indem wir an OQ_1 in Q_1 eine Strecke parallel und gleich OQ_2 setzen, an ihren Endpunkt eine Strecke parallel und gleich OQ_3. Da-

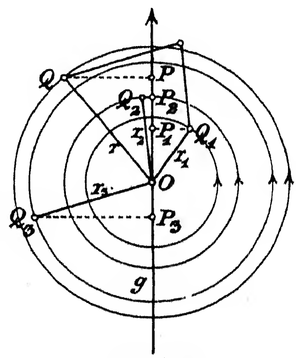


Fig. 299.

durch kommen wir zu einem Punkt Q. Schließlich verbinden wir Q geradlinig mit O. Dadurch ist ein geschlossenes Vieleck hergestellt worden, und es ist klar, daß es sich an Gestalt und Größe nicht ändert, wenn die Punkte Q_1, Q_2, Q_3 ihre gleichförmigen Drehungen um O machen. Das Vieleck nimmt also an dieser Drehung teil. Von Q_1, Q_2, Q_3 und Q fällen wir nun die Lote auf eine durch O gehende Gerade g. Die Fußpunkte seien P_1, P_2, P_3 und P. Diese Punkte vollführen einfache Schwingungen längs g mit derselben Schwingungsdauer T. Nach Satz 11, S. 408, ist die Summe der Projektionen der Seiten des geschlossenen Vielecks auf die Gerade g gleich Null, vorausgesetzt, daß das Vieleck in einheitlichem Sinn, etwa in dem von O nach Q_1, durchlaufen wird und daß die Projektionen mit Vorzeichen gemessen werden, nachdem man der Geraden g durch einen Pfeil einen positiven Fortschreitungssinn gegeben hat. Da nun die zweite und dritte Seite des Vielecks parallel und gleich OQ_2 und OQ_3 sind, leuchtet ein, daß die Projektionen der drei ersten Seiten gleich OP_1, OP_2 und OP_3 sind. Die Projektion der vierten Seite ist gleich PO, also gleich $-OP$, und nach dem erwähnten Satz kommt also:

$$OP = OP_1 + OP_2 + OP_3.$$

Das Entsprechende ergibt sich bei Annahme von mehr als drei Punkten Q_1, Q_2, Q_3. Deshalb gilt der

Satz 22: Machen mehrere Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ längs einer mit Pfeil versehenen Geraden g einfache Schwingungen von gleicher Schwingungsdauer um dieselbe Null-Lage O herum, so vollführt derjenige Punkt P der Geraden g, der sich bei gehöriger Beachtung der Vorzeichen aus

$$OP = OP_1 + OP_2 + \cdots + OP_n$$

ergibt, ebenfalls einfache Schwingungen von derselben Schwingungsdauer um dieselbe Null-Lage O herum.

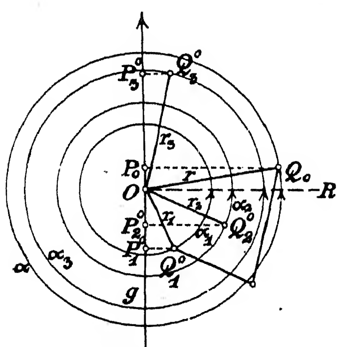


Fig. 300.

In Fig. 296 wurde die Anfangslage P_0 eines schwingenden Punktes P durch die Anfangslage Q_0 des zugehörigen Punktes Q mittels des Winkels $\alpha = \sphericalangle Q_0 O R$ bestimmt. Ebenso wollen wir auch jetzt verfahren: Die Anfangslagen der Punkte $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ seien $Q_1^0, Q_2^0, \ldots, Q_n^0$ und es sei $\sphericalangle Q_1^0 O R = \alpha_1$, $\sphericalangle Q_2^0 O R = \alpha_2, \ldots, \sphericalangle Q_n^0 O R = \alpha_n$, siehe Fig. 300.

Wie früher sollen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ im positiven Sinn gemessen werden, so daß ihre Werte zwischen 0 und 2π liegen. Die Radien der Kreise, auf denen sich die Punkte $Q_1, Q_2 \ldots Q_n$ bewegen, seien die positiven Größen $r_1, r_2 \ldots r_n$. Weiterhin sei $OP_1 = y_1, OP_2 = y_2 \ldots OP_n = y_n$. Wie in (6) sind nun y_1, y_2 usw. die Funktionen von t:

$$y_1 = r_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \alpha_1\right), \quad y_2 = r_2 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \alpha_2\right) \text{ usw.}$$

Nach Satz 22 muß auch die Summe $y_1 + y_2 + \cdots + y_n$ eine derartige Funktion von t sein. Mithin muß es eine positive Konstante r sowie einen zwischen 0 und 2π gelegenen konstanten Winkel α derart geben, daß

$$r \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \alpha\right) =$$
$$r_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \alpha_1\right) + r_2 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \alpha_2\right) + \ldots + r_n \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \alpha_n\right)$$

für alle Werte der unabhängigen Veränderlichen, der Zeit t ist. Dies also ist die rechnerische Bedeutung des Satzes 22. Wir wollen es wegen seiner Wichtigkeit ebenfalls als Satz aussprechen:

Satz 23: Sind $r_1, r_2 \ldots r_n$ und T gegebene positive Konstanten und sind $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ gegebene konstante Winkel zwischen 0 und 2π, so ist stets eine positive Konstante r und ein zwischen 0 und 2π gelegener konstanter Winkel α derart vorhanden, daß die Gleichung

$$r \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \alpha\right) =$$
$$r_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \alpha_1\right) + r_2 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \alpha_2\right) + \ldots + r_n \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \alpha_n\right)$$

für alle Werte der unabhängigen Veränderlichen t besteht.

Wie gesagt, ist dies die analytische Wiedergabe des oben bewiesenen Satzes 22, aber man kann diesen Satz 23 auch durch Anwendung der Formel des Satzes 16, S. 411, für den Sinus der Differenz zweier Winkel

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

auf alle in der Gleichung des Satzes vorkommende Sinus aufs neue beweisen. Denn hiernach läßt sich diese Gleichung ja offenbar so schreiben:

$$r \cos\alpha \,.\, \sin\frac{2\pi t}{T} - r \sin\alpha \,.\, \cos\frac{2\pi t}{T}$$
$$= (r_1 \cos\alpha_1 + r_2 \cos\alpha_2 + \cdots + r_n \cos\alpha_n) \sin\frac{2\pi t}{T}$$
$$- (r_1 \sin\alpha_1 + r_2 \sin\alpha_2 + \cdots + r_n \sin\alpha_n) \cos\frac{2\pi t}{T}.$$

Sie ist demnach richtig, wenn man r und α so bestimmen kann, daß einzeln:

$$(9) \qquad \begin{cases} r\cos\alpha = r_1\cos\alpha_1 + r_2\cos\alpha_2 + \cdots + r_n\cos\alpha_n\,, \\ r\sin\alpha = r_1\sin\alpha_1 + r_2\sin\alpha_2 + \cdots + r_n\sin\alpha_n \end{cases}$$

ist. Das ist nun aber wirklich stets der Fall. Denn bildet man die Summen der Quadrate beider Gleichungen (9), so ergibt sich wegen der bekannten Formel $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, siehe (4), S. 378:

$$(10) \qquad r = \sqrt{\begin{array}{l}(r_1\cos\alpha_1 + r_2\cos\alpha_2 + \cdots + r_n\cos\alpha_n)^2 \\ + (r_1\sin\alpha_1 + r_2\sin\alpha_2 + \cdots + r_n\sin\alpha_n)^2,\end{array}}$$

und diese Wurzel ist positiv zu nehmen. Nachdem so r bestimmt worden ist, ergibt (9):

$$(11) \qquad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{r_1\cos\alpha_1 + r_2\cos\alpha_2 + \cdots + r_n\cos\alpha_n}{r}, \\ \sin\alpha = \dfrac{r_1\sin\alpha_1 + r_2\sin\alpha_2 + \cdots + r_n\sin\alpha_n}{r}. \end{cases}$$

Da r den Wert (10) haben soll, ist die Summe der Quadrate der rechten Seiten gleich Eins. Nach Satz 5, S. 386, gibt es also einen zwischen 0 und 2π gelegenen Winkel α, der den Forderungen (11) genügt.

Der Satz 22 kann aber noch auf eine andere Art als in der Form des Satzes 23 ausgesprochen werden: Wir erinnern uns daran, daß die Sinuswellen längs der x-Achse mit der Wellenlänge T durch Funktionen von der Form (3) auf S. 422 dargestellt werden, d. h. wenn man die $2\pi p = \alpha$ setzt, durch Funktionen von der Form

$$y = A\sin\left(\frac{2\pi x}{T} - \alpha\right),$$

wo $A > 0$, $T > 0$ und $0 \leqq \alpha \leqq 2\pi$ ist. Diese Funktionen haben dieselbe Form wie die in Satz 23 auftretenden Funktionen. Nur ist die unabhängige Veränderliche hier x statt t genannt. Also folgt, indem wir an die Betrachtungen auf S. 86, 87 erinnern:

Satz 24: Liegen mehrere Sinuswellen längs der x-Achse mit derselben Wellenlänge vor, so ist die Summenkurve. die durch Aufeinanderlagerung dieser Sinuswellen entsteht, ebenfalls eine Sinuswelle längs der x-Achse mit derselben Wellenlänge.

Die neue Sinuswelle hat an der zu irgendeiner Abszisse x gehörigen Stelle als Ordinate die Summe der Ordinaten $y_1, y_2 \ldots, y_n$, die dort den einzelnen gegebenen Sinuswellen zukommen.

Wie verhält es sich nun mit der Aufeinanderlagerung von mehreren Sinuswellen längs der x-Achse, falls ihnen verschiedene Wellenlängen $T_1, T_2, \ldots$ zukommen? Wenn sich diese Wellenlängen nicht wie ganze Zahlen zueinander verhalten, geht eine Kurve hervor, die nicht periodisch ist. Wenn sich dagegen $T_1, T_2, \ldots$ wie ganze Zahlen $n_1, n_2, \ldots$ zueinander verhalten, gibt es eine kleinste ganze Zahl n, in der $n_1, n_2, \ldots$ als Faktoren stecken. Man findet sie bekanntlich wie den Hauptnenner für die Verwandlung der Summe von Brüchen

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots$$

in einen Bruch. Hat man n gefunden, so erhellt, daß es eine positive Größe T gibt, die ein ganzes Vielfaches sowohl von T_1 als auch von T_2 usw. ist. Handelt es sich z. B. um drei Sinuswellen mit den Wellenlängen T_1, T_2, T_3 und verhalten sich diese Wellenlängen zueinander wie $3:4:6$, so gehen 3, 4, 6 in 12 als kleinster ganzer Zahl auf, und wegen $12:3=4$, $12:4=3$, $12:6=2$ sind also $4\,T_1$, $3\,T_2$ und $2\,T_3$ gleich groß, so daß das Vierfache von T_1 die kleinste Wellenlänge T ist, in der auch T_2 und T_3 ohne Rest aufgehen. Nach S. 418 ist aber jedes ganze Vielfache der Periode einer periodischen Funktion ebenfalls eine Periode dieser Funktion (wenn auch nicht ihre wesentliche Periode). Somit folgt: Wenn die Abszisse x um T wächst, nehmen die Ordinaten $y_1, y_2, \ldots$ der einzelnen Sinuswellen wieder dieselben Werte an wie für das gewählte x. Also hat auch ihre Summe dann denselben Wert wie für x, d. h.: Die Summe der einzelnen Funktionen, deren Bilder die vorgelegten Sinuswellen sind, ist ebenfalls eine periodische Funktion von x, und zwar mit der Periode T.

Satz 25: Die Aufeinanderlagerung mehrerer Sinuswellen längs der x-Achse mit verschiedenen Wellenlängen $T_1, T_2, \ldots$ liefert, falls sich $T_1, T_2 \ldots$ zueinander wie ganze Zahlen verhalten, wieder eine periodische Kurve, deren auf der x-Achse zu messende Periode die kleinste positive Größe T ist, die sich als ganzes Vielfaches von T_1, T_2 usw. ergibt.

Diese neue periodische Kurve ist jedoch im allgemeinen keine Sinuswelle; sie hat vielmehr eine verwickeltere Gestalt. Ein Beispiel ist in Fig. 301 dargestellt: Die ausgezogenen Kurven sind zwei Sinuswellen mit den Wellenlängen $T_1 = 4$ und $T_2 = 3$. Die Kurve, die aus diesen Sinuswellen entsteht, wenn man die Ordinaten, die zur selben Abszisse gehören, addiert und als neue Ordinate benutzt, ist gestrichelt. Sie ist augenscheinlich keine Sinuswelle. Ihre Periode ist $T = 12$. Die Tangente t in einem Punkte P der neuen Kurve geht aus den Tangenten

t_1 und t_2 der zugehörigen Punkte P_1 und P_2 der gegebenen Sinuswellen als ihre Summengerade hervor, vgl. S. 87.

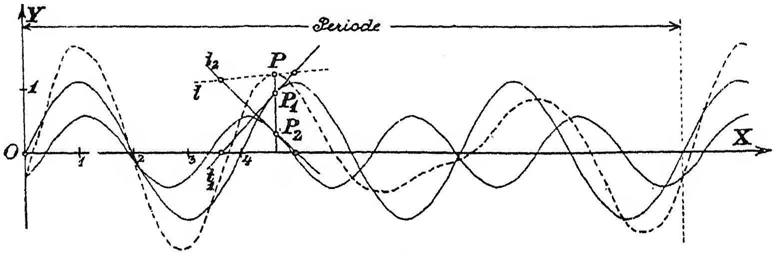


Fig. 301.

2. Beispiel: Eine rotierende Dynamomaschine gibt eine elektromotorische Kraft E, die eine periodische Funktion der Zeit t ist. Die Zeit T eines Umlaufes ist die Periode von E. Wir werden später erfahren, daß jede periodische Funktion mit der Periode T als Summe einer Reihe von Sinusfunktionen mit den Perioden T, $2\,T$, $3\,T\ldots$ und mit konstanten Koeffizienten dargestellt werden kann, allerdings im allgemeinen als Summe von unendlich vielen derartigen Funktionen. Daher ist es wichtig, die Wirkung einer elektromotorischen Kraft E zu untersuchen, die sich in der Form

$$E = A\sin(Bt + C) \tag{12}$$

darstellt. Die Zeit t sei in Sekunden von einem Augenblick an gemessen, in dem die elektromotorische Kraft gleich Null ist. Dann ist $C = 0$ anzunehmen. Ferner sei E_0 der größte Betrag, den E überhaupt erreicht, also die Amplitude $A = E_0$. Ist T die Periode, ausgedrückt in Sekunden, so haben wir dann

$$E = E_0 \sin\frac{2\pi t}{T}, \tag{13}$$

wo E_0 und T Konstanten sind. Eine derartige Kraft wird z. B. in einem geschlossenen Leiter, einem Anker, erzeugt, der sich in einem gleichförmigen magnetischen Feld mit konstanter Geschwindigkeit dreht und in der Zeit T eine Umdrehung macht. Der Winkel φ, den der Anker bei dieser einfachsten Dynamomaschine in der Zeit t zurücklegt, ist aus $\varphi : 2\pi = t : T$ zu bestimmen:

$$\varphi = \frac{2\pi}{T}t.$$

Die Winkelgeschwindigkeit ω ist der konstante Differentialquotient von φ:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{T}.$$

Der von der elektromotorischen Kraft erzeugte Strom durchlaufe nun einen Leiter vom Widerstande R und Reaktionskoeffizienten L. Die Stromstärke zur Zeit t ist dann eine zunächst noch unbekannte Funktion J von t. Nach der im 9. Beispiel, S. 333, angegebenen Energiegleichung (15) ist:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{E}{L} - \frac{R}{L}J,$$

d. h. nach (13)

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{E_0}{L} \sin \frac{2\pi t}{T} - \frac{R}{L} J. \tag{14}$$

Hier sind E_0, L, R, T Konstanten; die Aufgabe ist, aus (14) zu ermitteln, was für eine Funktion der Zeit t die Stromstärke J ist.

Um das Mathematische dieser Aufgabe deutlich hervortreten zu lassen, wollen wir die Zeit t als unabhängige Veränderliche mit x und die gesuchte Funktion J mit y bezeichnen, so daß (14) die Form bekommt:

$$\frac{dy}{dx} = a \sin(bx) - cy, \tag{15}$$

wo die Größen

$$a = \frac{E_0}{L}, \qquad b = \frac{2\pi}{T} = \omega, \qquad c = \frac{R}{L} \tag{16}$$

Konstanten sind. Nach (15) wissen wir von der Funktion y von x, wie sich ihr Differentialquotient durch x und y ausdrückt; die Funktion y selbst ist uns jedoch noch unbekannt. Eine einfache Aufgabe der Integralrechnung läge vor, wenn die Konstante $c = 0$ wäre. Eine andere früher erledigte Aufgabe läge vor, wenn die Konstante $a = 0$ wäre. Denn dann hätten wir statt (15) einfach $dy : dx = -cy$, woraus nach Satz 7, S. 320, folgen würde: $y = \text{konst.}\ e^{-cx}$. In diesem Fall wäre also das Produkt $y e^{cx}$ eine Konstante. Das wird aber unter der Bedingung (15), wenn a nicht gleich Null ist, nicht der Fall sein. Sehen wir aber einmal zu, welche Forderung eben dies Produkt

$$z = y e^{cx} \tag{17}$$

erfüllen muß, wenn y die gesuchte, durch (15) bedingte Funktion von x ist. Nach der Produktregel ist der Differentialquotient von z:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} e^{cx} + c y e^{cx}.$$

Nach (15) soll nun

$$\frac{dy}{dx} e^{cx} = a e^{cx} \sin(bx) - c y e^{cx}$$

sein. Setzen wir dies in den Differentialquotienten von z ein, so kommt:

$$\frac{dz}{dx} = a e^{cx} \sin(bx). \tag{18}$$

Also muß z eine Funktion von x sein, deren Differentialquotient als diese Funktion von x bekannt ist, so daß die Aufgabe, z zu ermitteln, eine Aufgabe der Integralrechnung wird. Um z zu finden, kommt es darauf an, irgendeine Funktion von x ausfindig zu machen, die denselben Differentialquotienten hat. Da e^x beim Differentiieren wieder in e^x übergeht, $\sin x$ dagegen in $\cos x$ und $\cos x$ in $-\sin x$, liegt es nahe, die Funktionen

$$e^{cx} \sin(bx) \qquad \text{und} \qquad e^{cx} \cos(bx)$$

zur Probe ins Auge zu fassen. Sie haben die Differentialquotienten:

$$\frac{d e^{cx} \sin(bx)}{dx} = c e^{cx} \sin(bx) + b e^{cx} \cos(bx),$$

$$\frac{d e^{cx} \cos(bx)}{dx} = c e^{cx} \cos(bx) - b e^{cx} \sin(bx).$$

Wenn wir die erste Formel mit c, die zweite mit b multiplizieren und dann subtrahieren, folgt, daß

$$c\,e^{cx}\sin(b\,x) - b\,e^{cx}\cos(b\,x)$$

den Differentialquotienten

$$(c^2+b^2)\,e^{cx}\sin(b\,x)$$

hat. Dies ist beinahe die Form der rechten Seite von (18). Man erkennt daraus schließlich, daß

$$\frac{a}{c^2+b^2}\left[c\,e^{cx}\sin(b\,x) - b\,e^{cx}\cos(b\,x)\right]$$

genau denselben Differentialquotienten hat, den z nach (18) haben soll. Nach Satz 2, S. 213, ist deshalb

$$z = \frac{a}{c^2+b^2}\left[c\sin(b\,x) - b\cos(b\,x)\right]e^{cx} + k,$$

wo k eine Konstante bedeutet. Nach (17) ergibt sich daher:

$$y = \frac{a}{c^2+b^2}\left[c\sin(b\,x) - b\cos(b\,x)\right] + k\,e^{-cx}.$$

Wenn wir nun wieder t und J statt x und y schreiben und für a, b, c ihre Werte (16) einführen, erhalten wir für die Stromstärke J den Wert:

$$J = \frac{E_0}{L\left(\frac{R^2}{L^2}+\omega^2\right)}\left[\frac{R}{L}\sin(\omega t) - \omega\cos(\omega t)\right] + k\,e^{-\frac{R}{L}t} \tag{19}$$

In der eckigen Klammer steht eine periodische Funktion von t, nämlich

$$\frac{R}{L}\sin\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi}{T}\cos\frac{2\pi t}{T},$$

wofür wir

$$\frac{R}{L}\sin\frac{2\pi t}{T} + \frac{2\pi}{T}\sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \tfrac{1}{2}\pi\right) \tag{20}$$

schreiben können. Hier steht nun eine Summe von zwei Funktionen von t von der allgemeinen Form

$$r\sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \alpha\right), \tag{21}$$

indem bei der ersten $r = R : L$, $\alpha = 0$ und bei der zweiten $r = 2\pi : T$, $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ ist. Nach Satz 23 läßt sich diese Summe (20) ebenfalls auf die Form (21) bringen, und zwar ergeben sich die zugehörigen Werte von r und α wie in (10) und (11). Nach (10) kommt:

$$r = \sqrt{\left(\frac{R}{L}\cos 0 + \frac{2\pi}{T}\cos\tfrac{1}{2}\pi\right)^2 + \left(\frac{R}{L}\sin 0 + \frac{2\pi}{T}\sin\tfrac{1}{2}\pi\right)^2},$$

d. h. wegen $\cos 0 = 1$, $\cos\frac{1}{2}\pi = 0$, $\sin 0 = 0$, $\sin\frac{1}{2}\pi = 1$ und mit Rücksicht auf $\omega = 2\pi : T$ in (16):

$$r = \frac{1}{L}\sqrt{R^2+\omega^2L^2}. \tag{22}$$

Nach (11) kommt alsdann:

$$\cos\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}}. \tag{23}$$

Die Quadratwurzel ist positiv zu nehmen, und α soll der zwischen 0 und 2π gelegene Winkel sein, der durch (23) bestimmt wird. Nach Satz 23 hat somit die Summe (20) den Wert (21) oder

$$\frac{1}{L}\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}\sin(\omega t-\alpha),$$

und da (20) der Inhalt der eckigen Klammer in (19) ist, kommt:

$$J = \frac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}}\sin(\omega t-\alpha) + k\,e^{-\frac{R}{L}t} \tag{24}$$

Hierin sind alle Konstanten mit Ausnahme von k gegeben. Diese bestimmt sich durch die Angabe des Zeitpunktes $t = t_0$, in dem der Stromkreis geschlossen wird. Dann ist nämlich die Stromstärke J im Leiter gleich Null, also nach (24)

$$\frac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}}\sin(\omega t_0-\alpha) + k\,e^{-\frac{R}{L}t_0} = 0,$$

woraus

$$k = -\frac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}}\sin(\omega t_0-\alpha)\,e^{\frac{R}{L}t_0}$$

folgt. Einsetzen dieses Wertes in (24) gibt die vollständige Lösung der Aufgabe:

$$J = \frac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}}\left[\sin(\omega t-\alpha) - \sin(\omega t_0-\alpha)\,e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}\right] \tag{25}$$

Wir wollen nun die zeichnerische Darstellung von J so einrichten, daß sie für verschiedene Werte von t_0 zu gebrauchen ist. Deshalb sondern wir vor allem den mit t_0 behafteten Ausdruck ab. Nach (25) ist:

$$J = y_1 + y_2 \sin(\omega t_0-\alpha)\,e^{\frac{R}{L}t_0}, \tag{26}$$

wenn

$$y_1 = \frac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}}\sin(\omega t-\alpha), \qquad y_2 = -\frac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}}\,e^{-\frac{R}{L}t} \tag{27}$$

gesetzt wird. Zunächst stellen wir die Bildkurven von y_1 und y_2 her, indem wir die Zeit t als Abszisse benutzen. Die Bildkurve c_1 von y_1 ist die in Fig. 302 ausgezogene Sinuswelle mit der Amplitude $A = E_0 : \sqrt{R^2+\omega^2 L^2}$, der Wellenlänge $T = 2\pi : \omega$ und der Phase $p = \alpha : 2\pi$. Die Knotenpunkttangenten werden nach Fig. 295, S. 424, gefunden. Wir haben hier $R = 60$, $L = 1{,}3$, $\omega = 2\pi : \omega = 1200$ gewählt, so daß $T = 0{,}005\,24$ Sekunden, $A = 0{,}000\,64\,E_0$ und nach (23) im Gradmaß α gleich $360^\circ - 87^\circ\,47'\,51''$, also im Bogenmaß gleich 4,751 ist, demnach $p = 0{,}756$. Der erste aufsteigende Knoten hat somit die Abszisse $t = 0{,}003\,95$. Die Bildkurve der Funktion

y_2 ist eine Exponentialkurve c_2, die nach den auf S. 334 bis 338 angegebenen Verfahren zu zeichnen ist, und wird durch die unterhalb der Abszissenachse verlaufende Kurve dargestellt, deren Ordinate für $t = 0$ den Wert $-A$ hat. Ihre nach S. 334

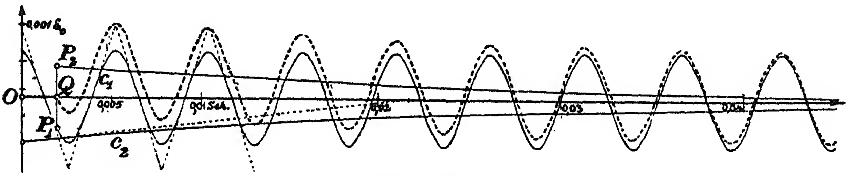


Fig. 302.

konstante Subtangente, die für den ersten Punkt in der Figur angedeutet ist, hat die Länge $-L : R = -0{,}0217$. Nach (26) ist nun die Funktion y_2 multipliziert mit der Konstanten

$$\sin(\omega t_0 - \alpha)\, e^{\frac{R}{L} t_0},$$

darzustellen. Nach S. 339 erreicht man dies durch Verschieben der Bildkurve c_2 von y_2 längs der Abszissenachse, bis ihre zu $t = t_0 = OQ$ gehörige Ordinate gerade den Wert hat, den der zweite Summand in (26) für $t = t_0$ annimmt. Dieser Wert ist gleich

$$(28) \qquad -\frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t_0 - \alpha),$$

also nach (27) die mit entgegengesetztem Vorzeichen genommene Ordinate der zuerst gezeichneten Kurve c_1 für $t = t_0$. Da dieser Wert (28) auch positiv sein kann, muß man die Exponentialkurve unter Umständen vor dem Verschieben erst um die Abszissenachse herumklappen (vgl. S. 340). Dieser Fall liegt in Fig. 302 vor, wo wir $t_0 = 0{,}002$ gewählt haben. Für diesen Wert nämlich hat die Sinuswelle die negativ Ordinate QP_1. Ihr entgegengesetzter Wert, also QP_2, ist die Ordinate (28).

Man zeichnet somit die Kurve c_2 und die Abszissenachse auf Pauspapier, dreht das Papier um, legt seine Abszissenachse dann auf die der Figur und verschiebt das Blatt so weit, bis die Kurve durch P_2 geht. Die Ordinaten der Kurve und die der Sinuswelle c_1 sind nun die in (26) auftretenden Summanden. Durch Addition zusammengehöriger Ordinaten beider Kurven geht die gestrichelte Kurve als Bildkurve der Funktion J von t hervor. Sie nähert sich schon nach wenigen Bruchteilen einer Sekunde stark der Sinuswelle. Für größere Werte von t darf man daher die Funktion J mit der Funktion y_1 gleichsetzen. Beide Funktionen J und y_1 stimmen übrigens genau überein, wenn P_1 ein Knotenpunkt der Sinuswelle ist.

Schließlich machen wir noch auf einen Umstand bei periodischen Vorgängen aufmerksam: Beständig oder lange Zeit hindurch arbeitende Maschinen wiederholen zwar immer denselben Vorgang in einer gewissen Periode oder Tour T, aber die Bahnen der einzelnen Punkte der Maschinen sind nicht periodische, sondern geschlossene Kurven, die eben immer wieder von neuem durchlaufen werden. Beschränken wir uns auf eine Vorrichtung, die mit der Periode T in der Ebene arbeitet,

und führen wir ein Koordinatensystem ein, so sind die Koordinaten x und y eines beweglichen Punktes der Maschine gewisse periodische Funktionen

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

der Zeit t mit der Periode T. Um den rechnerischen Ausdruck der Bahnkurve selbst zu erhalten, drückt man auf Grund der ersten Gleichung t durch x aus und setzt diesen Wert von t in die zweite Gleichung ein. Auf diese Art geht eine Funktion

$$y = F(x)$$

hervor, deren Bildkurve die Bahn ist.

3. Beispiel: Wir betrachten das Schubkurbelgetriebe und behalten die im 1. Beispiel angenommenen Bezeichnungen O, Q, U, r, l und g bei, siehe Fig. 303. Der Punkt Q drehe sich also um O, während U auf der Geraden g bleibe. Die Bahn irgendeines Punktes P der Schubstange QU heißt eine Kurbelkurve. Um ihre Natur zu ergründen, setzen wir die Strecke $QP = p$ und die Strecke $PU = q$, so daß $p + q = l$ ist; ferner wählen wir die Kurbelmitte O als Anfangspunkt eines Achsenkreuzes, dessen y-Achse g sei. Die Zeit t rechnen wir von einem Augenblick an, wo Q auf der positiven x-Achse in Q_0 liegt. Ist die Drehung von Q um O positiv und gleichförmig und wird ein Umlauf um O in der Zeit T vollendet, so beschreibt der Kurbelradius von OQ_0 an bis OQ in der Zeit t einen Winkel ω, der sich aus $\omega : 2\pi = t : T$ bestimmt, so daß

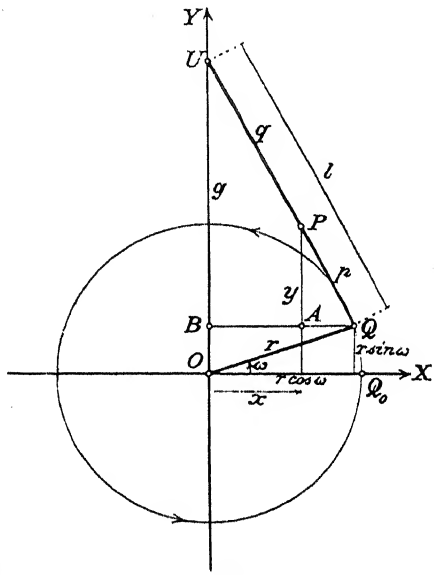


Fig. 303.

$$\omega = \frac{2\pi t}{T} \tag{29}$$

ist. Zur selben Zeit t hat OU eine Länge, die sich mittels des Kosinussatzes 14, S. 410, leicht aus dem Dreieck OQU berechnen läßt, da der Kosinus des Dreieckwinkels bei O gleich $\sin\omega$ ist. Für OU ergibt sich so die quadratische Gleichung:

$$l^2 = OU^2 + r^2 - 2\,OU \cdot r\sin\omega,$$

aus der nach (7), S. 115, mit Rücksicht auf (4), S. 378, folgt:

$$OU = r\sin\omega + \sqrt{l^2 - r^2\cos^2\omega}. \tag{30}$$

Nun habe der Punkt P zur Zeit t die Koordinaten x und y. Da die Abszisse x das $(q:l)$fache von BQ, d. h. von der Abszisse $r\cos\omega$ von Q ist, wird:

(31) $$x = \frac{q\,r}{l}\cos\omega\,.$$

Ferner ist die Differenz AP der Ordinate y von P und der Ordinate $r\sin\omega$ von Q das $(p:l)$fache der Strecke BU, d. h. der Differenz von OU und $OB = r\sin\omega$. Mit Rücksicht auf (30) kommt somit:

(32) $$y = r\sin\omega + \frac{p}{l}\sqrt{l^2 - r^2\cos^2\omega}\,.$$

Führen wir schließlich den Wert (29) von ω in (31) und (32) ein, so ergeben sich als die Gleichungen der Bewegung von P diese:

(33) $$x = \frac{q\,r}{l}\cos\frac{2\pi t}{T}, \qquad y = r\sin\frac{2\pi t}{T} + \frac{p}{l}\sqrt{l^2 - r^2\cos^2\frac{2\pi t}{T}}\,.$$

Wie es sein muß, sind x und y periodische Funktionen der Zeit t mit der Periode T. Aber die Kurbelkurve selbst ist nicht periodisch. Man bekommt ihre Gleichung, indem man aus der ersten Gleichung (33) berechnet:

$$\cos\frac{2\pi t}{T} = \frac{l\,x}{q\,r}, \qquad \text{d. h.} \qquad \sin^2\frac{2\pi t}{T} = 1 - \frac{l^2 x^2}{q^2 r^2}$$

und dies in die zweite einführt:

(34) $$y = r\sqrt{1 - \frac{l^2 x^2}{q^2 r^2}} + p\sqrt{1 - \frac{x^2}{q^2}}.$$

Da y demnach die Summe der beiden Funktionen

$$y_1 = r\sqrt{1 - \frac{l^2 x^2}{q^2 r^2}} = \frac{l}{q}\sqrt{\frac{q^2 r^2}{l^2} - x^2}$$

und

$$y_2 = p\sqrt{1 - \frac{x^2}{q^2}} = \frac{p}{q}\sqrt{q^2 - x^2}$$

ist, **kann man die Kurbelkurve durch Aufeinanderlagerung zweier Ellipsen bestimmen.** Denn nach (2) auf S. 188 sind die Bildkurven von y_1 und y_2 diejenigen beiden Ellipsen, deren Achsen auf den Koordinatenachsen liegen und deren Halbachsen die Längen $a_1 = qr:l$, $b_1 = r$ und $a_2 = q$, $b_2 = p$ haben. Dabei gelten a_1 und a_2 für die auf der x-Achse und b_1 und b_2 für die auf der y-Achse gelegenen Halbachsen der Ellipsen, und es ist möglich, daß die Hauptachse einer Ellipse nicht auf der x-Achse, sondern auf der y-Achse liegt (nämlich wenn $a_1 < b_1$ oder $a_2 < b_2$ ist).

Die Fig. 304 gibt die beiden Ellipsen mit dem Mittelpunkt O sowie die Kurbelkurve von P für den in Fig. 303 angenommenen Fall, wo sich r, l, p, q zueinander wie 4, 8, 3, 5 verhalten. Bei jeder Lage von P ist die Ordinate von P gleich der Summe der Ellipsenordinaten, die zu derselben Abszisse gehören. Bei unseren Annahmen ist $a_1 = qr:l$ kleiner als $a_2 = q$. Demnach kommt die zweite Ellipse nur so weit in Betracht, als sich ihre Punkte um nicht mehr als $qr:l$ von der y-Achse entfernen. Außerdem ist hier die Wurzel in (30) positiv, weil U immer höher als Q liegt. Daraus folgt, daß auch y_2 stets positiv ist. Deshalb kommt von der zweiten Ellipse nur der Bogen TS in Betracht. Man hat also zu jeder positiven und negativen Ordinate der ersten Ellipse immer die jeweils auf derselben Parallelen

zur y-Achse gelegene Ordinate des Bogenstückes TS zu addieren. Wäre TS nicht krumm, sondern eine zur x-Achse parallele Strecke, so würde sich als Kurbelkurve eine zur ersten Ellipse kongruente Ellipse ergeben. Da nun der Bogen TS wenig von einer Strecke abweicht, unterscheidet sich die Kurbelkurve wenig von einer Ellipse. Sie läuft immerhin oben spitzer zu als unten.

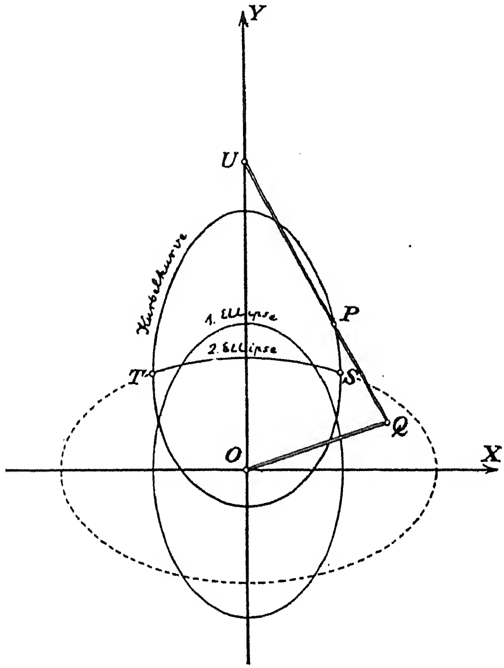


Fig. 304.

§ 4. **Die zyklometrischen Funktionen.**

Die Sinuskurve und die Kosinuskurve in Fig. 274, S. 388, und Fig. 276, S. 390, zeigen: Nimmt man einen bestimmten Ordinatenwert (also nicht Abszissenwert!) an, so gibt es unzählig viele Punkte auf der einen oder anderen Kurve, denen diese Ordinate zukommt. Dabei wird vorausgesetzt, daß man die Ordinate zwischen -1 und $+1$ wähle, denn die Ordinaten der Kurven überschreiten, absolut gemessen, niemals den Wert Eins. Ferner zeigen die Tangens- und Kotangenskurve in Fig. 281, S. 398, und Fig. 282, S. 399, daß auch hier zu irgendeiner bestimmt gewählten Ordinate, die aber jetzt nicht zwischen -1 und $+1$ angenommen zu werden braucht, unzählig viele Punkte der Kurven gehören. Das liegt daran, daß unendlich viele Winkel

denselben Sinus oder Kosinus usw. haben. Die Abszissen bedeuten ja hier diesen Winkel. Wenn man aber x auf das Intervall von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ beschränkt, also nur das Stück der Sinuslinie in Fig. 274 betrachtet, das aus dem im Anfangspunkt O zusammenkommenden Tal und Berg besteht, erhellt, daß zu einer beliebig zwischen -1 und $+1$ gewählten Ordinate y bloß eine Abszisse x gehört. Es gibt eben im Intervalle von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ nur einen einzigen Winkel, dessen Sinus einen vorgeschriebenen Wert hat. Entsprechendes ist bei der Kosinuslinie zu sagen: Im Intervalle von 0 bis π gibt es nur einen Winkel x, dessen Kosinus einen vorgeschriebenen Wert hat. Wenn wir also in Fig. 276 nur das Stück der Kosinuslinie betrachten, das von $x = 0$ bis $x = \pi$ geht, gibt es zu jeder zwischen -1 und $+1$ gewählten Ordinate nur einen Punkt der Kurve. Der Tangens und der Kotangens haben wie der Sinus die Eigenschaft, daß alle ihre Werte nur einmal vorkommen, wenn der Winkel die Werte von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ durchläuft. Wird demnach von der Tangenslinie in Fig. 281 oder von der Kotangenslinie in Fig. 282 nur das Stück von $x = -\frac{1}{2}\pi$ bis $x = +\frac{1}{2}\pi$ benutzt, so gibt es zu jeder irgendwie bestimmt gewählten Ordinate nur einen Punkt der Kurve.

Nach diesen Vorbemerkungen führen wir nun einige neue Bezeichnungen ein: Hat ein Winkel x den Sinus y, ist also $y = \sin x$, so kann man diese Formel rückwärts so lesen:

$$x = \text{Winkel, dessen Sinus gleich } y \text{ ist.}$$

Weil die Winkel als Bogen auf dem Kreis vom Radius Eins gemessen werden (S. 10), kann dies so gesagt werden:

$$x = \text{Bogen des Einheitskreises, dessen Sinus gleich } y \text{ ist.}$$

Diesen Bogen des Einheitskreises bezeichnet man nach dem Lateinischen auch als einen Arkus. Also:

$$x = \text{Arkus, dessen Sinus gleich } y \text{ ist.}$$

Schließlich faßt man diese Aussage kurz zusammen in der Bezeichnung:

$$x = \operatorname{arc} \sin y\,,$$

gelesen: „x gleich Arkus Sinus y.“ Diese Bezeichnung hat sich eingebürgert, aber man empfindet doch, daß sie nicht ganz zweckmäßig ist. Sie macht dem Anfänger Schwierigkeiten wegen eines Umstandes, der leicht übersehen wird und auf den wir deshalb auf das nachdrücklichste hinweisen möchten: Wenn wie hier vor y unmittelbar sin steht, ist man gewöhnt, „Sinus

von y" zu lesen. Das ist aber durchaus nicht gemeint, sobald vor sin noch arc steht. Vielmehr bedeutet dann die Zeichenfolge „sin y" den auf das knappste zusammengefaßten Nebensatz: „dessen Sinus gleich y ist". Deutlicher wäre es zu schreiben:

$$x = \operatorname{arc}(\sin = y),$$

aber das wäre wieder zu umständlich. Ganz entsprechend wie $\operatorname{arc}\sin y$ sind $\operatorname{arc}\cos y$ usw. zu lesen. Man merke sich also:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{arc}\sin y\\ \operatorname{arc}\cos y\\ \operatorname{arc}\operatorname{tg} y\\ \operatorname{arc}\operatorname{ctg} y\end{array}\right| \begin{array}{c}\text{bedeutet einen Arkus, d. h.}\\ \text{das Bogenmaß eines Winkels,}\\ \text{dessen}\end{array} \left\{\begin{array}{c}\text{Sinus}\\ \text{Kosinus}\\ \text{Tangens}\\ \text{Kotangens}\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{gleich } y\\ \text{ist.}\end{array}$$

Nach dem, was wir vorausgeschickt haben, muß nun das Folgende ohne weiteres einleuchten: Zu einem beliebig angenommenen Wert y gibt es nur einen Wert von $\operatorname{arc}\sin y$ oder $\operatorname{arc}\operatorname{tg} y$ oder $\operatorname{arc}\operatorname{ctg} y$, sobald der Arkus oder Winkel auf das Intervall von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ beschränkt wird, und nur einen Wert von $\operatorname{arc}\cos y$, sobald der Arkus oder Winkel auf das Intervall von 0 bis π beschränkt wird. Außerdem ist hinzuzufügen: Im Fall des $\operatorname{arc}\sin y$ und $\operatorname{arc}\cos y$ darf y selbst nur zwischen -1 und $+1$ angenommen werden, weil der absolute Betrag eines Sinus oder Kosinus nie größer als Eins ist.

Anders gesagt: Unter den angegebenen Einschränkungen sind $\operatorname{arc}\sin y$, $\operatorname{arc}\cos y$, $\operatorname{arc}\operatorname{tg} y$ und $\operatorname{arc}\operatorname{ctg} y$ einwertige Funktionen von y. Sie sind nach S. 151 die zu $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ und $y = \operatorname{ctg} x$ inversen Funktionen, die sich ergeben, wenn man x und y ihre Rollen als unabhängige und abhängige Veränderliche vertauschen läßt.

Aber wir sind gewöhnt, die unabhängige Veränderliche x und nicht y zu nennen. Deshalb wollen wir jetzt die Funktionen

$$(1)\qquad y = \operatorname{arc}\sin x, \qquad y = \operatorname{arc}\cos x, \qquad y = \operatorname{arc}\operatorname{tg} x, \qquad y = \operatorname{arc}\operatorname{ctg} x$$

betrachten. Jetzt also soll y den Winkel (im Bogenmaß), dagegen x den beliebig wählbaren Sinus, Kosinus, Tangens oder Kotangens bedeuten (den Sinus oder Kosinus selbstverständlich immer nur zwischen -1 und $+1$). Die Bildkurven der vier Funktionen (1) gehen aus der Sinuslinie, Kosinuslinie, Tangenslinie und Kotangenslinie in Fig. 274, 276, 281 und 282, S. 388—399, hervor, wenn wir die Abszissen mit den Ordinaten und außerdem ihre Bezeichnungen vertauschen, d. h. x jetzt y und y jetzt x nennen. Da in jenen Figuren die x-Einheit gleich der y-Einheit gewählt worden war, er-

zielen wir dies einfach dadurch, daß wir die Figuren um die vom Anfangspunkt unter 45° zwischen der positiven x- und y-Achse ansteigende Gerade herumklappen. Dabei vertauschen wir auch die Bezeichnungen X und Y an den Achsen. So entstehen in Fig. 305 die Bildkurven

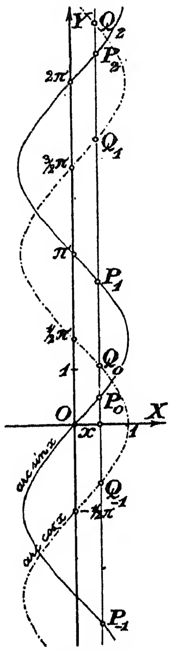


Fig. 305.

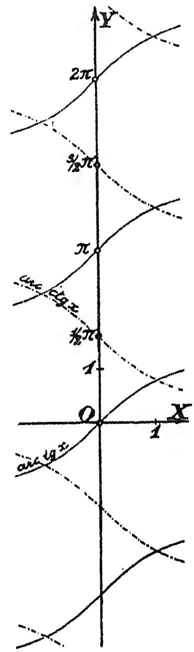


Fig. 306.

der beiden ersten Funktionen (1) und in Fig. 306 die der beiden letzten Funktionen (1). In Fig. 306 sind nur die mehr geschwungenen Teile der Kurven dargestellt. Die Fortsetzungen nach links und rechts hin sind eintöniger, weil die Kurvenzweige für $\lim x = +\infty$ und $\lim x = -\infty$ danach streben, zur x-Achse parallel zu werden (vgl. die Asymptoten der Tangens- und der Kotangenslinie in Fig. 281 und 282). Weil jetzt die Ordinaten die Winkel, im Bogenmaß gemessen, als Strecken darstellen, sind auf der Ordinatenachse die den Vielfachen von $\frac{1}{2}\pi$ (90°) entsprechenden Marken angegeben.

Wird die Arkussinuslinie, die Arkustangenslinie und die Arkuskotangenslinie auf das Gebiet beschränkt, in dem die Ordinaten von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ gehen und wird die Arkuskosinuslinie auf das Gebiet beschränkt, in dem die Ordinaten von 0 bis π gehen, so gehört zu einer

Abszisse x immer nur ein Punkt der Kurve. Von der Arkussinuslinie z. B. kommt dann wohl der Punkt P_0 in Betracht, nicht aber P_1 oder P_2 oder P_{-1}, ebenso von der Arkuskosinuslinie wohl der Punkt Q_0, nicht aber Q_1 oder Q_2 oder Q_{-1}. So zeigen auch die Bilder, daß die vier Funktionen (1) unter diesen Einschränkungen einwertig sind. Wir können auf sie den Satz 15, S. 153, zur Bestimmung ihrer Differentialquotienten anwenden. Nach diesem Satze geben die im folgenden links stehenden bekannten Formeln die rechts stehenden neuen:

Ist $y = \sin x$, so ist $\frac{dy}{dx} = \cos x$.	Ist $x = \operatorname{arc}\sin y$, so ist $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos x}$.
Ist $y = \cos x$, so ist $\frac{dy}{dx} = -\sin x$.	Ist $x = \operatorname{arc}\cos y$, so ist $\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\sin x}$.
Ist $y = \operatorname{tg} x$, so ist $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$.	Ist $x = \operatorname{arc}\operatorname{tg} y$, so ist $\frac{dx}{dy} = \cos^2 x$.
Ist $y = \operatorname{ctg} x$, so ist $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sin^2 x}$.	Ist $x = \operatorname{arc}\operatorname{ctg} y$, so ist $\frac{dx}{dy} = -\sin^2 x$.

Nun aber vertauschen wir in den rechts stehenden Formeln die Bezeichnungen: was x hieß, soll y heißen, was y hieß, soll x heißen. Dann haben wir:

$$(2)\quad \left|\begin{array}{l} \text{Ist } y = \operatorname{arc}\sin x, \text{ so ist } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}. \\ \text{Ist } y = \operatorname{arc}\cos x, \text{ so ist } \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y}. \\ \text{Ist } y = \operatorname{arc}\operatorname{tg} x, \text{ so ist } \frac{dy}{dx} = \cos^2 y. \\ \text{Ist } y = \operatorname{arc}\operatorname{ctg} x, \text{ so ist } \frac{dy}{dx} = -\sin^2 y. \end{array}\right.$$

In (2) haben wir also die Differentialquotienten der vier Funktionen (1) vor uns. Aber wir sind doch noch nicht fertig, denn diese Differentialquotienten sind ja erst als Funktionen von y dargestellt, und wir müssen noch berechnen, wie sie sich als Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x darstellen:

Wenn $y = \operatorname{arc}\sin x$ ist, bedeutet dies $x = \sin y$. Nach (5), S. 378, ist nun $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$. Also wird $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$. Die Formel

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

im ersten Fall (2) gibt deshalb:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

als Differentialquotienten von $y = \operatorname{arc}\sin x$.

sind die Differentialquotienten von $\operatorname{arc} \cos x$ und $\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$ diesen entgegengesetzt gleich.

In der Tafel V des Anhanges ist der Inhalt aller elf Differentiationsregeln übersichtlich und in anderer Anordnung zusammengestellt, nicht deshalb, damit unsere Leser beim Durcharbeiten dieses Buches beständig darin nachschlagen können, sondern damit sie sich später, nachdem sie mit diesem Buche fertig sind, schnell daran erinnern. Denn wir hoffen, daß unsere Leser jetzt noch alle diese Regeln gut im Kopfe haben!

Das Differentiieren von Funktionen gestaltet sich durch Benutzung dieser Regeln in der Tat geradezu handwerksmäßig, wie auf S. 69 bemerkt wurde. Aber erst die Übung macht den Meister. Man möge sich selbst mittels der bisher eingeführten verschiedenen Funktionszeichen irgendwelche verwickelte Funktionen herstellen und sie dann differentiieren. Wir geben hier nur einige Beispiele einfacher Art, die aber trotz ihrer Einfachheit zum Nachdenken und Einüben des bisher Vorgetragenen anregen werden.

1. Beispiel: Was bedeutet es für die Bildkurve, daß $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ einen beständig positiven und $\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$ einen beständig negativen Differentialquotienten hat?

2. Beispiel: Wenn man die Werte der Arkusfunktion nicht wie in Satz 26 auf bestimmte Gebiete beschränkt, beweise man, daß entweder $\operatorname{arc} \sin x + \operatorname{arc} \cos x$ oder aber $\operatorname{arc} \sin x - \operatorname{arc} \cos x$ konstant ist, sobald x zwischen -1 und $+1$ gewählt wird.

3. Beispiel: Man berechne den Differentialquotienten von $\operatorname{arc} \operatorname{tg} (1 : x)$. Aus welchem Grunde ergibt sich derselbe wie bei der Differentiation von $\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$?

4. Beispiel: Unter der Voraussetzung, daß $\sqrt{1 + x^2}$ positiv gewählt werde, ist

$$y = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

für alle Werte von x eine stetige Funktion. Man berechne ihren Differentialquotienten; der hervorgehende Wert wird Anlaß geben, die Funktion anders darzustellen.

5. Beispiel: Zu berechnen:

$$\frac{d \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^x}{dx} = \frac{1}{e^x + e^{-x}}.$$

6. Beispiel: Liegt

$$y = \operatorname{arc} \sin \cos x$$

vor, so heißt dies: y soll ein Winkel (im Bogenmaß) sein, dessen Sinus gleich dem Kosinus von x ist, d. h. $\sin y = \cos x$. Nach Satz 4, S. 385, kann man dafür schreiben:

$$\sin y = \sin (\tfrac{1}{2} \pi - x).$$

Aber alle Winkel y, die denselben Sinus wie $\frac{1}{2} \pi - x$ haben, sind diese:

$$y = \tfrac{1}{2} \pi \pm x + 2 n \pi,$$

wenn n eine beliebige positive und negative ganze Zahl bedeutet. Deshalb besteht das Bild der vorgelegten Funktion aus zwei Scharen von unendlich vielen parallelen Geraden mit den Steigungen $+1$ und -1.

7. Beispiel: Zu beweisen:

$$\sin \operatorname{arc} \cos x = \sqrt{1 - x^2}.$$

Gegen unseren sonst geübten Brauch bringen wir hier keine Beispiele aus den Anwendungen. Mit den zyklometrischen Funktionen wird nämlich im ganzen viel weniger gerechnet als mit den goniometrischen. Denn in den meisten Fällen wird man sich bei den Anwendungen damit begnügen, statt eines Arkus oder Winkels eine seiner goniometrischen Funktionen zu berechnen, weil man ihn dann leicht zeichnen oder mittels der logarithmisch-trigonometrischen Tafeln aufsuchen kann. Immerhin aber werden wir den Arkusfunktionen auch im folgenden gelegentlich begegnen. Der Leser soll also nicht glauben, er dürfe sie ganz beiseite lassen! —

Vergleicht man das Studium der Mathematik, soweit wir es treiben wollen, mit dem Überschreiten eines Gebirges, so kann man sagen, daß wir den Kamm des Gebirges erklettert haben, so daß wir von jetzt an mit schnelleren Schritten bergab eilen werden. Freilich liegen hinter dem höchsten Kamme noch ab und zu geringere Höhenzüge, die noch zu überwinden sind.

Neuntes Kapitel.
Höhere Differentialquotienten.

§ 1. Die Differentialquotienten und Differentialkurven.

Der Differentialquotient einer Funktion $f(x)$ wurde als die Steigung der Tangente in einem beliebigen Punkte $(x; y)$ der Bildkurve der Funktion $y = f(x)$ gedeutet, vgl. S. 69. Diese Steigung werden wir künftig die Steigung der Kurve nennen. Wenn die Abszissen und Ordinaten mit derselben Längeneinheit dargestellt werden, steht der Winkel, den die Kurventangente mit der x-Achse bildet, in einfacher Beziehung zur Steigung. Wir versehen die Tangente mit positivem Fortschreitungssinne, nämlich mit dem

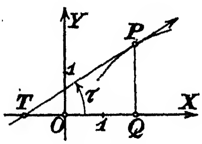


Fig. 307.

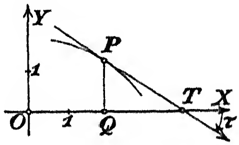


Fig. 308.

Pfeil im Sinn wachsender Abszissen (vgl. S. 32 und S. 104), siehe Fig. 307 und Fig. 308. Unter dem Tangentenwinkel τ soll der spitze Winkel verstanden werden, den die positive x-Achse um ihren Schnittpunkt T mit der Tangente beschreiben muß, um in die positive Tangente überzugehen. Somit ist τ positiv (Fig. 307) oder negativ (Fig. 308), je nachdem die Kurve steigt oder fällt, d. h. je nachdem der Differentialquotient $dy : dx$ positiv oder negativ ist. Die Steigung ist das Verhältnis aus der Ordinate QP des Berührungspunktes zur Subtangente TQ (vgl. S. 334). Hiernach ist:

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx}.$$

Nach (5), S. 378, lassen sich auch $\sin\tau$ und $\cos\tau$ berechnen. Beide sind positiv, wenn τ positiv ist, andernfalls ist $\sin\tau$ negativ und $\cos\tau$ positiv. Daher gilt der

Satz 1: Wird eine Funktion $y = f(x)$ im rechtwinkligen Achsenkreuze mit **gleichen x- und y-Einheiten** dargestellt, so ist, wenn τ den Tangentenwinkel des zur Abszisse x gehörigen Punktes der Bildkurve bedeutet:

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{dy}{dx}, \quad \sin\tau = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}, \quad \cos\tau = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

Dabei ist die Quadratwurzel positiv anzunehmen.

Späterer Anwendungen halber fügen wir hinzu: Eine zur Tangente senkrechte Gerade hat unter derselben Voraussetzung die Steigung $-1:\operatorname{tg}\tau$, d. h. $-\operatorname{ctg}\tau$, nach Satz 4, S. 177.

Bei den meisten Anwendungen ist man aber, um brauchbare Figuren zu erhalten, genötigt, die Einheiten auf beiden Achsen verschieden zu wählen, und dann gilt der Satz 1 nicht mehr. Man vgl. z. B. Fig. 227 (S. 336), wo es gar nicht anders geht. Ist die y-Einheit k-mal so lang wie die x-Einheit, so ist:

$$\operatorname{tg}\tau = k\frac{dy}{dx},$$

Dementsprechend drücken sich dann auch $\sin\tau$ und $\cos\tau$ etwas umständlicher aus; der Leser möge es selbst feststellen.

Wir wollen von jetzt an ein besonderes Augenmerk auf den Umstand richten, daß der Differentialquotient einer Funktion $y = f(x)$ ebenfalls eine Funktion von x ist. Um dies deutlich hervortreten zu lassen, pflegt man den Differentialquotienten statt durch $dy:dx$ auch durch das Zeichen $f'(x)$ auszudrücken, das man so liest: „f gestrichen x“.

Man wendet überhaupt den Akzentstrich an, um anzudeuten, daß nicht die Funktion selbst, sondern diejenige Funktion gemeint ist, die aus ihr durch Differentiation hervorgeht. Ist z. B. $f(x) = x^n$, so ist $f'(x) = n x^{n-1}$. Ist $u = \ln x$, so ist $u' = 1 : x$. Ist $y = e^x$, so ist $y' = e^x$ usw. Die Regeln für die Differentiation von Summen, Produkten und Quotienten lassen sich so schreiben:

$$(u+v)' = u' + v', \quad (uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Man darf den Akzent aber nur dann anwenden, wenn unzweifel-

haft feststeht, welche Größe die unabhängige Veränderliche ist, oder, wie man sich auch ausdrückt, nach welcher Veränderlichen differentiiert wird. Bei der Kettenregel, S. 127, wo nacheinander verschiedene Größen die Rolle der unabhängigen Veränderlichen spielen, ist diese kurze Bezeichnung nicht zu brauchen.

Durch Differentiation geht, wie gesagt, aus einer Funktion $f(x)$ eine neue Funktion $f'(x)$ hervor. Man nennt sie die abgeleitete oder derivierte Funktion oder die Ableitung oder Derivierte der Funktion $f(x)$. Dementsprechend sagt man also auch Ableitung statt Differentialquotient einer Funktion. Ist die abgeleitete Funktion $f'(x)$ stetig, so kann auch sie einen Differentialquotienten haben. Ist dies der Fall, so heißt dieser Differentialquotient der zweite Differentialquotient oder die zweite Ableitung der ursprünglichen Funktion $f(x)$. Sie ist wieder eine Funktion von x. Ist sie ebenfalls differentiierbar, so heißt ihr Differentialquotient der dritte Differentialquotient oder die dritte Ableitung der ursprünglichen Funktion $f(x)$, usw. Allgemein:

Unter dem n^{ten} Differentialquotienten oder der n^{ten} Ableitung oder n^{ten} Derivierten einer Funktion $f(x)$ wird diejenige Funktion verstanden, die sich durch die Differentiation des $(n-1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten ergibt.

Was bisher immer schlechtweg als der Differentialquotient bezeichnet wurde, ist also der erste Differentialquotient oder die erste Ableitung oder Derivierte. Wenn wir später vom Differentialquotienten schlechtweg sprechen, ist immer der erste gemeint. Wenn wir dagegen in der Mehrzahl von den Differentialquotienten einer Funktion sprechen, werden darunter außer dem ersten auch noch die höheren Differentialquotienten verstanden.

Man bezeichnet den n^{ten} Differentialquotienten oder Differentialquotienten n^{ter} Ordnung von $y = f(x)$ mit $f^{(n)}(x)$, gelesen: „f n-gestrichen x“, oder mit $y^{(n)}$, gelesen „y n-gestrichen“. Man schreibt ihn auch so:

$$\frac{d^n y}{d x^n},$$

gelesen: „d n y durch $d x$ zur n^{ten}“ oder „n^{te} Ableitung von y nach x“. Dagegen darf man den n^{ten} Differentialquotienten nicht mit y^n statt $y^{(n)}$ bezeichnen, denn das wäre die n^{te} Potenz von y, ebensowenig mit $f^n(x)$. Der Index n ist vielmehr in Klammern zu setzen. Ebensowenig wäre die Bezeichnung $d y^n : d x^n$ am Platze, denn dies bedeutet entweder $(d y : d x)^n$ oder $d(y^n) : d(x^n)$. Auch die Schreibweise

$d^n y : d^n x$ ist nicht gebräuchlich, weil man dies in der Form $(d y)^n : (d x)^n$ oder $(d y : d x)^n$ lesen könnte; erinnert sei an die Schreibweise $\sin^n x$ für $(\sin x)^n$.

Für die niedrigeren Differentialquotienten haben sich besondere Bezeichnungen eingebürgert. Den zweiten bezeichnet man mit y'' oder $f''(x)$, wo der Doppelakzent „zwei gestrichen" gelesen wird, den dritten mit y''' oder $f'''(x)$, den vierten jedoch lieber mit y^{IV} oder $f^{\text{IV}}(x)$, wo die römische Vier als „vier gestrichen" gelesen wird, ebenso den fünften usw. mit y^{V} oder $f^{\text{V}}(x)$ usw. Man kann aber auch $y^{(5)}$ oder $f^{(5)}(x)$ usw. schreiben.

1. Beispiel: Ist $y = x^n$, so ist $y' = n x^{n-1}$, $y'' = n(n-1)\,x^{n-2}$, $y''' = n(n-1)(n-2)\,x^{n-3}$, $y^{\text{IV}} = n(n-1)(n-2)(n-3)\,x^{n-4}$ usw.

2. Beispiel: Ist $f(x) = 1 : (1-x)$, so ist $f'(x) = 1 : (1-x)^2$, $f''(x) = 1 . 2 : (1-x)^3$, $f'''(x) = 1 . 2 . 3 : (1-x)^4$ usw.

3. Beispiel: Ist $y = \sin x$, so ist

$$\frac{dy}{dx} = \cos x, \qquad \frac{d^2 y}{d x^2} = -\sin x, \qquad \frac{d^3 y}{d x^3} = -\cos x, \qquad \frac{d^4 y}{d x^4} = \sin x,$$

also wiederholt sich, wenn man weiter differentiiert, dieselbe Reihenfolge $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$, $\sin x$:

$$\frac{d^5 y}{d x^5} = \cos x, \qquad \frac{d^6 y}{d x^6} = -\sin x \qquad \text{usw.}$$

Der n^{te} Differentialquotient ist von der Form $\pm \sin x$ oder $\pm \cos x$, und zwar ergibt sich der Sinus, wenn der Index n gerade, der Kosinus, wenn er ungerade ist. Also schreiben wir lieber, indem wir den Index in der Form $2n$ oder $2n+1$ annehmen:

$$\frac{d^{2n} y}{d x^{2n}} = \pm \sin x, \qquad \frac{d^{2n+1} y}{d x^{2n+1}} = \pm \cos x.$$

Dabei ist im ersten Fall das Pluszeichen zu nehmen, wenn es sich um den 4. oder 8. usw. Differentialquotienten handelt, d. h. wenn $n = 2$ oder 4 usw. ist. Da dann $(-1)^n = +1$, sonst aber $= -1$ ist, haben wir stets:

$$\frac{d^{2n} y}{d x^{2n}} = (-1)^n \sin x.$$

Beim $(2n+1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten ist das Pluszeichen zu nehmen, wenn es sich um den 1. oder 5. usw. handelt, d. h. wenn $n = 0, 2 \ldots$ ist, so daß kommt:

$$\frac{d^{2n+1}}{d x^{2n+1}} = (-1)^n \cos x.$$

Also ist:

$$\frac{d^{2n} \sin x}{d x^{2n}} = (-1)^n \sin x, \qquad \frac{d^{2n+1} \sin x}{d x^{2n+1}} = (-1)^n \cos x.$$

4. Beispiel: Man beweise entsprechend:

$$\frac{d^{2n} \cos x}{d x^{2n}} = (-1)^n \cos x, \qquad \frac{d^{2n+1} \cos x}{d x^{2n+1}} = -(-1)^n \sin x.$$

5. **Beispiel:** Der n^{te} Differentialquotient von e^x ist gleich e^x selbst.

6. **Beispiel:** Man berechne:

$$\frac{d^2 \operatorname{arc} \sin x}{d x^2} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}^3}, \qquad \frac{d^2 \operatorname{arc} \cos x}{d x^2} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}^3}.$$

7. **Beispiel:** Ist $y = \ln x$, so ist $y^{(n)} = (-1)^{n-1}\, 1 . 2 . 3 \ldots (n-1) : x^n$.

8. **Beispiel:** Ist $y = u + v$, so ist $y^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$, d. h. der n^{te} Differentialquotient einer Summe ist gleich der Summe der n^{ten} Differentialquotienten der Summanden. Dies ist die Verallgemeinerung der Summenregel, S. 84.

9. **Beispiel:** Ist $y = u v$, so ist $y' = u' v + u v'$. Da $u' v$ und $u v'$ selbst wieder Produkte sind, kommt nach der Produktregel weiter:

$$\frac{d\,(u' v)}{d x} = u'' v + u' v', \qquad \frac{d\,(u v')}{d x} = u' v' + u v'',$$

daher:

$$y'' = \frac{d^2\,(u v)}{d x^2} = \frac{d\,(u' v + u' v)}{d x} = \frac{d\,(u' v)}{d x} + \frac{d\,(u v')}{d x} = u'' v + 2\, u' v' + u v''.$$

Weiterhin kommt, indem man jeden der drei Summanden $u'' v$, $2\, u' v'$, $u v''$ nach der Produktregel noch einmal differentiiert:

$$\begin{aligned} y''' = u''' v + {} & u'' v' \\ & + 2(u'' v' + u' v'') \\ & \qquad\qquad + u' v'' + u v''' \\ = u''' v + {} & 3\, u'' v' + 3\, u' v'' + u v'''. \end{aligned}$$

Die Formeln für y'' und y''' erinnern lebhaft an die Ausrechnung der zweiten und dritten Potenz einer Summe. In der Tat ist ja $(u + v)^2 = u^2 + 2\, u v + v^2$, nochmalige Multiplikation mit $u + v$ gibt:

$$\begin{aligned} (u + v)^3 = u^3 + {} & u^2 v \\ & + 2(u^2 v + u v^2) \\ & \qquad\qquad + u v^2 + v^3 \\ = u^3 + {} & 3\, u^2 v + 3\, u v^2 + v^3. \end{aligned}$$

Man erkennt denselben Bau des Rechenschemas. Der Unterschied ist, daß beim Differentiieren die Striche Zeichen dafür sind, wie oft u bzw. v zu differentiieren ist, während die oberen Indizes beim Ausmultiplizieren Exponenten sind. Liest man statt $u, u', u'' \ldots$ die Potenzen $u^0, u^1, u^2 \ldots$ und statt $v, v', v'' \ldots$ die Potenzen $v^0, v^1, v^2 \ldots$, wobei ja $u^0 = v^0 = 1$ ist, so geht aus dem Wert von y''' der von $(u + v)^3$ hervor. Allgemein ergibt sich so:

Um den n^{ten} Differentialquotienten des Produktes $u v$ zu bilden, stelle man die Formel für die n^{te} Potenz $(u + v)^n$ auf, nämlich den sogenannten **binomischen Lehrsatz**, der bekanntlich so lautet:

$$(u + v)^n = u^n + \frac{n}{1} u^{n-1} v + \frac{n\,(n-1)}{1 . 2} u^{n-2} v^2 + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1 . 2 . 3} u^{n-3} v^3 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{n}{1} u v^{n-1} + v^n,$$

und füge im ersten Summanden noch v^0 und im letzten noch u^0 als Faktor hinzu.

Ersetzt man dann $u^0, u, u^2 \ldots u^n$ durch $u, u', u'' \ldots u^{(n)}$ und $v^0, v, v^2 \ldots v^n$ durch $v, v', v'' \ldots v^{(n)}$, so ergibt sich der gesuchte n^{te} Differentialquotient:

$$\frac{d^n (u v)}{d x^n} = u^{(n)} v + \frac{n}{1} u^{(n-1)} v' + \frac{n(n-1)}{1.2} u^{(n-2)} v'' + \ldots + \frac{n}{1} u' v^{(n-1)} + u v^{(n)}.$$

Dies ist die Verallgemeinerung der Produktregel, S. 85.

10. Beispiel: Will man den n^{ten} Differentialquotienten von

$$y = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1+x)(1-x)}$$

bilden, so zerlegt man den Bruch in die Summe

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right),$$

weil sich Summen bequemer als Produkte differentiieren lassen. Wird $1:(1+x)$ mit u und $1:(1-x)$ mit v bezeichnet, so ist $y = \frac{1}{2}(u+v)$, daher nach dem 8. Beispiel: $y^{(n)} = \frac{1}{2}(u^{(n)} + v^{(n)})$. Nun haben wir hier:

$$u = \frac{1}{1+x}, \quad u' = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad u'' = \frac{1.2}{(1+x)^3}, \ldots,$$

$$v = \frac{1}{1-x}, \quad v' = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad v'' = \frac{1.2}{(1-x)^3}, \ldots,$$

und allgemein kommt daher:

$$y^{(n)} = \frac{1}{2}.1.2.3\ldots n\left[\frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}} + \frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right].$$

11. Beispiel: Die drei ersten Differentialquotienten von $y = \operatorname{arc\,tg} x$ sind:

$$y' = \frac{1}{1+x^2}, \quad y'' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \quad y''' = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}.$$

Die höheren Differentialquotienten nehmen verwickeltere Formen an, so daß es schwer fällt, ein allgemeines Gesetz ausfindig zu machen. Wir wenden deshalb einen Kunstgriff an. Wegen $y = \operatorname{arc\,tg} x$ ist nämlich $x = \operatorname{tg} y$, also $1 + x^2$ nach (5), S. 378, gleich $1 : \cos^2 y$, daher $y' = \cos^2 y$. Hierfür können wir aber auch schreiben:

$$(1) \qquad y' = \cos y \sin (y + \tfrac{1}{2}\pi),$$

Differentiieren wir dies, indem wir bedenken, daß rechts y eine Funktion von x ist, so kommt nach der Kettenregel:

$$y'' = \frac{d \cos y \sin (y + \frac{1}{2}\pi)}{d y} \cdot \frac{d y}{d x}$$

oder, da $d y : d x = y' = \cos^2 y$ ist:

$$y'' = \cos^2 y \frac{d \cos y \sin (y + \frac{1}{2}\pi)}{d y},$$

also nach der Produktregel:

$$y'' = \cos^2 y\,[-\sin y \sin (y + \tfrac{1}{2}\pi) + \cos y \cos (y + \tfrac{1}{2}\pi)].$$

Nach Satz 16, S. 411, ist der Inhalt der eckigen Klammern $\cos(2y + \frac{1}{2}\pi)$, mithin:

$$y'' = \cos^2 y \cos(2y + \tfrac{1}{2}\pi),$$

wofür wir auch schreiben können:

(2) $$y'' = \cos^2 y \sin(2y + \pi) = \cos^2 y \sin 2(y + \tfrac{1}{2}\pi).$$

Abermalige Anwendung der Kettenregel gibt:

$$y''' = \frac{d \cos^2 y \sin 2(y + \frac{1}{2}\pi)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \cos^2 y \, \frac{d \cos^2 y \sin 2(y + \frac{1}{2}\pi)}{dy},$$

also Anwendung der Produktregel:

$$y''' = 2\cos^3 y\,[-\sin y \sin 2(y + \tfrac{1}{2}\pi) + \cos y \cos 2(y + \tfrac{1}{2}\pi)],$$

daher abermalige Anwendung des genannten Satzes:

(3) $$y''' = 2\cos^3 y \cos(3y + \pi) = 2\cos^3 y \sin 3(y + \tfrac{1}{2}\pi).$$

Überblicken wir nun die Ergebnisse (1), (2), (3), so kommen wir leicht auf die Vermutung, daß allgemein sein wird:

(4) $$y^{(n)} = 1 . 2 . 3 \ldots (n-1) \cos^n y \sin n(y + \tfrac{1}{2}\pi).$$

Wir beweisen dies durch den Schluß von n auf $n+1$ (vgl. S. 79), indem wir, von dieser Annahme ausgehend, zeigen, daß die entsprechende Formel für $y^{(n+1)}$ als Folge aus ihr hervorgeht. Die Anwendung der Kettenregel auf (4) gibt nämlich:

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} &= 1 . 2 . 3 \ldots (n-1) \frac{d \cos^n y \sin n(y + \frac{1}{2}\pi)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= 1 . 2 . 3 \ldots (n-1) \cos^2 y \frac{d \cos^n y \sin n(y + \frac{1}{2}\pi)}{dy} \\ &= 1 . 2 . 3 \ldots (n-1) \cos^2 y\,[-n \cos^{n-1} y \sin y \sin n(y + \tfrac{1}{2}\pi) + \\ &\qquad + n \cos^n y \cos n(y + \tfrac{1}{2}\pi)] \\ &= 1 . 2 . 3 \ldots n \cos^{n+1} y\,[-\sin y \sin n(y + \tfrac{1}{2}\pi) + \cos y \cos n(y + \tfrac{1}{2}\pi)]. \end{aligned}$$

Nach Satz 16, S. 411, läßt sich für den Inhalt der Klammern

$$\cos[(n+1)y + \tfrac{1}{2}n\pi] \quad \text{oder} \quad \sin[(n+1)(y + \tfrac{1}{2}\pi)]$$

schreiben. Deshalb folgt:

(5) $$y^{(n+1)} = 1 . 2 . 3 \ldots n \cos^{(n+1)} y \sin[(n+1)(y + \tfrac{1}{2}\pi)].$$

Die Vergleichung von (5) mit (4) zeigt nun: Wenn für ein gewisses n die Formel (4) gilt, ist sie auch für die nächste ganze Zahl $n+1$ richtig. Weil nun die Formel (4) für $n = 1, 2, 3$ gilt, ist sie folglich auch für $n = 4$, also auch für $n = 5$ usw. richtig. Sie ist somit für alle höheren Differentialquotienten bewiesen. In (4) bedeutet y die vorgelegte Funktion $\operatorname{arc\,tg} x$, so daß $\cos y = 1 : \sqrt{1 + x^2}$ ist. Also geht hervor:

(6) $$\frac{d^n \operatorname{arc\,tg} x}{dx^n} = \frac{1 . 2 . 3 \ldots (n-1)}{\sqrt{1+x^2}^{\,n}} \sin[n(\operatorname{arc\,tg} x + \tfrac{1}{2}\pi)].$$

Ohne weiteres leuchtet ein:

Satz 2: Der n^{te} Differentialquotient des m^{ten} Differen-

tialquotienten der Funktion $f(x)$ ist der $(m+n)^{\text{te}}$ Differentialquotient der Funktion $f(x)$, in Formel:

$$\frac{d^n \dfrac{d^m f(x)}{d x^m}}{d x^n} = \frac{d^{m+n} f(x)}{d x^{m+n}}.$$

Nun fragt sich, welche Bedeutung die höheren Differentialquotienten einer Funktion haben. Am nächsten liegt es, zur graphischen Darstellung zu greifen. Die Funktion $y = f(x)$ hat eine Bildkurve c, wenn sie stetig und differentiierbar ist. Zu einem beliebigen Wert von x gibt es einen Wert y der Funktion $f(x)$, also einen Bildpunkt P oder $(x; y)$ auf der Kurve c, und einen Wert y' des Differentialquotienten $f'(x)$. Wir wollen in das Achsenkreuz auch den Punkt P' einzeichnen, dessen Abszisse dasselbe x und dessen Ordinate y' ist. Zu diesem Zwecke ziehen wir in P, siehe Fig. 309, die Tangente t und tragen vom Fußpunkte Q der Ordinate aus die x-Einheit im negativen Sinn auf der x-Achse bis R ab. Die Parallele zu t durch R schneidet die Ordinate QP (die nötigenfalls zu

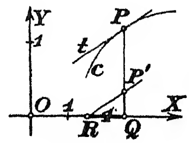


Fig. 309.

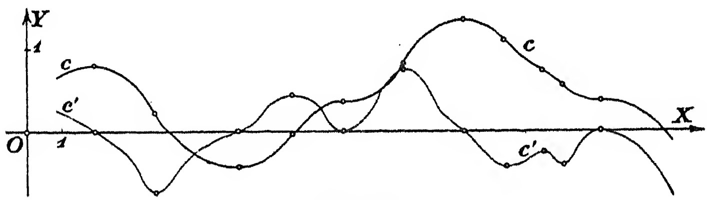


Fig. 310.

verlängern ist) im gesuchten Punkte P'. Denn y' ist die Steigung der Tangente t, also auch die Steigung der zu t parallelen Geraden RP'; diese Steigung ist aber gleich $QP' : RQ$. Dabei ist die Längeneinheit RQ, da sie von R nach Q den positiven Sinn der x-Achse hat, gleich $+1$ zu setzen. Also ist die Steigung y' gleich QP'. Somit ist der Differentialquotient y' als **Strecke**, als eine neue zur Abszisse x gehörige Ordinate, dargestellt. Diese Strecke ist mit der y-Einheit zu messen.

Führt man das Verfahren für eine größere Anzahl von Stellen P der Kurve c aus, siehe Fig. 310 (wobei man die besonders kenntlich gemachten Stellen beachten möge), so erhält man eine Anzahl von Punkten $(x; y')$ oder P' des Bildes c' der abgeleiteten Funktion $f'(x)$.

Die bisher betrachteten Funktionen und auch die später von uns

zu betrachtenden haben im allgemeinen einen stetigen Differentialquotienten, d. h. abgesehen von gewissen Werten von x, für die der Differentialquotient unendlich groß wird. Der zu einem derartigen Wert von x gehörige Punkt P der Bildkurve c von $y = f(x)$ hat eine zur y-Achse parallele Tangente, so daß die Konstruktion einen unendlich fernen Punkt P' gibt. Abgesehen von solchen Stellen also wird das Bild des Differentialquotienten y' oder $f'(x)$ wieder eine stetige Kurve c' sein. Wir nennen sie die (erste) Differentialkurve der Kurve c oder auch die (erste) abgeleitete Kurve. Wir fügen „erste" in Klammern hinzu, weil sich nachher weitere Kurven ergeben werden.

Die Differentialkurve kann auch dann, wenn die ursprüngliche Kurve c stetig ist und sich auch ihre Steigungen nur stetig ändern, besondere Erscheinungen bieten, nämlich Ecken haben, d. h. Stellen, an

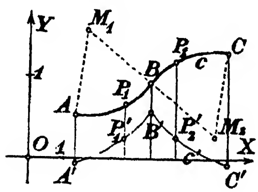


Fig. 311.

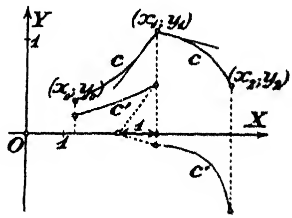


Fig. 312.

denen sich ihre Richtung unstetig ändert. Wenn man z. B. eine Kurve c aus zwei Kreisbogen AB und BC mit gleichen Radien wie in Fig. 311 so bildet, daß die Bogen einander in B berühren, also B auf der Verbindenden der Kreismitten M_1 und M_2 liegt, besteht die zugehörige Kurve c' aus zwei Stücken $A'B'$ und $B'C'$, die symmetrisch hinsichtlich der Ordinate von B sind und in B' eine Ecke bilden.

Ferner gibt es bei Anwendungen oft Bilder von Vorgängen, also Kurven c, die zwar stetig sind, aber Ecken haben, d. h. deren Steigung sich unstetig ändert. Ist z. B. x die Zeit, y die Temperatur eines Körpers, der von der Zeit x_0 bis zur Zeit x_1 erhitzt, vom Augenblicke x_1 an aber in einem Wasserbade bis zur Zeit x_2 abgekühlt wird, so wird die Funktion y von x durch eine Kurve c etwa wie in Fig. 312 dargestellt, die an der Stelle $(x_1; y_1)$ eine Ecke hat. Hier ist $dy : dx$ die Geschwindigkeit der Erhitzung, die beim Abkühlen negativ ist. Das Verfahren nach Fig. 309 liefert für die graphische Darstellung dieser Geschwindigkeit y' zwei Kurvenstücke c', die bei $x = x_1$ nicht zusammenhängen, sondern einen Sprung haben.

zu betrachtenden haben im allgemeinen einen stetigen Differentialquotienten, d. h. abgesehen von gewissen Werten von x, für die der Differentialquotient unendlich groß wird. Der zu einem derartigen Wert von x gehörige Punkt P der Bildkurve c von $y = f(x)$ hat eine zur y-Achse parallele Tangente, so daß die Konstruktion einen unendlich fernen Punkt P' gibt. Abgesehen von solchen Stellen also wird das Bild des Differentialquotienten y' oder $f'(x)$ wieder eine stetige Kurve c' sein. Wir nennen sie die (erste) Differentialkurve der Kurve c oder auch die (erste) abgeleitete Kurve. Wir fügen „erste" in Klammern hinzu, weil sich nachher weitere Kurven ergeben werden.

Die Differentialkurve kann auch dann, wenn die ursprüngliche Kurve c stetig ist und sich auch ihre Steigungen nur stetig ändern, besondere Erscheinungen bieten, nämlich Ecken haben, d. h. Stellen, an

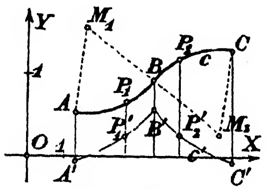


Fig. 311.

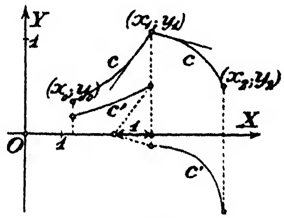


Fig. 312.

denen sich ihre Richtung unstetig ändert. Wenn man z. B. eine Kurve c aus zwei Kreisbogen AB und BC mit gleichen Radien wie in Fig. 311 so bildet, daß die Bogen einander in B berühren, also B auf der Verbindenden der Kreismitten M_1 und M_2 liegt, besteht die zugehörige Kurve c' aus zwei Stücken $A'B'$ und $B'C'$, die symmetrisch hinsichtlich der Ordinate von B sind und in B' eine Ecke bilden.

Ferner gibt es bei Anwendungen oft Bilder von Vorgängen, also Kurven c, die zwar stetig sind, aber Ecken haben, d. h. deren Steigung sich unstetig ändert. Ist z. B. x die Zeit, y die Temperatur eines Körpers, der von der Zeit x_0 bis zur Zeit x_1 erhitzt, vom Augenblicke x_1 an aber in einem Wasserbade bis zur Zeit x_2 abgekühlt wird, so wird die Funktion y von x durch eine Kurve c etwa wie in Fig. 312 dargestellt, die an der Stelle $(x_1; y_1)$ eine Ecke hat. Hier ist $dy : dx$ die Geschwindigkeit der Erhitzung, die beim Abkühlen negativ ist. Das Verfahren nach Fig. 309 liefert für die graphische Darstellung dieser Geschwindigkeit y' zwei Kurvenstücke c', die bei $x = x_1$ nicht zusammenhängen, sondern einen Sprung haben.

Nennt man Stellen einer Kurve und ihrer Differentialkurve, die zu derselben Abszisse gehören, einander entsprechend, so folgt aus Satz 7, S. 104, und Satz 8, S. 106, sofort

Satz 3: Wird die Bildkurve c einer stetigen und differentiierbaren Funktion im Sinn wachsender Abszissen durchlaufen, so entspricht einer Stelle, wo c steigt oder fällt, eine Stelle der Differentialkurve c', die eine positive oder negative Ordinate hat. Den Maximal-, Minimal- und Terrassenpunkten von c entsprechen die auf der Abszissenachse befindlichen Stellen von c'.

Man verfolge dies in Fig. 310, S. 455, wo c zwei Maximal-, eine Minimalstelle und zwei Terrassenpunkte hat, so daß c' die Abszissenachse fünfmal trifft.

Da die Differentialkurve das Bild der Funktion $y' = f'(x)$ ist, stellt ihre Steigung an der Stelle x den Differentialquotienten der Funktion $f'(x)$ dar. Dieser aber ist der zweite Differentialquotient $f''(x)$ von $f(x)$. Also:

Satz 4: Der zweite Differentialquotient von $y = f(x)$ gibt die Steigung der Differentialkurve c' der Bildkurve c von $y = f(x)$ an.

Hiermit ist eine geometrische Deutung des zweiten Differentialquotienten gewonnen: Der zweite Differentialquotient spielt für die Differentialkurve c' dieselbe Rolle wie der erste für die ursprüngliche Kurve c.

Durch dasselbe Verfahren, durch das aus der Kurve c das Bild c' des ersten Differentialquotienten abgeleitet wurde, kann man wie in Fig. 309 aus der Kurve c' das Bild c'' des zweiten Differentialquotienten gewinnen, indem man irgendeinen Punkt P' von c' ins Auge faßt, vom Fußpunkte Q seiner Ordinate aus die x-Einheit im negativen Sinn auf der x-Achse bis R abträgt und durch R die Parallele zur Tangente t' von c' zieht. Sie trifft die nötigenfalls zu verlängernde Ordinate QP' in einem Punkt, dessen Ordinate gleich y'' ist, vorausgesetzt, daß diese Ordinate mit der y-Einheit gemessen wird. Man gelangt so zur Bildkurve c'' der Funktion $y'' = f''(x)$; sie heißt die zweite Differentialkurve von c oder auch die zweite abgeleitete Kurve.

Die Kurve c'' steht zur Kurve c' in derselben Beziehung wie die Kurve c' zur Kurve c, d. h. die Ordinaten von c'' und c' stellen die Steigungen von c' und c durch Strecken dar, die mittels der y-Einheit

zu messen sind. Demnach gilt ein Satz entsprechend dem Satz 3, wenn man c und c' durch c' und c'' ersetzt.

Man übersieht, wie man weiter zu einer dritten, vierten usw. Differentialkurve oder abgeleiteten Kurve c''', c^{iv}... gelangt. Allgemein: Die $(n+1)^{\text{te}}$ Differentialkurve $c^{(n+1)}$ ist die erste Differentialkurve der n^{ten} Differentialkurve $c^{(n)}$. Deshalb gilt auch für $c^{(n)}$ und $c^{(n+1)}$ statt c und c' der Satz 3: Die n^{te} Differentialkurve steigt oder fällt, je nachdem die $(n+1)^{\text{te}}$ positive oder negative Ordinaten hat. Oder umgekehrt: Die $(n+1)^{\text{te}}$ Differentialkurve hat positive oder negative Ordinaten, je nachdem die n^{te} steigt oder fällt.

Wenn man von der Differentialkurve einer Kurve c in der Einzahl spricht, meint man ihre erste Differentialkurve c'.

Weil $y = f(x)$ denselben Differentialquotienten wie $y = f(x) + \text{konst.}$ hat, ergibt sich: Wird eine Kurve c parallel zur y-Achse verschoben, so ändert sich ihre Differentialkurve c' nicht.

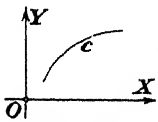


Fig. 313.

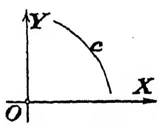


Fig. 314.

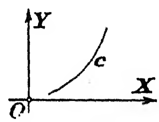


Fig. 315.

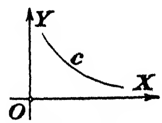


Fig. 316.

Man betrachte nun die in den Figuren 313 bis 316 dargestellten Kurven c und verfolge sie im Sinn wachsender Abszissen, also von links nach rechts. Im ersten Fall nimmt die Steigung ab, denn sie ist positiv, und die Kurve wird immer flacher. Im zweiten Fall wird die Kurve immer steiler; sie hat aber eine negative Steigung. Obgleich hier der absolute Betrag der Steigung wächst, nimmt die Steigung selbst ebenso wie im ersten Fall ab (wie die Zahlenreihe -1, -2, -3 usw. abnimmt, obgleich die Zahlenreihe 1, 2, 3 usw. wächst). Im dritten Fall ist die Steigung positiv und nimmt zu. Im vierten endlich wird die Kurve zwar immer flacher; da aber die Steigung negativ ist, nimmt die Steigung zu (wie die Zahlenreihe -5, -4, -3 usw. zunimmt, obgleich die Zahlenreihe 5, 4, 3 usw. abnimmt). In den beiden ersten Fällen nimmt also die Steigung ab, in den beiden letzten zu.

Ist nun c die Bildkurve einer Funktion y von x, so heißt dies: Im ersten und zweiten Fall nimmt y' ab, im dritten und vierten dagegen zu. Da y' die Ordinate der Differentialkurve c' ist, fällt die Kurve c' im ersten und zweiten Fall, während sie im dritten und vierten steigt, d. h. die Kurve c' hat im ersten und zweiten Fall negative und im dritten

und vierten positive Steigung. Dies bedeutet: Im ersten und zweiten Fall hat die zweite Differentialkurve c'' negative, im dritten und vierten positive Ordinaten. Nun aber ist der zweite Differentialquotient y'' die Ordinate der Kurve c''. Deshalb ist y'' im Fall der Figuren 313 und 314 negativ und im Fall der Figuren 315 und 316 positiv.

In den beiden ersten Fällen sagt man, daß die Kurve ihre konvexe Seite (ihren Buckel) nach oben wende, dagegen in den beiden letzten ihre konkave Seite (ihre Höhlung). Dabei wird das Achsenkreuz in der gewöhnlichen Lage vorausgesetzt. Liegt es anders, so ist als „oben" diejenige Seite der Figur zu betrachten, auf der die positive y-Achse liegt. Somit gilt der

Satz 5: Die Bildkurve einer Funktion $y = f(x)$ wendet ihre **konvexe** oder **konkave** Seite nach oben (nach der Richtung der positiven y-Achse), je nachdem an der betrachteten Stelle der Wert ihres **zweiten** Differentialquotienten y'' **negativ** oder **positiv** ist.

Durchläuft man die Kurve im Sinn wachsender Abszissen, so kann der zweite Differentialquotient y'' auch durch den Wert Null gehen. Ist er vorher negativ und nachher positiv, so liegt der Fall der Fig. 317 vor. Ist er dagegen vorher positiv und nachher negativ, so liegt der Fall der Figur 318 vor. Denn im ersten Fall ist die Kurve nach oben hin vor der Stelle konvex und nachher konkav, im zweiten vorher konkav und nachher konvex. An der Übergangsstelle, an der y'' gleich Null wird, tritt deshalb eine Wendung in ihrem Verlauf ein. Man nennt diese Stelle einen Wendepunkt und ihre Tangente eine Wendetangente (vgl. S. 143). Man sagt auch Inflexionspunkt und Inflexionstangente. Die Kurve verläuft in der Nähe des Wendepunktes auf verschiedenen Seiten der Wendetangente, indem sie die Wendetangente im Wendepunkte durchsetzt, aber trotzdem berührt.

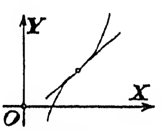


Fig. 317.

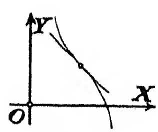


Fig. 318.

12. Beispiel: Die Funktion $y = \sin x$ hat den zweiten Differentialquotienten $y'' = -\sin x$, der gleich Null wird für $x = n\pi$, wo n irgendeine ganze Zahl bedeutet. Ferner ist $y' = \cos x$, also für $x = n\pi$ gleich ± 1, je nachdem n gerade oder ungerade gewählt wird. Außerdem ist $y = 0$ für $x = n\pi$. Mithin hat die Sinuslinie für $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi$ usw. Wendepunkte mit den Steigungen $1, -1, +1$ usw., siehe Fig. 274, S. 388.

13. Beispiel: Man beweise, daß die Kosinuslinie, siehe Fig. 276, S. 390,

für $x = \pm \frac{1}{2}\pi, \pm \frac{3}{2}\pi, \pm \frac{5}{2}\pi$ usw., ferner die Tangenslinie, siehe Fig. 281, S. 398, für $x = 0$, $x = \pm \pi$, $x = \pm 2\pi$ usw. und die Kotangenslinie, siehe Fig. 282, S. 399, für $x = \pm \frac{1}{2}\pi, \pm \frac{3}{2}\pi, \pm \frac{5}{2}\pi$ usw. auf der x-Achse Wendepunkte mit den Steigungen $+1$ oder -1 hat.

14. Beispiel: Die im 6. Beispiel, S. 142 u. f., vorkommende Funktion

$$y = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

hat als ersten und zweiten Differentialquotienten:

$$y' = \frac{4}{x^3} - \frac{2}{(x-1)^3}, \quad y'' = -\frac{12}{x^4} + \frac{6}{(x-1)^4}.$$

Der zweite wird gleich Null für

$$x = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}-1}.$$

Dieser Wert liegt zwischen Null und Eins, falls man die Wurzel negativ wählt. Man berechne sie logarithmisch. Abgerundet kommt $x = 0{,}543$. Hierzu gehören die Werte $y = -1{,}985$ und $y' = 45{,}94$. Sie bestimmen den in Fig. 96, S. 143, sichtbaren Wendepunkt mit seiner Tangente. Man beweise, daß y'' sonst nirgends im Intervalle von $x = 0$ bis $x = 1$ (in dem allein die Bildkurve damals untersucht wurde) verschwindet, vielmehr für $x < 0{,}543$ negativ und für $x > 0{,}543$ positiv ist, woraus sich nach Satz 5 die Gestalt der Kurve ergibt.

§ 2. Kennzeichen eines Maximums oder Minimums.

Für den Verlauf der Bildkurve c einer Funktion $y = f(x)$ sind außer der Konvexität oder Konkavität sowie den Wendepunkten noch diejenigen Stellen wichtig, wo y ein Maximum oder Minimum erreicht. Nach Satz 8, S. 106, kann es nur da vorkommen, wo der erste Differentialquotient $dy : dx$ oder y' den Wert Null hat. Wenn y' für einen Wert von x gleich Null ist, folgt daraus aber nur, daß die Kurve an der betreffenden Stelle eine zur x-Achse parallele Tangente hat. Deshalb könnte dort statt eines Gipfels oder Tales auch ein Terrassenpunkt liegen, vgl. Fig. 73, S. 105, an den Stellen 1 und 4. In dem angeführten Satz wurde aber schon gesagt, daß y an einer Stelle, wo $y' = 0$ wird, dann und nur dann ein Maximum hat, wenn y' unmittelbar vorher positiv und unmittelbar nachher negativ ist, während beim Minimum das Umgekehrte gilt. Wie immer soll die Kurve dabei im Sinn wachsender Abszissen durchlaufen werden. Wenn nun y'' an einer Stelle, wo $y' = 0$ ist, einen negativen Wert, also die zweite Differentialkurve c'' eine negative Ordinate hat, fällt die erste Differentialkurve c' (nach S. 458), so daß y' beim Durchschreiten der Stelle abnimmt. Da y' an der Stelle selbst gleich Null sein soll, muß y' vorher größer und nachher kleiner

als Null sein. Demnach tritt dort ein Maximum von y ein. Wenn dagegen y'' an einer Stelle, wo $y' = 0$ ist, einen positiven Wert hat, schließen wir ebenso, daß y dort ein Minimum hat. Deshalb gilt der

Satz 6: Eine differentiierbare Funktion $y = f(x)$ kann für ein bestimmtes x nur dann ein Maximum oder Minimum haben, wenn dort ihr erster Differentialquotient y' den Wert Null hat. Ist für dies x auch der erste Differentialquotient y' differentiierbar und der zweite Differentialquotient y'' **negativ** oder **positiv**, so tritt wirklich ein **Maximum** oder **Minimum** der Funktion y ein. Hierbei wird von vielleicht vorkommenden Grenzmaximis oder Grenzminimis abgesehen.

Bezüglich der letzten Bemerkung in diesem Satz erinnern wir an die Ausführungen auf S. 105, 106.

1. Beispiel: Die Tragfähigkeit eines Balkens von rechteckigem Querschnitte mit zwei wagerechten Flächen ist um so größer, je größer das Produkt aus der Breite und dem Quadrat der Höhe des Querschnittes ist. Wie wird man also aus einem Stamm von kreisförmigem Querschnitt einen Balken von größter Tragfähigkeit aussägen? Man hat in einen Kreis von gegebenem Radius r ein Rechteck so einzuschreiben, daß das Produkt aus seiner Breite und dem Quadrate seiner Höhe ein Maximum wird. Ist x die halbe Breite, so ist $\sqrt{r^2 - x^2}$ die halbe Höhe. Also soll

$$y = 2\,x \,.\, 4\,(r^2 - x^2) = 8\,(r^2 x - x^3)$$

ein Maximum werden. Dabei ist x auf die Werte von 0 bis r beschränkt. Für $x = 0$ und $x = r$ wird $y = 0$, was zu unbrauchbaren Grenzminimis führt. Da $y' = 8\,(r^2 - 3\,x^2)$ und $y'' = -48\,x$ ist, wird $y' = 0$ für $x = \frac{1}{3}\,r\,\sqrt{3}$, wo die Wurzel positiv zu nehmen ist. Ferner ist dann y'' negativ, so daß für $x = \frac{1}{3}\,r\,\sqrt{3}$ ein Maximum eintritt. Man beweise, daß man das Rechteck so bekommt: Ein Durchmesser, der die eine Diagonale des Rechtecks sein soll, wird gedrittelt. Die Lote zum Durchmesser, die man in den beiden Teilpunkten nach verschiedenen Seiten errichtet, treffen den Kreis in den anderen Ecken des Rechtecks.

2. Beispiel: Für die positive Quadratwurzel $\sqrt{1 + x^2}$ im Intervalle $0 < x < 1$ hat man den Näherungswert $0{,}96 + 0{,}40\,x$ empfohlen. Er soll auf seine Güte geprüft werden. Benutzt man diesen Näherungswert statt der Quadratwurzel, so entsteht der auf seine Größe zu untersuchende Fehler:

$$y = 0{,}96 + 0{,}40\,x - \sqrt{1 + x^2}\,.$$

Man hat $y' = 0{,}40 - x : \sqrt{1 + x^2}$. Für die untere Intervallgrenze $x = 0$ wird $y = -0{,}04$ und $y' > 0$, hier liegt also ein Grenzminimum des Fehlers vor. Für die obere Intervallgrenze $x = 1$ ist $y = -0{,}054\ldots$ und $y' < 0$, so daß auch hier ein Grenzminimum eintritt. Im Intervalle wird $y' = 0$, wenn $x^2 : (1 + x^2) = 0{,}16$, also $x = 2 : \sqrt{21} = 0{,}44\ldots$ wird. Da $y'' = -1 : \sqrt{1 + x^2}^3$, also negativ ist, tritt dann das Maximum des Fehlers y ein. Es beträgt $0{,}96 - \frac{1}{5}\sqrt{21} = 0{,}043\ldots$ Also

sind $+0{,}043\ldots$ und $-0{,}054\ldots$ die Schranken des Fehlers, der daher ein wenig mehr als 5 Einheiten der zweiten Dezimalstelle betragen kann. Dies zeigt, daß die Näherungsformel für die Abrundung auf zwei Dezimalstellen keineswegs ausreicht.

Die Bestimmung der Maxima und Minima wird häufig durch den folgenden selbstverständlichen Satz erleichtert:

Satz 7: Sind y und z zwei Funktionen von x, die für dieselben Werte von x zu- oder abnehmen, so haben beide für denselben Wert von x ein Maximum oder Minimum. Wenn jedoch z abnimmt, sobald y zunimmt, und zunimmt, sobald y abnimmt, hat z für einen solchen Wert von x, für den y ein Maximum oder ein Minimum wird, ein Minimum oder Maximum.

3. Beispiel: Zur Beurteilung des Standpunktes, von dem aus man ein Bildwerk, eine Inschrift oder dergleichen am deutlichsten sieht, ist die Lösung der folgenden Aufgabe von Bedeutung: Auf einem Schenkel eines rechten Winkels, siehe Fig. 319, liege eine Strecke AB. Auf dem andern Schenkel soll ein Punkt X so bestimmt werden, daß der Gesichtswinkel, unter dem das in X befindliche Auge die Strecke AB sieht, nämlich der Winkel $y = \sphericalangle AXB$, am größten wird. Die Höhen $OA = a$ und $OB = b > a$ seien gegeben. Die Strecke $OX = x$ kann auf positive Werte beschränkt werden. Der Winkel y ist die Differenz der Winkel OXB und OXA, deren Tangens gleich $b:x$ und $a:x$ sind. Zur Berechnung von y dient daher die Formel für den Tangens einer Differenz in Satz 16, S. 411:

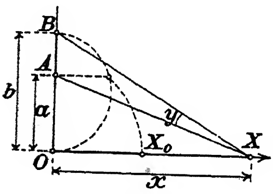


Fig. 319.

$$\operatorname{tg} y = \frac{\dfrac{b}{x} - \dfrac{a}{x}}{1 + \dfrac{b}{x}\dfrac{a}{x}} = \frac{(b-a)\,x}{x^2 + ab}.$$

Da y ein positiver spitzer Winkel ist, der zugleich mit seinem Tangens wächst, fragen wir bequemer nach dem Maximum von $\operatorname{tg} y$. Da $\operatorname{tg} y$ positiv ist, wächst $\operatorname{tg} y$, wenn $1:\operatorname{tg} y$ oder $\operatorname{ctg} y$ abnimmt. Daher können wir statt dessen auch nach dem Minimum von $\operatorname{ctg} y$, d. h. von

$$z = \frac{x^2 + ab}{(b-a)x} = \frac{x}{b-a} + \frac{ab}{(b-a)\,x}$$

fragen. Nun ist

$$z' = \frac{1}{b-a} - \frac{ab}{(b-a)\,x^2}, \qquad z'' = \frac{2ab}{(b-a)\,x^3},$$

z'' also positiv, so daß sich ein Minimum von z, d. h. ein Maximum von y ergibt, nämlich für $z' = 0$, woraus $x = \sqrt{ab}$ folgt. Der gesuchte Abstand x ist das geometrische Mittel von OA und OB und führt zu dem in Fig. 319 durch die angedeutete Konstruktion zu ermittelnden günstigsten Standpunkte X_0.

Wenn der erste Differentialquotient y' einer Funktion $y = f(x)$, deren Maxima und Minima gesucht werden, die Form eine Bruches $u:v$ hat, läßt sich die Bestimmung des Vorzeichens von y'' vereinfachen. Denn aus $y' = u : v$ folgt nach der Bruchregel:

$$y'' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Für die fraglichen Stellen ist nun $y' = 0$, d. h. $u = 0$, so daß für sie y'' gleich $u' : v$ wird. Man braucht daher nur den Zähler von y' zu differentiieren. Natürlich ist dabei von Werten von y abgesehen, für die der Nenner v gleich Null wird.

4. Beispiel: In einer Rohrleitung fließe Wasser mit dem Gefälle J, d. h. J gebe in Metern an, um wieviel der Wasserspiegel auf je ein Meter des Weges fällt. Die mittlere Geschwindigkeit im Querprofil, siehe Fig. 320, wird nach den Lehren der Hydrodynamik in der Form $c\sqrt{Jr}$ angegeben, ausgedrückt in m/sek. (vergl. S. 256). Dabei bedeutet c eine Konstante, die von der Rauhigkeit der Wandung abhängt. Ferner bedeutet r den hydraulischen Radius des Profils, d. h. das Verhältnis $F : u$, wo F die Fläche des Wasserprofils in qm und u die Länge des benetzten Profilrandes in m ist. Bedeutet x das Bogenmaß des zu u gehörigen Zentriwinkels und a den Radius des Rohrquerschnittes in m, so ist $u = ax$ und F die Differenz aus dem zu x gehörigen Kreisausschnitte, der gleich $\frac{1}{2}a \,.\, ax$ ist, und dem gleichschenkligen Dreieck MAB, dessen halbe Grundlinie gleich $a \sin \frac{1}{2}x$ und dessen Höhe gleich $a \cos \frac{1}{2}x$, dessen Inhalt daher gleich $a^2 \sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x$ ist. Daher wird:

$$F = \tfrac{1}{2}a^2 x - a^2 \sin \tfrac{1}{2}x \cos \tfrac{1}{2}x\,.$$

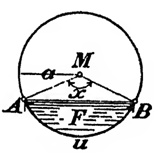


Fig. 320.

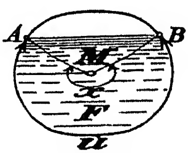


Fig. 321.

Wenn der Wasserspiegel höher als die Kreismitte liegt, ist $\cos \frac{1}{2}x$ negativ, so daß F als Summe aus Kreisausschnitt und Dreieck erscheint, was ja auch in Fig. 321 zutrifft. Nach Satz 17, S. 412, ist

$$F = \tfrac{1}{2}a^2 x - \tfrac{1}{2}a^2 \sin x\,,$$

also wegen $u = ax$ der hydraulische Radius:

$$r = \frac{F}{u} = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}a\,\frac{\sin x}{x}.$$

Die Geschwindigkeit $c\sqrt{Jr}$ wird, da c und J Konstanten bedeuten, am größten wenn r am größten, d. h. wenn

$$y = \frac{\sin x}{x}$$

am kleinsten wird. Wir suchen daher das Minimum von y. Es kommt:

$$y' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}\,,$$

und der Zähler ist gleich Null, wenn entweder $x = 0$ oder $x = \sin x : \cos x = \operatorname{tg} x$

ist. Der erste Fall ist ohne Bedeutung. Im zweiten handelt es sich um den Winkel x zwischen 0 und 2π, für den $\operatorname{tg} x = x$ ist. Er wurde im 1. Beispiel S. 402, gefunden: $x = 4{,}4934$. Das zugehörige Gradmaß ist $257^{\circ}\,27'$. Fig. 321 ist für diesen Wert von x entworfen. Um zu entscheiden, ob für ihn ein Maximum oder Minimum eintritt berechnen wir y''. Da y' die Form eines Bruches $u : v$ hat, brauchen wir nach der vorausgeschickten Bemerkung nur $u' : v$ zu berechnen. Da hier ferner $v = x^2$ positiv ist, kommt es also nur auf das Vorzeichen von

$$u' = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x$$

an, das, da x im dritten Quadranten liegt, positiv ist. Also hat y sein Minimum, d. h. die Geschwindigkeit $c\sqrt{Jr}$ ihr **Maximum** für $x = 4{,}4934$ oder $257^{\circ}\,27'$.

Der Satz 6 gibt zwar für den Fall, wo y' für einen Wert von x gleich Null und y'' dort negativ oder positiv ist, die Gewißheit eines Maximums oder Minimums, doch sagt er nichts aus, wenn auch y'' dort gleich Null wird. Um dann zu einem hinreichenden Merkmale des Maximums oder Minimums zu gelangen, schließen wir so:

Wir wollen annehmen, y' und y'' seien gleich Null für $x = x_0$. Ferner möge die zweite Differentialkurve c'' für $x = x_0$ ein Maximum haben. Dann muß sie, da sie für $x = x_0$ die Ordinate Null hat, wie die strichpunktierte Linie in Fig. 322 verlaufen. In der Nähe von x_0 ist also y'' negativ, d. h. die erste Differentialkurve c' muß nach S. 458 ebenda fallen. Weil sie für $x = x_0$ die Ordinate Null hat und ihre Steigung (nämlich y'') für $x = x_0$ auch gleich Null ist, muß c' an der Stelle $x = x_0$ der Abszissenachse einen Terrassenpunkt mit fallendem Verlaufe haben. Deshalb geht c' von Stellen oberhalb

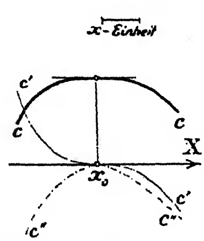


Fig. 322.

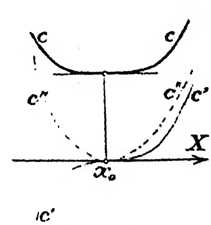


Fig. 323.

der x-Achse zu Stellen unterhalb der x-Achse, so daß die Kurve c selbst vorher steigt, nachher fällt, also c für $x = x_0$ ein Maximum hat. Hätten wir vorausgesetzt, daß c'' für $x = x_0$ ein Minimum habe, so hätten wir ebenso geschlossen (siehe Fig. 323), daß c dort auch ein Minimum hat.

Nehmen wir jetzt an, c'' habe für $x = x_0$ weder ein Maximum

noch ein Minimum. Dann muß c'' an der Stelle $x = x_0$ die Abszissenachse durchsetzen, also vorher oben und nachher unten verlaufen oder umgekehrt, d. h. c' muß vorher steigen und nachher fallen oder umgekehrt. Da c' auch durch die Stelle $x = x_0$ der Abszissenachse geht und hier die x-Achse berührt (weil hier $y'' = 0$ ist), muß c' ein Maximum oder Minimum haben und also entweder beständig unterhalb oder beständig oberhalb der x-Achse bleiben, d. h. die Kurve c muß in der Nähe von $x = x_0$ entweder beständig fallen oder beständig steigen, so daß c für $x = x_0$ weder ein Maximum noch ein Minimum hat.

Wir haben somit erkannt:

Satz 8: Ist eine Funktion $y = f(x)$ mit ihrem ersten und zweiten Differentialquotienten an der Stelle $x = x_0$ stetig und ist für $x = x_0$ sowohl y' als auch y'' gleich Null, so haben $y = f(x)$ und $y'' = f''(x)$ für $x = x_0$ entweder beide ein Maximum oder beide ein Minimum oder schließlich beide weder ein Maximum noch ein Minimum. Eine andere Möglichkeit gibt es nicht.

Um also in dem Fall, wo für $x = x_0$ nicht nur y', sondern auch y'' gleich Null ist, zu entscheiden, ob ein Maximum oder Minimum von y eintritt, kann man statt dessen fragen, ob y'' dort ein Maximum oder Minimum hat. Dies tritt nach Satz 6 nur dann ein, wenn für $x = x_0$ auch $y''' = 0$ ist, und zwar ergibt sich, wenn außerdem $y^{\text{IV}} \neq 0$ wird, ein Minimum oder Maximum, da ja y^{IV} der zweite Differentialquotient von y'' ist. Ist aber für $x = x_0$ auch $y^{\text{IV}} = 0$, so wird Satz 8 auf y'' statt y angewandt. Er lehrt, daß jetzt die Entscheidung über Maximum oder Minimum darauf zurückgeführt werden kann, ob y^{IV} für $x = x_0$ ein Maximum oder Minimum hat, usw. So kommen wir zu

Satz 9: Eine differentiierbare Funktion $y = f(x)$ kann nur für einen solchen Wert x_0 von x ein Maximum oder Minimum haben, für den ihr erster Differentialquotient y' gleich Null ist. Um zu entscheiden, ob dann wirklich ein Maximum oder Minimum eintritt, berechnet man die höheren Differentialquotienten y'', y''' ... so weit, bis man zuerst auf einen stößt, der für $x = x_0$ **nicht** gleich Null ist. Hat er **ungeraden** Index, so tritt **weder ein Maximum noch ein Minimum** ein. Hat er **geraden** Index, so liegt ein **Maximum** vor, wenn er **negativ** ist, dagegen ein **Minimum,** wenn er **positiv** ist. Vorausgesetzt wird, daß alle in Betracht kommenden Differentialquotienten für $x = x_0$

stetig seien. Von den **Grenzmaximis** und **Grenzminimis**, die bei der Beschränkung von x auf ein Intervall an den Intervallgrenzen auftreten, ist dabei abgesehen.

5. Beispiel: Gesucht werden die Maxima und Minima von $y = x^n$, wo n eine positive ganze Zahl sei. Hier verschwindet $y' = nx^{n-1}$ nur für $x = 0$. Ferner wird $y'' = n(n-1)x^{n-2}$ usw. Alle Differentialquotienten sind gleich Null für $x = 0$ bis zum $(n-1)^{\text{ten}}$, dessen Wert gleich $n(n-1)(n-2)\ldots 2x$ ist. Dagegen ist $y^{(n)}$ gleich $n(n-1)\ldots 2 \cdot 1 > 0$. Also folgt: Ist n ungerade, so tritt für $x = 0$ weder ein Maximum noch ein Minimum ein; ist n gerade, so tritt für $x = 0$ ein Minimum ein. Man erkennt dies auch aus dem Verlaufe der Bildkurve, die, wenn n gerade ist, im ersten und zweiten, wenn n ungerade ist, im ersten und dritten Quadranten liegt und dann im Anfangspunkt eine Terrasse hat, sobald $n > 1$ ist. Siehe Fig. 324 für den Fall $n = 4$.

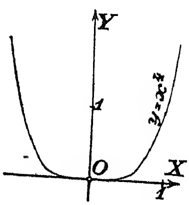


Fig. 324.

Übrigens reicht man meistens mit dem einfacheren Satz 6 aus, da für gewöhnlich $y'' \neq 0$ ist, wenn $y' = 0$ wird. Ja, man braucht oft selbst diesen nicht heranzuziehen, da man häufig aus der Natur der Aufgabe erkennt, daß ein Maximum oder Minimum auftreten muß. Man ermittelt es dann aus der Bedingung $y' = 0$ allein. Wir bringen ja auch erst jetzt die vollständigen Merkmale der Maxima und Minima, obgleich wir schon eine Reihe von Maximal- und Minimalaufgaben früher erledigt haben.

Im Haushalte der Natur spielt das Maximum oder Minimum eine wichtige Rolle. Die Natur schlägt, wie die Mechanik zeigt, einen Weg ein, auf dem mit dem kleinsten Kraftaufwande das Größte erreicht wird. In der Technik will man ebenfalls mit dem geringsten Kostenaufwande möglichst großen Nutzen erzielen. Man muß also das Kostenminimum der auszuführenden Entwürfe feststellen.

Das erste notwendige, wenn auch noch nicht hinreichende Kennzeichen eines Maximums oder Minimums, daß nämlich der Differentialquotient $y' = f'(x)$ für den betreffenden Wert von x gleich Null sein muß, kann etwas anders ausgedrückt werden: Da nach S. 69 der Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

ist, besagt es, daß hier der Zähler dy nicht nur nach Null strebt, sondern gleich Null ist. Wenn also $f(x)$ für einen gewissen Wert von x ein Maximum oder Minimum hat, muß dort $f(x)$ ebenso groß sein wie $f(x + dx)$. Daher tritt augenblicklich ein

Stillstand in der Änderung von $f(x)$ ein. Wir erinnern, wie schon auf S. 258, an das Sprichwort: „Stillstand bedeutet Rückgang".

6. Beispiel: Von welcher Stelle X der Geraden g aus gesehen erscheint die Strecke AB in Fig. 325 unter dem größten Gesichtswinkel AXB? Alle Punkte X der Zeichenebene, für die $\sphericalangle AXB$ denselben Wert hat, liegen bekanntlich auf einem Kreis durch A und B. Nach dem Vorhergehenden kann ein Maximum des Gesichtswinkels nur dann für einen Punkt X von g eintreten, wenn der Gesichtswinkel für X gerade so groß ist wie für einen unendlich benachbarten Punkt Y von g. Daher suchen wir X so auf g zu bestimmen, daß der Kreis durch X, A und B die Gerade g noch in einem zu X unendlich benachbarten Punkt Y trifft, weil ja dann $\sphericalangle AXB = \sphericalangle AYB$ ist. Dies bedeutet: der Kreis muß g in X berühren. Also ist X so gelegen, daß $OX^2 = OA \cdot OB$ wird, wenn die Gerade AB die Gerade g in O trifft. Dies Ergebnis haben wir in dem besonderen Fall, wo AB zu g senkrecht ist, im 3. Beispiele durch Rechnung gefunden. Zwei Punkte X gehen hervor, O liegt zwischen ihnen. Für beide tritt ein Maximum des Winkels ein, denn wenn sich der Punkt, von dem aus AB betrachtet wird, längs g hinbewegt, wird der Winkel sehr klein, falls sich der Punkt weit entfernt; aber auch, falls er in O liegt, ist der Winkel gleich Null. Also muß zwischen O und dem Unendlichfernen nach jeder Seite hin mindestens ein Maximum liegen.

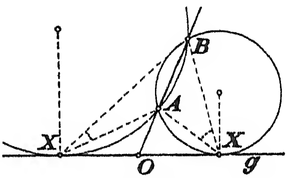


Fig. 325.

Der Umstand, daß für eine Stelle x, für die $f(x)$ ein Maximum oder Minimum hat, der Wert von $f(x)$ gerade so groß wie $f(x + dx)$ ist, während er an Stellen x, die ganz beliebig gewählt werden, davon unendlich wenig abweicht, ist im Hinblick auf die Unvollkommenheit aller menschlichen Arbeit von nicht zu unterschätzender Bedeutung. Wenn wir nämlich für x nicht genau den Wert nehmen, für den $f(x)$ das Maximum oder Minimum hat, sondern einen wenig davon abweichenden Wert, wird der Einfluß dieses Fehlers auf das Ergebnis $f(x)$ sehr gering sein, nämlich geringer, als der Einfluß einer ebenso großen Abweichung des x von einem gewünschten Wert für eine Stelle wäre, wo y' oder $f'(x)$ nicht gleich Null ist. Anschaulicher ausgedrückt: Auf einem Berggipfel oder auf der Talsohle (allerdings auch auf einer Terrasse) werden wir unsere Höhe nur unmerklich ändern, wenn wir einen Schritt tun; dagegen ist die Änderung der Höhe an einem Abhange bei nur einem Schritt beträchtlich. Wenn wir also z. B. die Kosten $y = f(x)$ eines Entwurfs zu einem Minimum machen würden, sobald wir die im Entwurfe vorkommende willkürliche Größe x gleich a wählten, wird der Kostenbetrag eine nicht ins Gewicht fallende Erhöhung erfahren, wenn wir x wenig verschieden von a wählen. Dazu nötigt uns die Unvollkommenheit aller unserer Verrichtungen und auch die Rücksicht auf praktische Erwägungen:

oft stehen für die Größe x nur sprungweise verschiedene Werte zur Verfügung, z. B. bei Materialien, die nur in gewissen normierten Sorten hergestellt werden.

Ist $y = f(x)$ eine stetige Funktion von x, deren Bildkurve eine Symmetrie- oder Spiegelgerade parallel zur y-Achse hat, siehe Fig. 326 und Fig. 327, so tritt dort, wo die Kurve diese Gerade schneidet, ein Maximum oder Minimum ein. Dies gilt sogar, wenn die Bildkurve

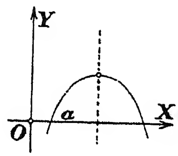


Fig. 326.

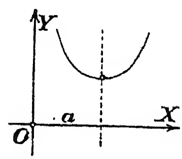


Fig. 327.

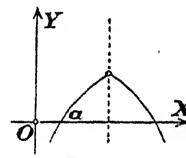


Fig. 328.

dort eine Ecke hat, siehe Fig. 328. Hat die Symmetriegerade die Abszisse a, so muß $f(x)$ für zwei Werte $x = a \pm u$, die gleich weit (um $\pm u$) von a entfernt sind, gleiche Werte haben, also

$$f(a + u) = f(a - u)$$

für jedes u sein. Wenn insbesondere die y-Achse selbst die Spiegelgerade, also $a = 0$ ist, kommt $f(u) = f(-u)$, d. h. dann ist $f(x)$ eine gerade Funktion von x (vgl. S. 384). Eine gerade Funktion $f(x)$ hat also für $x = 0$, sobald sie dort stetig ist, stets ein Maximum oder Minimum.

Diese Überlegung gibt den inneren Grund dafür, daß häufig eine symmetrische Annahme zu einem Maximum oder Minimum führt, z. B.: Unter allen Dreiecken von gleicher Grundlinie und gleicher Summe der beiden anderen Seiten ist das gleichschenklige das größte; unter allen einem Kreis einbeschriebenen Rechtecken ist das Quadrat am größten.

Wir geben noch zwei für die Optik wichtige Beispiele:

7. Beispiel: Zwei Felder seien durch eine Gerade g getrennt. Im einen kann man sich mit der konstanten Geschwindigkeit v_1, im anderen mit der konstanten Geschwindigkeit v_2 bewegen, etwa ausgedrückt in Metern für die Sekunde. Welchen Weg wird man einschlagen, um am schnellsten von einem Punkt A des einen Feldes zu einem Punkte B des anderen zu gelangen? A habe von g den Abstand $AO = a$ und B den Abstand $BU = b$ (in Metern), und OU betrage c m, siehe Fig. 329. In jedem Felde wird man einen geraden Weg einschlagen. Die Knickstelle des gebrochenen Linienzuges sei der Punkt X auf g. Ist $OX = x$, positiv gemessen im Sinn von O nach U, so ist die für den Weg von A nach B nötige Zeit in Sekunden:

$$y = \frac{1}{v_1}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{v_2}\sqrt{b^2 + (c - x)^2},$$

wo die Quadratwurzeln positiv sind. Der Differentialquotient ist:

$$y' = \frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{1}{v_2}\frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}.$$

Die Forderung $y' = 0$ führt aber nach Entfernung der Wurzeln auf eine Gleichung vierten Grades für die Unbekannte x. Deshalb ziehen wir es vor, die Forderung geometrisch zu deuten: Der Bruch $x : \sqrt{a^2+x^2}$ ist der Sinus des Winkels OAX oder φ, gemessen im Sinn der Drehung von AO um A in der Richtung nach U zu, und zwar auch dann, wenn x negativ wird, weil alsdann X über O hinaus liegt, also φ negativ wird, daher auch $\sin\varphi$. Ebenso ist $(c-x) : \sqrt{b^2+(c-x)^2}$ der Sinus des Winkels UBX oder ψ, gemessen im Sinne der Drehung von BU um B in der Richtung nach O zu, und zwar auch dann, wenn $c-x$ negativ wird, weil dann X über U hinaus liegt, somit ψ und $\sin\psi$ negativ werden. Die Forderung $y' = 0$ besagt daher:

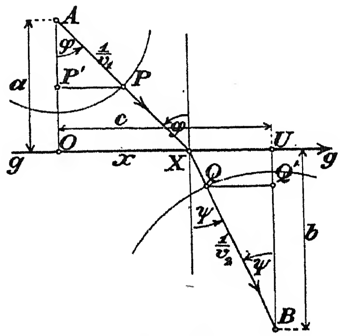


Fig. 329.

$$(1) \qquad \frac{1}{v_1}\sin\varphi = \frac{1}{v_2}\sin\psi.$$

Geht x von $-\infty$ bis $+\infty$, d. h. durchläuft X die ganze Gerade g, so nimmt die linke Seite von (1) beständig zu, nämlich von $-1 : v_1$ bis $+1 : v_1$, dagegen die rechte Seite beständig ab, nämlich von $+1 : v_2$ bis $-1 : v_2$. Also sind beide Seiten nur für eine Stelle X einander gleich. Sie liegt insbesondere zwischen O und U, denn wenn X von O bis U geht, wächst $\sin\varphi$ von Null bis $c : \sqrt{a^2+c^2}$, während $\sin\psi$ von $c : \sqrt{b^2+c^2}$ bis Null abnimmt. Um die Stelle X angenähert zu finden, schließen wir so: Um A wird der Kreis vom Radius $1 : v_1$, um B der vom Radius $1 : v_2$ geschlagen. Wenn nun AX und BX die Kreise in P und Q treffen, sind die Lote PP' und QQ' von P und Q auf a und b gleich $\sin\varphi : v_1$ und $\sin\psi : v_2$. Wegen (1) muß man also X so auf g wählen, daß $PP' = QQ'$ wird, was man leicht durch Versuche erreicht. Der Winkel φ ist gleich dem Winkel, den die Gerade AX mit dem Lot von g durch X bildet, und der Winkel ψ gleich dem Winkel, den die Gerade BX mit diesem Lot bildet, wobei die Winkel in den in der Figur angedeuteten Sinnen zu messen sind. Nach (1) ist

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Da $v_1 : v_2$ eine Konstante ist, kommen wir somit zu demselben Gesetze wie bei der Brechung des Lichtes an der Grenze g von zwei optisch homogenen, aber verschieden dichten Mitteln, nämlich zu dem Snelliusschen Brechungsgesetze, wonach das Verhältnis aus dem Sinus des Einfallwinkels φ und dem Sinus des Austrittwinkels ψ konstant, gleich n ist:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = n.$$

Die Konstante n, der sogenannte Brechungsexponent, bedeutet in Fig. 329 das Verhältnis $v_1 : v_2$ der beiden Geschwindigkeiten.

8. Beispiel: Die Ablenkung des Lichtstrahls beim Durchgang durch ein optisches Prisma beruht auf zweimaliger Brechung, einmal an der Eintrittstelle U, dann an der Austrittstelle V, siehe Fig. 330, oberer Teil. Wenn der Brechungsexponent n des Prismas gegeben ist, nämlich als eine Konstante, die größer als Eins ist, weil das Prisma optisch dichter als die umgebende Luft ist, kann man den Weg des Lichtes in folgender Weise ermitteln: Von einem Punkt O aus zieht man Strahlen l_1 und l_2 parallel zu den Loten der linken und rechten Prismafläche. Ihre Pfeile sind so eingezeichnet, wie es dem Lichtweg entspricht, d. h. der von l_1 im Sinn nach dem Innern des Prismas, der von l_2 im Sinn nach dem Äußeren. Ferner werde nun von O beliebig ein Strahl t gezogen und auf ihm ein Punkt P angenommen. Die Lote von P auf l_1 und l_2, nämlich PQ_1 und PQ_2, werden dann von ihren Fußpunkten Q_1 und Q_2 aus auf das n-fache bis R_1 und R_2 verlängert. Es sei also $Q_1 R_1 = n\, Q_1 P$ und $Q_2 R_2 = n\, Q_2 P$. (In Fig. 330 wurde $n = 1{,}5$ gewählt.) Die Parallele zu l_1 durch R_1 treffe den Kreis um O durch P in S_1, und die Parallele zu l_2 durch R_2 treffe ihn in S_2. Schließlich seien die Strahlen $O S_1$ und $O S_2$ mit s_1 und s_2 bezeichnet. Dann ist offenbar

$$(2) \qquad \sin l_1 s_1 : \sin l_1 t = n : 1 , \qquad \sin t\, l_2 : \sin s_2\, l_2 = 1 : n.$$

Daraus folgt: In der oberen Figur 330 geht ein richtiger Lichtweg hervor, wenn man den einfallenden Strahl parallel zu s_1, den gebrochenen inneren Strahl parallel zu t und den abermals gebrochenen austretenden Strahl parallel zu s_2 zieht. Nebenbei bemerkt: In der unteren Figur 330 darf t nicht ganz beliebig, sondern nur innerhalb gewisser Schranken angenommen werden, die man feststellt, wenn man überlegt, welche Richtungen für $U V$ im Innern des Prismas überhaupt nur in Betracht kommen können. Die durch das Prisma bewirkte Ablenkung des Lichtes wird durch den Winkel y bei W gemessen, den die Strahlen s_1 und s_2 miteinander bilden. Er heißt der Ablenkungswinkel. Er tritt auch in der Hilfsfigur auf.

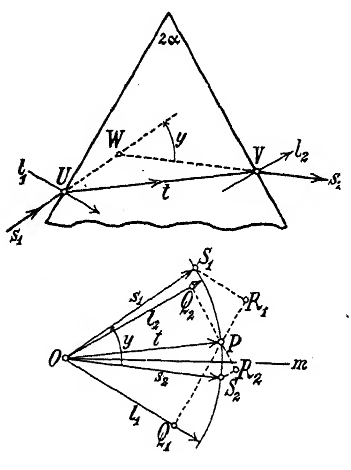


Fig. 330.

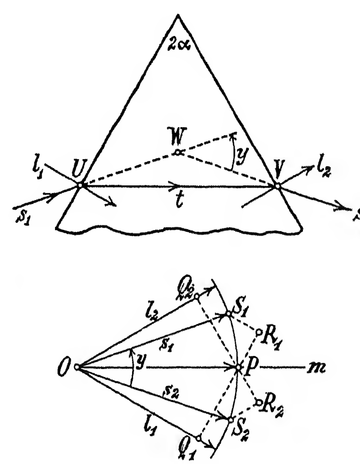


Fig. 331.

Nun soll die Frage beantwortet werden: Wann ist der Ablenkungswinkel am kleinsten? Von vornherein sieht man: Wird t als die Mittellinie m von

$\sphericalangle\, l_1 l_2$ gewählt, siehe Fig. 331, so liegen s_1 und s_2 zu m symmetrisch. Nach S. 468 ist daher für diesen Fall ein Maximum oder Minimum der Ablenkung zu erwarten. Die folgende Rechnung wird dies bestätigen, indem sie zugleich zeigen wird, daß es sich um das Minimum handelt.

In Fig. 330 sei der positive Drehsinn der von l_1 nach l_2. Wir setzen $\sphericalangle\, l_1 l_2 = 2\alpha$. Offenbar bedeutet 2α den **Prismenwinkel**, d. h. den der beiden Prismenflächen. Nun ist der Ablenkungswinkel y nach der unteren Fig. 330 dieser:

$$y = \sphericalangle\, s_2 s_1 = \sphericalangle\, m s_1 - \sphericalangle\, m s_2 .$$

Wegen $\sphericalangle\, m s_1 = \sphericalangle\, l_1 s_1 - \alpha$ und $\sphericalangle\, m s_2 = \alpha - \sphericalangle\, s_2 l_2$ kommt:

(3)
$$y = \sphericalangle\, l_1 s_1 + \sphericalangle\, s_2 l_2 - 2\alpha .$$

Mit x sei $\sphericalangle\, mt$ bezeichnet. Dann ist $\sphericalangle\, l_1 t = \alpha + x$, $\sphericalangle\, t\, l_2 = \alpha - x$, daher nach (2):

$$\sin l_1 s_1 = n \sin(\alpha + x), \qquad \sin s_2 l_2 = n \sin(\alpha - x)$$

oder

$$\sphericalangle\, l_1 s_1 = \operatorname{arc\,sin}\,[n \sin(\alpha + x)], \qquad \sphericalangle\, s_2 l_2 = \operatorname{arc\,sin}\,[n \sin(\alpha - x)] .$$

Einsetzen in (3) liefert:

(4)
$$y = \operatorname{arc\,sin}\,[n \sin(\alpha + x)] + \operatorname{arc\,sin}\,[n \sin(\alpha - x)] - 2\alpha .$$

Hierin sind α und n gegebene Konstanten. Die Frage ist also, für welche Werte des Winkels $x = \sphericalangle\, mt$ der durch (4) als Funktion von x ausgedrückte Ablenkungswinkel y ein Minimum wird. Der Eintrittwinkel, d. h. $\sphericalangle\, l_1 s_1$, ist zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ gelegen, ebenso der Austrittwinkel, d. h. $\sphericalangle\, s_2 l_2$. Mithin sind die Arkussinus in (4) auf das Gebiet von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ beschränkt. Differentiation ergibt:

(5)
$$y' = \frac{n \cos(\alpha + x)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2(\alpha + x)}} - \frac{n \cos(\alpha - x)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2(\alpha - x)}},$$

und nach Satz 26, S. 445 sind hier die Quadratwurzeln positiv. Die Bedingung $y' = 0$ für die Möglichkeit eines Maximums oder Minimums besagt, daß beide Brüche einander gleich werden müssen, also auch ihre Quadrate. Wenn man die Nenner fortschafft, kommt

$$\cos^2(\alpha + x)\,[1 - n^2 \sin^2(\alpha - x)] = \cos^2(\alpha - x)\,[1 - n^2 \sin^2(\alpha + x)].$$

Führt man hierin nach Satz 19, S. 413, die Kosinus der doppelten Winkel $2\alpha + 2x$ und $2\alpha - 2x$ ein, indem man in diesem Satze $w = 2\alpha + 2x$ oder $w = 2\alpha - 2x$ annimmt, so kommt

$$[1 + \cos(2\alpha + 2x)]\,[1 - \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2}\cos(2\alpha - 2x)]$$
$$= [1 + \cos(2\alpha - 2x)]\,[1 - \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2}\cos(2\alpha + 2x)]$$

oder nach dem Ausmultiplizieren und Zusammenfassen einfach

$$\cos(2\alpha + 2x) = \cos(2\alpha - 2x),$$

d. h. nach Satz 16, S. 411, noch einfacher

$$\sin 2\alpha \sin 2x = 0 .$$

Da $\sin 2\alpha \neq 0$ ist, weil sonst der Prismenwinkel 2α Null oder zwei rechte Winkel

beträge, bleibt $\sin 2x = 0$; also muß $x = 0$ sein. Dies stimmt mit dem oben Gesagten überein: Der Strahl t muß mit der Mittellinie m in Fig. 330 unten zusammenfallen.

Abermalige Differentiation von (5) gibt:

$$y'' = \frac{-n \sin(\alpha + x)[1 - n^2 \sin^2(\alpha + x)] + n^3 \cos^2(\alpha + x) \sin(\alpha + x)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2(\alpha + x)}^3}$$
$$- \frac{n \sin(\alpha - x)[1 - n^2 \sin^2(\alpha - x)] - n^3 \cos^3(\alpha - x) \sin(\alpha - x)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2(\alpha - x)}^3}.$$

Insbesondere ist y'' für $x = 0$ zu untersuchen. Dann aber ergibt sich hieraus wegen $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ der Wert:

$$y'' = \frac{2n(n^2 - 1)\sin\alpha}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \alpha}^3}.$$

Da die Quadratwurzel wie gesagt positiv ist und auch $\sin \alpha$ als Sinus des halben Prismenwinkels positiv sowie $n > 1$ ist, hat y'' einen positiven Wert, d. h. für $x = 0$ tritt in der Tat das Minimum der Ablenkung im Prisma ein. In diesem Fall, siehe Fig. 331, ist nach (4) die Ablenkung $y = 2 \operatorname{arc} \sin(n \sin \alpha) - 2\alpha$, also $n \sin \alpha = \sin(\alpha + \frac{1}{2} y)$, so daß der Brechungsexponent

$$n = \frac{\sin(\alpha + \frac{1}{2} y)}{\sin \alpha}$$

ist. Weil man das Prisma durch Probieren leicht auf das Minimum der Ablenkung einstellen kann, wird diese Formel zur Ermittelung der Größe seines Brechungsexponenten n benutzt, indem man den Prismenwinkel 2α und die Ablenkung y mißt.

An die Betrachtungen dieses und des vorigen Paragraphen schließen wir noch einige Bemerkungen an:

Wir sahen auf S. 459, daß die Bildkurve c einer Funktion $y = f(x)$ an einer Stelle, wo $y'' = 0$ ist, im allgemeinen einen Wendepunkt hat, nämlich dann, wenn y'' beim Durchschreiten dieser Stelle wirklich das Zeichen wechselt, während sonst kein wirklicher Wendepunkt vorzuliegen braucht, vgl. das 5. Beispiel mit Fig. 324. Aber auch sonst hat eine Stelle, wo der zweite Differentialquotient y'' gleich Null ist, eine besondere geometrische Eigenschaft. Denn wenn $y'' = 0$ für $x = x_0$ ist, bedeutet dies: Die erste Differentialkurve c' hat für $x = x_0$ die Steigung Null, also eine zur x-Achse parallele Tangente, d. h. die Punkte von c', die zu $x = x_0$ und zu einem unendlich benachbarten $x = x_0 + dx$ gehören, liegen auf einer Parallelen zur x-Achse, so daß sie gleich große Ordinaten haben. Da nun die Ordinaten von c' die Steigungen von c angegeben, besagt dies: Die unendlich benachbarten Stellen P_0 und P_1 der Kurve c, die zu $x = x_0$ und zu $x = x_0 + dx$ gehören, haben dieselbe Steigung, also parallele Tangenten. Die Tangente von P_0 ist aber die Gerade durch P_0 und den unendlich nahe auf P_0 folgenden Punkt P_1, die Tangente von P_1 die Gerade durch P_1 und einen auf P_1

unendlich nahe folgenden Punkt P_2 der Kurve. Da beide Tangenten parallel sind und durch P_1 gehen, fallen sie zusammen. Daher sind diejerigen Stellen der Bildkurve einer Funktion $y = f(x)$, für die der zweite Differentialquotient gleich Null ist, als Stellen aufzufassen, an denen drei unendlich nahe aufeinanderfolgende Punkte der Kurve auf einer Geraden liegen.

Handelt es sich nur um ziemlich benachbarte Punkte, so bleibt diese Eigentümlichkeit noch daran erkennbar, daß sich die Tangente der Kurve besonders innig anschmiegt. Siehe z. B. die Wendetangente in Fig. 96, S. 143. Auch wenn für $y'' = 0$ kein Wendepunkt vorhanden ist, zeigt sich dies Anschmiegen, siehe Fig, 324, S. 466, im Anfangspunkte.

Man sagt, daß an einer Stelle, wo y'' gleich Null ist, die Tangente die Kurve in höherer und zwar zweiter Ordnung berühre oder auch, daß sie dort die Kurve oskuliere (vom lat. osculum, der Kuß, — wie man sieht, eine poetische Bezeichnung).

Die Betrachtung läßt sich verallgemeinern: Ist für eine Kurvenstelle außer y'' auch y''' gleich Null, so schließt man ebenso, daß dort vier unendlich nahe aufeinanderfolgende Kurvenpunkte auf einer Geraden liegen, so daß die Tangenten von drei unendlich nahe aufeinanderfolgenden Punkten zusammenfallen. Man spricht dann von einer Berührung in dritter Ordnung. Statt Berührung in zweiter Ordnung sagt man auch dreipunktige Berührung, statt Berührung in dritter Ordnung vierpunktige Berührung. In der Fig. 324, S. 466, berührt die x-Achse die Kurve im Anfangspunkte vierpunktig, da hier $y'' = 12\,x^2$ und $y''' = 24\,x$ beide gleich Null sind, aber $y^{\text{IV}} = 24 \neq 0$ ist. (Daß hier auch $y' = 0$ wird, ist für die Ordnung der Berührung unwesentlich, denn dies sagt nur aus, daß die Tangente wagerecht verläuft.)

Für das Zeichnen von Kurven sind Stellen, an denen $y'' = 0$ ist, von besonderem Nutzen, da man hier ohne beträchtlichen Fehler ein verhältnismäßig langes Kurvenstück mit dem Lineal geradlinig ziehen darf. Beim Zeichnen von Wendepunkten wird jedoch oft gesündigt. Wenn P in Fig. 332 ein Wendepunkt mit der Tangente t sein soll, wird sonderbarerweise (— man findet dies leider namentlich in Büchern, die von Mathematikern geschrieben sind, die es wissen sollten, —) sehr oft die Kurve wie in Fig. 332 a gezeichnet, während die richtige Zeichnung die in Fig. 332 b ist. In der Figur a hat ja P gar nicht t als Tangente. —

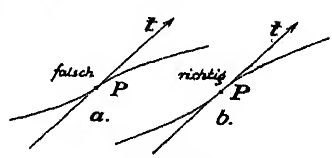


Fig. 332.

Nach S. 458 kann man aus dem Verlaufe der ersten Differentialkurve einer Kurve rückwärts Schlüsse in bezug auf den Verlauf dieser Kurve selbst ziehen. Handelt es sich insbesondere um die Bildkurve c einer ganzen Funktion n^{ten} Grades (S. 98):

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

so ist ihre erste Differentialkurve das Bild einer ganzen Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, also einfacher. Die Kurve c ist nun wichtig als Fehlerkurve (vgl. S. 115) bei der Ermittelung der Lösungen der Gleichung n-ten Grades

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0.$$

Ist z. B. $n = 3$, so handelt es sich um eine Gleichung dritten Grades. Dann ist die erste Differentialkurve der zugehörigen Fehlerkurve das Bild einer ganzen Funktion zweiten Grades, d. h. nach S. 95 eine Parabel, deren Achse zur y-Achse parallel liegt. Deshalb kann man mit Hilfe dieser Parabel leicht Schlüsse über den Verlauf der Fehlerkurve ziehen und Aussagen über die Lösungen der Gleichung dritten Grades machen. Dies soll im folgenden geschehen.

9. Beispiel: Eine Gleichung dritten Grades oder kubische Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ kann man dadurch, daß man eine neue Unbekannte u einführt, indem man $x = u - \frac{1}{3}a$ setzt, in eine kubische Gleichung für u verwandeln, in der u^2 den Koeffizienten Null hat. Wir dürfen demnach annehmen, es liege von vornherein eine Gleichung dritten Grades von der Form

(6) $$x^3 + px + q = 0$$

vor, worin x^2 nicht vorkommt und p und q gegebene Konstanten bedeuten. Fassen wir x als beliebige Veränderliche, nicht als Unbekannte, auf, so ist die linke Seite nicht gleich Null, sondern eine Funktion y von x:

(7) $$y = x^3 + px + q.$$

Ihre Bildkurve c schneidet die x-Achse an denjenigen Stellen, deren Abszissen die Lösungen der Gleichung (6) sind. Die erste Differentialkurve c', die Bildkurve der Funktion

$$y' = 3x^2 + p$$

ist wie gesagt eine Parabel. Nach S. 95 fällt die Parabelachse mit der Ordinatenachse zusammen, und die Parabel hat die Form eines Tales, da der Koeffizient von x^2 positiv ist. Ihr tiefster Punkt, d. h. ihr Scheitel ist der Punkt der Ordinatenachse mit der Ordinate p. Somit schneidet die Parabel c' die x-Achse nur dann, wenn p negativ ist. Die Abszissen x_1 und x_2 der Schnittpunkte sind die beiden Quadratwurzeln aus $-\frac{1}{3}p$; insbesondere sei x_1 die negative und x_2 die positive Quadratwurzel. Wenn $p = 0$ ist, berührt die Parabel c' die x-Achse im Anfangspunkte. Ist p positiv so hat c' nur positive Ordinaten. Wenn also $p > 0$ ist, steigt die Kurve c beständig, siehe Fig. 333; ist $p = 0$, so steigt c auch beständig, hat aber auf der y-Achse einen Terrassenpunkt, siehe Fig. 334; ist $p < 0$, so steigt c von

$x = -\infty$ bis $x = x_1$, fällt von $x = x_1$ bis $x = x_2$ und steigt wieder von $x = x_2$ bis $x = +\infty$, siehe Fig. 335. In allen Fällen liegt auf der y-Achse ein Wendepunkt von c. Im dritten Fall hat c für $x = x_1$ ein Maximum y_1 und für $x = x_2$ ein Minimum y_2, nämlich:

$$y_1 = -\tfrac{2}{3}p\sqrt{-\tfrac{1}{3}p} + q, \qquad y_2 = \tfrac{2}{3}p\sqrt{-\tfrac{1}{3}p} + q\,.$$

In allen drei Figuren hat man sich die x-Achse wagerecht in irgendwelcher Höhe vorzustellen, positiv nach rechts. Je nach der Höhe, in der die x-Achse liegt, er-

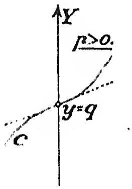


Fig. 333.

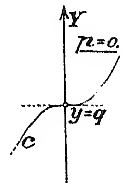


Fig. 334.

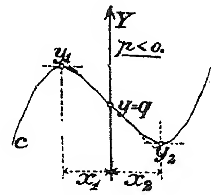


Fig. 335.

geben sich nun verschiedene Anzahlen von Schnittpunkten von c mit der x-Achse, d. h. verschiedene Anzahlen von reellen Lösungen x der kubischen Gleichung (6):

Ist $p > 0$, Fig. 333, so hat die kubische Gleichung stets und nur eine reelle Lösung, die größer als Null, gleich Null oder kleiner als Null ausfällt, je nachdem q kleiner als Null, gleich Null oder größer als Null ist. Im Fall $p = 0$, Fig. 334, gilt im allgemeinen dasselbe. Im Fall $p = q = 0$ aber ist die x-Achse Tangente des Terrassenpunktes; also berührt sie dort die Kurve dreipunktig, d. h. dann hat die kubische Gleichung (6) drei zusammenfallende Lösungen $x = 0$. In der Tat vereinfacht sie sich dann zu $x^3 = 0$ oder $x \cdot x \cdot x = 0$. Ist endlich $p < 0$, Fig. 335, so gibt es nur eine reelle Lösung, wenn $y_1 < 0$ oder $y_2 > 0$ ist, und zwar für $y_1 < 0$ eine, die größer als x_2 ist, für $y_2 > 0$ eine, die kleiner als x_1 ist. Wenn dagegen $y_1 > 0$ und $y_2 < 0$ ist, gibt es drei reelle verschiedene Lösungen; eine ist kleiner als x_1, eine liegt zwischen x_1 und x_2, eine ist größer als x_2. Ist schließlich $y_1 = 0$ oder $y_2 = 0$, so fallen zwei der drei Lösungen mit x_1 oder x_2 zusammen. Dies Letzte kann so bestätigt werden: Wenn wir die negative oder positive Quadratwurzel aus $-\frac{1}{3}p$ mit r bezeichnen, ist x_1 oder x_2 gleich r und die zu x_1 oder x_2 gehörige Ordinate y_1 oder y_2 nach (7) gleich $-2r^3 + q$. Also handelt es sich um den Fall, wo $q = 2r^3$ ist. Dann wird aus (6):

$$x^3 - 3r^2x + 2r^3 = 0\,.$$

Die linke Seite ist ohne Rest mit $x - r$ teilbar, d. h. $x = r$ ist eine Lösung (vgl. Satz 6, S. 103). Übrig bleibt:

$$x^2 + rx - 2r^2 = 0\,.$$

Wieder ist die linke Seite ohne Rest mit $x - r$ teilbar, d. h. $x = r$ ist ein zweites Mal eine Lösung. Schließlich bleibt:

$$x + 2r = 0\,,$$

d. h. $x = -2r$ ist die dritte Lösung. — Man möge auf diesem Weg feststellen, wie viele reelle Lösungen die folgenden kubischen Gleichungen haben:

$$x^3 + 2x - 3 = 0, \quad x^3 + 2x + 3 = 0, \quad x^3 - 2x + 3 = 0, \quad x^3 - 2x - 3 = 0.$$

Ebenso möge man die Gleichung untersuchen:

$$x^3 - 3x^2 + 2x - 4 = 0,$$

die man zuerst durch Einsetzen von $x = u + 1$ umzuwandeln hat, um das quadratische Glied zu entfernen. Man möge auch feststellen, in welchen Intervallen die Lösungen liegen.

Übrigens kann man die Lösungen der kubischen Gleichung (6) durch Quadrat- und Kubikwurzeln ausdrücken. Dies soll in aller Kürze abgeleitet werden: Die gesuchte Lösung x denken wir uns als eine Summe $u + v$ von zwei Zahlen u und v. Dann gibt (6):

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u + v) + q = 0,$$

wofür wir schreiben können:

$$u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u + v) = 0.$$

Diese Bedingung wird nun erfüllt, wenn einzeln:

(8) $$u^3 + v^3 = -q \quad \text{und} \quad uv = -\tfrac{1}{3}p \quad \text{oder} \quad u^3v^3 = -\tfrac{1}{27}p^3$$

ist. Lassen sich u und v so bestimmen, daß die Forderungen (8) erfüllt werden, so ist $x = u + v$ sicher eine Lösung von (6). Wir bilden nun die Gleichung:

$$(\mathfrak{x} - u^3)(\mathfrak{x} - v^3) = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für $\mathfrak{x}$ mit den Lösungen $\mathfrak{x} = u^3$ und $\mathfrak{x} = v^3$. Da sie so geschrieben werden kann:

$$\mathfrak{x}^2 - (u^3 + v^3)\mathfrak{x} + u^3v^3 = 0,$$

hat sie nach (8) die Form:

$$\mathfrak{x}^2 + q\mathfrak{x} - \tfrac{1}{27}p^3 = 0,$$

und nach S. 115 sind ihre Lösungen:

$$\mathfrak{x} = \begin{Bmatrix} u^3 \\ v^3 \end{Bmatrix} = -\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}.$$

Also ist $u + v$ die Größe

(9) $$\alpha = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}},$$

und damit ist eine Lösung α der kubischen Gleichung (6) ermittelt. Die beiden anderen sind nun auch leicht gefunden. Denn es ist ja $\alpha^3 + p\alpha + q = 0$. Also dürfen wir von (6) links $\alpha^3 + p\alpha + q$ abziehen; dann kommt:

$$x^3 - \alpha^3 + p(x - \alpha) = 0.$$

Die linke Seite ist mit $x - \alpha$ teilbar, was mit Satz 6, S. 103, im Einklange steht. Es bleibt:

(10) $$x^2 + \alpha x + \alpha^2 + p = 0,$$

und dies ist eine bloß quadratische Gleichung für die beiden anderen Lösungen.

§ 3. Krümmung, Evolute und Evolventen.

Durchläuft ein Punkt ein Kurvenstück P_0P_1, siehe Fig. 336, so wird die Richtung seiner Bahn durch die jeweilige Tangente t angegeben.

Ziehen wir durch einen Punkt O die Parallelen $\mathfrak{t}$ zu den Tangenten, so wird von ihnen ein Winkel α überstrichen, dessen Schenkel $\mathfrak{t}_0$ und $\mathfrak{t}_1$ parallel zu den Tangenten t_0 von P_0 und t_1 von P_1 sind. Diesen Winkel α messen wir positiv im Sinn der Drehung von der positiven x-Achse zur positiven y-Achse. Er gibt die Änderung der Wegrichtung von P_0 bis P_1 an. Die Bogenlänge s von P_0 bis P_1 ist die Größe des zurückgelegten Weges, die wir wie auf S. 361 positiv messen, wenn die Abszisse von P_0 bis P_1 zunimmt. Der Weg $P_0 P_1$ ist um so mehr gekrümmt, je größer der Winkel α und je kleiner der Weg s ist. Der Bruch $\alpha : s$ heißt deshalb die durchschnittliche oder mittlere Krümmung des Weges $P_0 P_1$. Ein Teil des Weges hat nicht notwendig dieselbe Krümmung wie der ganze Weg. Wenn jedoch das Wegstück von P_0 bis P_1 unendlich kurz wird, heißt jener Bruch $\alpha : s$ schlechtweg die Krümmung k an der betrachteten Stelle. Aber es fragt sich, nach welchem Wert $\alpha : s$ für $\lim s = 0$ strebt.

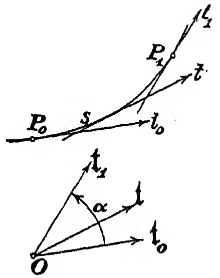


Fig. 336.

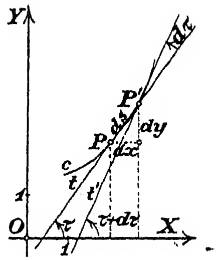


Fig. 337.

Die Kurve c sei die Bildkurve einer Funktion $y = f(x)$ und P der zur Abszisse x gehörige Bildpunkt $(x; y)$. Ferner sei die x-Einheit gleich der y-Einheit. Nun werde von P aus ein unendlich kurzer Weg PP' auf c zurückgelegt, den man ein Bogendifferential ds nennen kann, aber meistens als ein Bogenelement ds bezeichnet. Dabei möge die Abszisse x um das Differential dx wachsen, siehe Fig. 337. Der Punkt P' hat die Koordinaten $x + dx$ und $y + dy$. Der Weg PP' oder ds wird wie auf S. 361 als Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten dx und dy berechnet, so daß sich wie dort ergibt:

$$(1) \qquad ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Damals hatten wir $dy : dx$ statt y' geschrieben. Die Wurzel ist positiv. Ferner sei τ der Tangentenwinkel von P. Nach Satz 1, S. 449, ist

$$(2) \qquad \tau = \operatorname{arc\,tg} y',$$

wobei der zwischen $+\frac{1}{2}\pi$ und $-\frac{1}{2}\pi$ gelegene Winkel zu nehmen ist. Die Tangente t' von P' bildet mit der x-Achse einen von τ unendlich wenig abweichenden Winkel $\tau + d\tau$. Das Differential $d\tau$ ist leicht zu berechnen, denn nach (2) ist τ eine Funktion von y', während $y' = f'(x)$ eine Funktion von x ist. Wir wenden daher die Kettenregel an, deren Schema wir hier, da es sich um eine neue Anwendungsart der Kettenregel handelt, ausführlich angeben wollen[1]:

$$\begin{array}{l|l} \tau = \operatorname{arc\,tg} y' & \dfrac{d\tau}{dy'} = \dfrac{1}{1+y'^2} \\ y' = f'(x) & \dfrac{dy'}{dx} = f''(x) = y'' \\ \hline & \dfrac{d\tau}{dx} = \dfrac{y''}{1+y'^2}. \end{array}$$

Also wird:

$$(3) \qquad d\tau = \frac{y''}{1+y'^2}\,dx.$$

In Fig. 337 ist $d\tau$ die Änderung der Wegrichtung längs des Wegelements ds von P bis P'. Die Krümmung k der Kurve an der Stelle P ist daher gleich $d\tau : ds$. Hierfür ergibt sich aus (1) und (3):

$$(4) \qquad k = \frac{d\tau}{ds} = \frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}^3},$$

wobei die Wurzel positiv ist. Da y' und y'' die Funktionen $f'(x)$ und $f''(x)$ sind, ist auch die Krümmung k eine Funktion von x. Der unendlich kleine Winkel $d\tau$, um den die Richtung der Tangente des Endpunktes P' von der Richtung der Tangente des Anfangspunktes P des Bogenelements ds abweicht, heißt der zum Bogenelement ds gehörige Kontingenzwinkel (vom lateinischen contingere, unmittelbar angrenzen). Die Krümmung der Kurve an einer Stelle P ist das Verhältnis des Kontingenzwinkels $d\tau$ zum zugehörigen Bogenelement ds der Kurve. Die Formel (4) besagt:

Satz 10: Die Krümmung der Bildkurve einer Funktion $y = f(x)$ an der zur Abszisse x gehörigen Stelle ist

$$k = \frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}^3}$$

mit positiver Quadratwurzel. Vorausgesetzt wird dabei, daß die x-Einheit gleich der y-Einheit gewählt sei.

Die Krümmung k ist positiv oder negativ, je nachdem y'' das Plus-

---

[1] Das Neue liegt darin, daß wir y' als Hilfsveränderliche benutzen.

oder Minuszeichen hat, d. h. nach Satz 5, S. 459, je nachdem die Kurve nach oben konkav oder konvex ist, falls das Achsenkreuz die gewöhnliche Lage hat. Die Kurve c hat also an einer Stelle P positive oder negative Krümmung, je nachdem man beim Fortschreiten längs der Kurve im Sinn wachsender Abszissen eine Wendung nach links oder nach rechts macht. Immer wird dabei vorausgesetzt, daß die positive y-Achse aus der positiven x-Achse durch eine Drehung um 90^0 nach links herum hervorgehe. Andernfalls gilt das Umgekehrte.

1. Beispiel: Wenn P ein Wendepunkt ist, siehe Fig. 332, S. 473, ist y'' gleich Null für die zugehörige Abszisse x, mithin auch die Krümmung k.

2. Beispiel: Welche Kurven haben überall die Krümmung Null? Natürlich sind es die Geraden. Rechnerisch ergibt sich dies so: Soll k überall gleich Null sein, so muß der Zähler y'' von k überall gleich Null sein. Er ist aber der Differentialquotient von y'. Mithin muß y' konstant, etwa gleich c, sein. Daraus folgt, daß y selbst das Integral $\int c\,d\,x$ ist, also $y = c\,x +$ konst. Dies besagt nach Satz 7, S. 40, daß die Kurve eine Gerade ist.

3. Beispiel: Der Kreis mit dem Mittelpunkte $(a\,;b)$ und Radius r ist nach (2), S. 179, die Bildkurve der zweiwertigen Funktion

$$y = b + \sqrt{r^2 - (x-a)^2}.$$

Differentiation gibt:

$$y' = -\frac{x-a}{\sqrt{r^2-(x-a)^2}}, \qquad y'' = -\frac{r^2}{\sqrt{r^2-(x-a)^2}^3}.$$

Der für y' gefundene Wert lehrt, daß

$$1 + y'^2 = \frac{r^2}{r^2-(x-a)^2}$$

ist. Setzt man diesen Wert und den von y'' in (4) ein, so kommt für k, abgesehen vom Vorzeichen, der Wert $1:r$. Demnach hat jeder Kreis eine konstante Krümmung, die absolut genommen gleich dem reziproken Wert $1:r$ des Radius ist. Wenn wir den Kreis überall im Sinn wachsender Abszissen durchlaufen, krümmt er sich allerdings für Stellen der oberen Hälfte $A\,B\,C$, siehe Fig. 338, nach rechts und für Stellen der unteren Hälfte $A\,D\,C$ nach links, so daß die obere Hälfte die negative Krümmung $-1:r$ und die untere die positive Krümmung $1:r$ hat. Natürlicher ist es, den ganzen Kreis in einerlei Drehsinne zu durchlaufen, wie es Fig. 339 andeutet, wo wir den positiven Sinn gewählt haben. In diesem Fall hat der Kreis überall die positive Krümmung $1:r$.

Wir wollen annehmen, eine Kurve c sei, von einer Stelle P angefangen, in gleich lange unendlich kurze Stücke $P\,P_1$, $P_1\,P_2$, $P_2\,P_3\ldots$ von der Länge $d\,s$ zerlegt worden. Sie werde dann durch die gebrochene Linie $P\,P_1\,P_2\,P_3\ldots$ ersetzt, wie es Fig. 340 andeutet. Die Bewegung längs der Kurve wird auf diese Art in abwechselndes unendlich kurzes geradliniges Fortschreiten und unendlich kleines Drehen zerlegt. Die

geradlinigen Strecken sind alle gleich ds zu setzen; was dagegen die unendlich kleinen Drehwinkel betrifft, so können sie, miteinander verglichen, im allgemeinen verschieden sein. Dies sind die Kontingenzwinkel $d\tau$, $d\tau_1$, $d\tau_2$ . . ., die an den Stellen P, P_1, P_2 . . . zu den gleich-

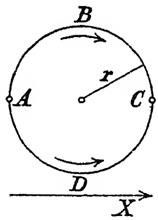


Fig. 338.

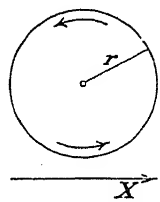


Fig. 339.

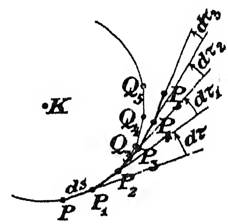


Fig. 340.

großen Bogenelementen ds gehören. Wenn man alle diese Kontingenzwinkel $d\tau$, $d\tau_1$, $d\tau_2$ . . . durch den ersten, also durch $d\tau$, ersetzt, wird die Bewegung eine andere, so daß statt c eine andere Kurve beschrieben wird. Die neue Bahn enthält zwar auch das erste Bogenelement PP_1, und auch jetzt wird in P_1 dieselbe unendlich kleine Wendung wie vorher gemacht, so daß man auch jetzt nach P_2 gelangt, aber von hier an werden sich statt P_3, P_4 . . . andere Punkte Q_3, Q_4 . . . ergeben, da die folgenden unendlich kleinen Drehwinkel nicht $d\tau_1$, $d\tau_2$ . . ., sondern alle gleich $d\tau$ sein sollen. Die neue Bahn ist so beschaffen, daß auf ihr $d\tau : ds$ konstant, also die Krümmung immer dieselbe ist, und zwar gleich derjenigen Krümmung, die die ursprüngliche Bahn in P hat. Offenbar ist $\triangle PP_1P_2 \cong \triangle P_1P_2Q_3 \cong \triangle P_2Q_3Q_4$ . . . Demnach sind die Radien der Kreise, die man diesen Dreiecken umschreiben kann, gleich groß. Da überdies je zwei aufeinanderfolgende Dreiecke eine Seite gemein haben, kommt allen Dreiecken derselbe umschriebene Kreis zu; also liegen P, P_1, P_2, Q_3, Q_4 . . . auf einem Kreis. Deshalb ergibt sich zunächst der nach dem 3. Beispiele zu erwartende

Satz 11: Die Kurven konstanter Krümmung sind die Kreise. Zu ihnen gehören auch die Geraden als Kurven von der Krümmung Null oder als Kreise mit unendlich großen Radien.

Der Kreis durch die Punkte P, P_1, P_2, Q_3, Q_4 . . . hat nun für die ursprüngliche Kurve c eine besondere Bedeutung: Er geht durch die drei unendlich benachbarten Kurvenpunkte P, P_1, P_2 und hat überall diejenige Krümmung, die der Kurve c an der Stelle P zukommt. Er heißt der Krümmungskreis der Kurve an der Stelle P, sein Radius ϱ

der **Krümmungsradius** und sein Mittelpunkt K der **Krümmungsmittelpunkt** der Stelle P. Da ein Kreis durch drei Punkte vollständig bestimmt ist, leuchtet ein, daß der **Krümmungskreis** derjenige Kreis ist, der sich in P am innigsten an die Kurve c anschmiegt, weil er auch durch die zu P unendlich benachbarten Kurvenpunkte P_1 und P_2 geht. Er berührt die Kurve c dreipunktig oder in zweiter Ordnung oder: er oskuliert die Kurve (vgl. S. 473). Deshalb wird er auch **Oskulationskreis** genannt.

Da der Krümmungskreis durch P, P_1 und P_2 geht, hat er sowohl in P die Tangente PP_1 als auch in P_1 die Tangente P_1P_2, d. h.: der Krümmungskreis des Punktes P der Kurve c ist derjenige Kreis, der durch P und einen zu P unendlich benachbarten Punkt P_1 von c geht und in P und P_1 dieselben Tangenten wie die Kurve c hat.

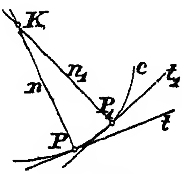


Fig. 341.

Wenn aber ein Kreis in P die Tangente t hat, liegt sein Mittelpunkt K auf der **Normale** n von P, die man in P senkrecht auf die Tangente t zu errichten hat. Daher läßt sich der Mittelpunkt K des Krümmungskreises des Kurvenpunktes P so gewinnen: Man faßt außer P einen zunächst beliebig auf c gewählten Punkt P_1 ins Auge, siehe Fig. 341. In beiden Punkten zieht man die Tangenten t und t_1, dann errichtet man auf ihnen in P und P_1 die Senkrechten n und n_1, also die Normalen der Kurve. Ihr Schnittpunkt K wird, **wenn P_1 auf der Kurve c nach P strebt**, der Krümmungsmittelpunkt K der Stelle P. Zwar kann man den Krümmungsmittelpunkt K auf diese Weise zeichnerisch nicht genau ermitteln, wohl aber **rechnerisch**:

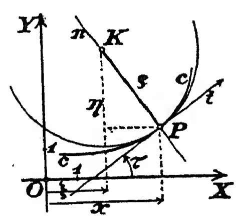


Fig. 342.

Der Punkt P oder $(x; y)$ sei ein Punkt der Bildkurve von $y = f(x)$, und die **Einheiten seien auf beiden Achsen gleich groß angenommen**. Ist K irgendein Punkt auf der Normale n von P, so mögen seine Koordinaten zum Unterschiede von x und y mit ξ und η bezeichnet sein. Siehe Fig. 342. Dann ist $(\eta - y) : (\xi - x)$ die Steigung der Normale von P. Nach S. 449 ist sie gleich $-1 : \operatorname{tg} \tau$ oder $-1 : y'$, weil y' die Steigung der Tangente ist. Daher gilt für **jeden** Punkt $(\xi ; \eta)$ der Normale n des Kurvenpunktes $(x : y)$ die Gleichung

$$\frac{\eta - y}{\xi - x} = -\frac{1}{y'}$$

oder:

$$(5)\qquad (\xi - x) + y'(\eta - y) = 0.$$

Nun aber soll K oder $(\xi;\eta)$ auch auf der Normale des zu P unendlich benachbarten Punktes $(x + dx; y + dy)$ der Kurve liegen. Man kann also eine zweite Bedingung entsprechend (5) aufstellen, indem man statt x, y, y' die Werte

$$x + dx, \qquad y + dy, \qquad y' + dy'$$

einsetzt, denn y und y' ändern sich um dy und dy', wenn x um dx zunimmt. Da $dy : dx = y'$ und $dy' : dx = y''$, also $dy = y'\,dx$ und $dy' = y''\,dx$ ist, ersetze man mithin x, y, y' in (5) durch:

$$x + dx, \qquad y + y'\,dx, \qquad y' + y''\,dx.$$

Dann ergibt sich als Bedingung dafür, daß K oder $(\xi;\eta)$ auch auf der unendlich benachbarten Normale liegt, die Gleichung

$$(\xi - x - dx) + (y' + y''\,dx)(\eta - y - y'\,dx) = 0$$

oder, zum Teil ausmultipliziert:

$$(\xi - x) + y'(\eta - y) - dx + y''(\eta - y)\,dx - y'^2 dx - y'y''\,dx^2 = 0.$$

Die Koordinaten ξ und η müssen demnach außer der Gleichung (5) auch diese Gleichung befriedigen. Infolge von (5) sind nun die beiden ersten Summanden der letzten Gleichung zusammen gleich Null. Vom Rest läßt sich der Faktor dx absondern. Dann bleibt übrig:

$$-1 + y''(\eta - y) - y'^2 - y'y''\,dx = 0.$$

Hieraus berechnet man:

$$\eta - y = \frac{1 + y'^2}{y''} + y'\,dx.$$

Da dx nach Null strebt, fällt der letzte Summand fort (nach Satz 10, S. 65). Mithin kommt:

$$\eta - y = \frac{1 + y'^2}{y''} \qquad \text{oder} \qquad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Setzt man den Wert von $\eta - y$ in (5) ein, so findet man außerdem:

$$\xi - x = -y'\,\frac{1 + y'^2}{y''} \qquad \text{oder} \qquad \xi = x - y'\,\frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck in Fig. 342 ergibt sich schließlich für das Quadrat des Krümmungsradius ϱ:

$$\varrho^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2$$

der Wert:

$$\varrho^2 = \frac{(1 + y'^2)^3}{y''^2}.$$

Satz 12: Der Krümmungsmittelpunkt des Punktes $(x; y)$ der Bildkurve einer Funktion $y = f(x)$ hat die Koordinaten:

$$\xi = x - y' \frac{1 + y'^2}{y''}, \qquad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Der Krümmungsradius ist:

$$\varrho = \frac{\sqrt{1 + y'^2}^3}{y''}.$$

Vorausgesetzt wird dabei, daß die x-Einheit gleich der y-Einheit gewählt sei.

Wenn man im Ausdruck für ϱ die Quadratwurzel positiv annimmt, ist $\varrho \gtrless 0$, je nachdem $y'' \gtrless 0$ ist, d. h. nach S. 479, je nachdem die Kurve an der betrachteten Stelle positive oder negative Krümmung hat. Es empfiehlt sich, in dieser Weise dem Krümmungsradius ϱ ein bestimmtes Vorzeichen zu geben, weil dann infolge von Satz 10 der Satz gilt:

Satz 13: Die Krümmung der Bildkurve einer Funktion ist gleich dem reziproken Werte des Krümmungsradius.

Wir fassen nun ein Stück einer Kurve c ins Auge, längs dessen die Krümmung k überall zunimmt. Ist P ein Punkt dieses Stückes, siehe Fig. 343, so hat der Krümmungskreis von P vor und nach der Stelle P dieselbe Krümmung, die der Kurve c in P zukommt. Aber c hat vor P eine kleinere, nach P eine größere Krümmung. Also verläuft die Kurve c vor P außerhalb, nach P innerhalb des Krümmungskreises. Wenn dagegen die Krümmung der Kurve c beständig abnimmt, gilt das Umgekehrte. Im allgemeinen also wird der Krümmungskreis der Stelle P zwar die Kurve c in P aufs innigste berühren, sie aber dort durchsetzen. Dieselbe Erscheinung haben wir schon bei der Wendetangente (S. 459) festgestellt. Wir merken noch an: Für einen Wendepunkt ist die Krümmung k nach dem ersten Beispiele gleich Null, also der Krümmungsradius $\varrho = 1 : k$ unendlich groß. Hier artet der Krümmungskreis in einen Kreis mit unendlich großem Radius, d. h. in eine Gerade aus, nämlich in die Wendetangente.

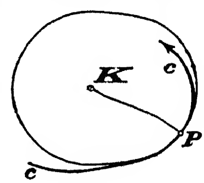


Fig. 343.

Die soeben gemachte Schlußfolgerung über das Durchsetzen der

Kurve durch ihren Krümmungskreis gilt nicht mehr an solchen Stellen, wo die Krümmung der Kurve ein Maximum oder Minimum erreicht. Nach Satz 8, S. 106, ist die erste Bedingung für das Maximum oder Minimum von k diese:

$$\frac{dk}{dx} = 0 .$$

Wir müssen also den Wert (4) von k, nämlich:

$$k = \frac{y''}{\sqrt{1 + y'^2}^3}$$

differentiieren. Zunächst ist k ein Bruch $u : v$, dessen Zähler $u = y''$ den Differentialquotienten $u' = y'''$ hat. Der Differentialquotient des Nenners v ergibt sich nach der Kettenregel:

$$\begin{array}{r|l}
v = z^{\frac{3}{2}} & \dfrac{dv}{dz} = \frac{3}{2} z^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{1 + y'^2} \\
z = 1 + y'^2 & \dfrac{dz}{dy'} = 2y' \\
y' = f'(x) & \dfrac{dy'}{dx} = f''(x) = y''
\end{array}$$

$$v' = \frac{dv}{dx} = 3\sqrt{1 + y'^2} \cdot y' y'' .$$

Wenn wir jetzt auf $k = u : v$ die Bruchregel anwenden, ergibt sich der Differentialquotient:

$$\frac{dk}{dx} = \frac{y'''(1 + y'^2) - 3y'y''^2}{\sqrt{1 + y'^2}^5} .$$

Die erste Bedingung für ein Maximum oder Minimum von k ist also:

(6) $$y'''(1 + y'^2) - 3y'y''^2 = 0 .$$

Die linke Seite ist eine Funktion von x. Demnach liegt eine Gleichung zur Bestimmung der Unbekannten x vor. Haben wir einen Wert von x gefunden, der ihr genügt, so wird allerdings für ihn nicht unbedingt ein Maximum oder Minimum der Krümmung eintreten. Ist aber eines vorhanden, so wird der Krümmungskreis in der Umgebung der betrachteten Stelle entweder von der Kurve vorher und nachher umfaßt oder selbst die Kurve vorher und nachher umfassen. Jedoch auch dann, wenn dort kein Maximum oder Minimum eintritt, hat die Kurve an dieser Stelle etwas Besonderes: Nach S. 466 kann man sagen, daß der Krümmungsradius von P gerade gleich dem an einer unendlich benachbarten Stelle P_1 ist. Da nun der Krümmungskreis von P durch P_1 und P_2 geht, wenn wir wieder die Fig. 340 auf S. 480 benutzen, und der Krümmungskreis von P_1 durch P_2 und P_3

geht, haben beide gleich große Kreise die Punkte P_1 und P_2 gemein, d. h. beide Kreise fallen zusammen. Der Krümmungskreis von P geht also jetzt nicht nur durch die beiden unendlich benachbarten Punkte P_1 und P_2, sondern auch durch einen dritten unendlich nahen Punkt P_3 der Kurve. An einer derartigen Stelle berührt also der Krümmungskreis die Kurve vierpunktig (vgl. S. 473) oder in dritter Ordnung, d. h. er schmiegt sich dort noch viel inniger an die Kurve an, als es sonst schon überhaupt die Krümmungskreise tun.

Man nennt alle Stellen, an denen der Differentialquotient $dk : dx$ der Krümmung gleich Null ist, Scheitel der Kurve. Insbesondere heißen sie eigentliche Scheitel, wenn dort wirklich ein Maximum oder Minimum der Krümmung eintritt, wie es ja meistens der Fall sein wird. Somit gilt der

Satz 14: Die Abszissen der Scheitel der Bildkurve einer Funktion $y = f(x)$ sind diejenigen Werte von x, für die

$$y'''(1 + y'^2) - 3y'y''^2 = 0$$

ist, vorausgesetzt, daß die x-Einheit und die y-Einheit gleich groß sind.

Wenn eine Kurve eine Symmetriegerade hat, so daß die eine Kurvenhälfte durch Umklappen um diese Gerade in die andere übergeht, wird der Punkt S, in dem die Kurve die Symmetriegerade trifft, ein eigentlicher Scheitel sein, vorausgesetzt, daß dort keine Unstetigkeiten eintreten. Denn entweder (siehe Fig. 344) nimmt die Krümmung auf beiden Wegen nach S zu oder auf beiden ab (siehe Fig. 345), so daß in S ein Maximum oder Minimum auftritt.

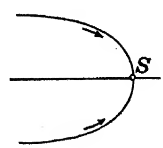


Fig. 344.

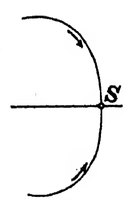


Fig. 345.

Die Krümmungskreise, insbesondere namentlich die der Scheitel, dienen zum angenäherten Zeichnen der krummen Linien. Hierzu einige Beispiele:

4. Beispiel: Bei der Parabel $y = x^2$ ist $y' = 2x$, $y'' = 2$, so daß Satz 12 als Koordinaten ξ und η der Krümmungsmittelpunkte gibt:

$$\xi = -4x^3, \quad \eta = \tfrac{1}{2} + 3x^2.$$

Wir wählen für x etwa die Werte 0, $\frac{1}{2}$, 1, berechnen die zugehörigen Werte von y, nämlich 0, $\frac{1}{4}$, 1, und die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte $(\xi; \eta)$, nämlich $(0; \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}; 1\frac{1}{4})$ und $(-4; 3\frac{1}{2})$. Die betreffenden Kurvenpunkte O, P_1, P_2 und Mittelpunkte K_0, K_1, K_2 sind in Fig. 346 eingezeichnet, wo die Einheiten auf beiden

Achsen gleich groß gewählt sind. Die Kreise um die Punkte K durch die zugehörigen Kurvenpunkte geben angenähert ein Stück der Parabel. Für größere Werte von x wird der Krümmungsradius zu groß; da benutzt man deshalb nur die Kurventangenten, wie z. B. in P_3 oder $(1\frac{1}{2}; 2\frac{1}{4})$. Der Punkt O ist der Scheitel.

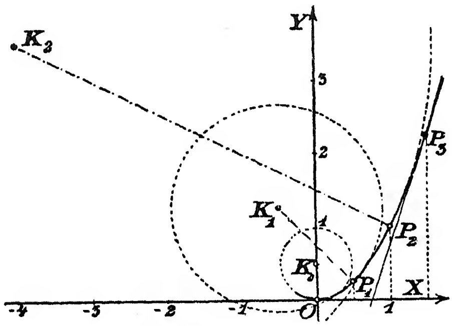


Fig. 346.

5. Beispiel: Bei der Parabel $y = ax^2 + bx + c$ (vgl. S. 95) ergibt sich nach Satz 10 die Krümmung:

$$k = \frac{2a}{\sqrt{1 + (2ax + b)^2}^3}.$$

Sie hat nur für $2ax + b = 0$ ein Minimum, also an der Stelle $x = -\frac{1}{2}b : a$, die wir schon auf S. 95 als Scheitel bezeichneten.

6. Beispiel: Bei der Sinuswelle (vgl. S. 423):

$$y = A \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{T} - p\right)\right]$$

wird die Bedingung (6) für die Scheitel, wie man berechnen möge, diese:

$$\left\{T^2 + 4\pi^2 A^2 + 8\pi^2 A^2 \sin^2\left[2\pi\left(\frac{x}{T} - p\right)\right]\right\} \cos\left[2\pi\left(\frac{x}{T} - p\right)\right] = 0.$$

Der Inhalt der geschweiften Klammern ist augenscheinlich positiv und nicht kleiner als $T^2 + 4\pi^2 A^2$, daher nie gleich Null. Deshalb bleibt übrig:

$$\cos\left[2\pi\left(\frac{x}{T} - p\right)\right] = 0.$$

Diese Bedingung wird nur von den Abszissen x der Gipfel- und Talpunkte erfüllt. Demnach sind nur diese Punkte Scheitel der Sinuswelle. Für sie ist $y' = 0$, $y'' = -4\pi^2 y : T^2$ und $y = \pm A$, also $\varrho = \mp T^2 : 4\pi^2 A$ nach Satz 12. Zur Konstruktion der Krümmungsmittelpunkte der Scheitel erinnern wir an Fig. 295, S. 424,

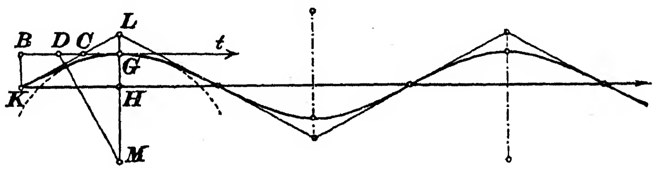


Fig. 347.

in der K einen aufsteigenden Knoten, G den folgenden Gipfel und HG die Amplitude A bedeutet. Da nämlich die Steigung der Tangente KL von K gleich $2\pi A : T$ ist, erkennt man leicht die Richtigkeit der folgenden Konstruktion, siehe Fig. 347: Die Tangente t von G treffe KL in C. Nun trage man die Strecke CG von dem senkrecht über K gelegenen Punkte B von t an bis D auf t ab und fälle von D das Lot auf KL. Dies Lot schneidet die verlängerte Gerade LGH im

Mittelpunkte M des zum Gipfel G gehörigen Krümmungskreises. Für die Talpunkte ergibt sich der entgegengesetzte Wert des Krümmungsradius. Durch Zeichnen der Krümmungskreise der Gipfel- und Talpunkte sowie der Wendetangenten der Knotenpunkte kann man die Sinuswelle meistens genügend genau ermitteln.

7. **Beispiel:** Die Ellipse, deren Achsen gleich $2a$ und $2b$ sind und auf der x-Achse und y-Achse liegen, hat nach (1), S. 185, die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{7}$$

deren Auflösung nach y die zweiwertige Funktion liefert:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

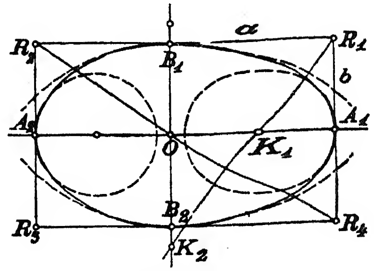


Fig. 348.

Da hier

$$y' = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad y'' = \frac{-ab}{\sqrt{a^2 - x^2}^3}, \quad y''' = \frac{-3abx}{\sqrt{a^2 - x^2}^5}$$

ist, gibt die Scheitel-Bedingung des Satzes 14 einfach $x = 0$, also nur die Schnitt-

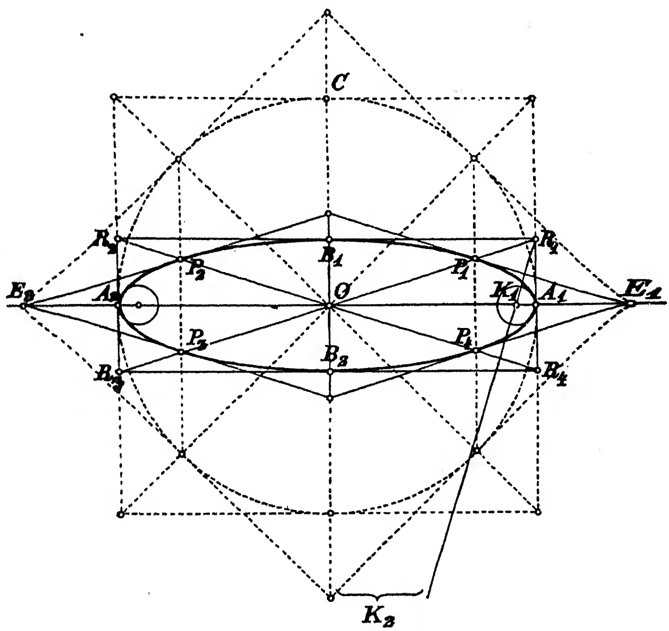


Fig. 349.

punkte der Ellipse mit der y-Achse. Man muß jedoch bedenken, daß y', y'' und y''' für $x = \pm a$ unstetig werden und uns deshalb die zu $x = \pm a$ gehörigen Schnittpunkte

der Ellipse mit der x-Achse entgehen. Daß sie aber ebenso wie die Schnittpunkte mit der y-Achse Scheitel sind, folgt daraus, daß die Koordinatenachsen Symmetriegeraden sind. Schon auf S. 185 nannten wir diese vier Punkte die Haupt- und Nebenscheitel. Für den Nebenscheitel $(0; b)$ wird $y' = 0$ und $y'' = -b : a^2$, daher der Krümmungsradius nach Satz 12 gleich $-a^2 : b$, und das Minuszeichen kündigt an, daß der zugehörige Krümmungsmittelpunkt tiefer als jener Nebenscheitel auf der y-Achse liegt. Die Gleichung (7) der Ellipse ändert sich nicht, wenn man x mit y und zugleich a mit b vertauscht. Demnach folgern wir, daß die Krümmungsradien der Hauptscheitel absolut genommen gleich $b^2 : a$ sind.

Daher zeichnet man Ellipsen so: Sind die Achsen $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ gegeben, siehe Fig. 348, so stellt man das Rechteck $R_1 R_2 R_3 R_4$ der vier Scheiteltangenten her und fällt dann von R_1 das Lot auf die Diagonale $R_2 R_4$. Trifft es die Hauptachse in K_1 und die Nebenachse in K_2, so erkennt man aus der Ähnlichkeit von $\triangle K_1 A_1 R_1$ und $\triangle R_1 B_1 K_2$ mit $\triangle R_4 R_1 R_2$ leicht, daß $K_1 A_1 = b^2 : a$ und $K_2 B_1 = a^2 : b$, also K_1 der Krümmungsmittelpunkt von A_1 und K_2 der Krümmungsmittelpunkt von B_1 ist. Die Krümmungsmittelpunkte der beiden anderen Scheitel A_2 und B_2 liegen zu K_1 und K_2 symmetrisch. Zieht man die vier Krümmungskreise der Haupt-

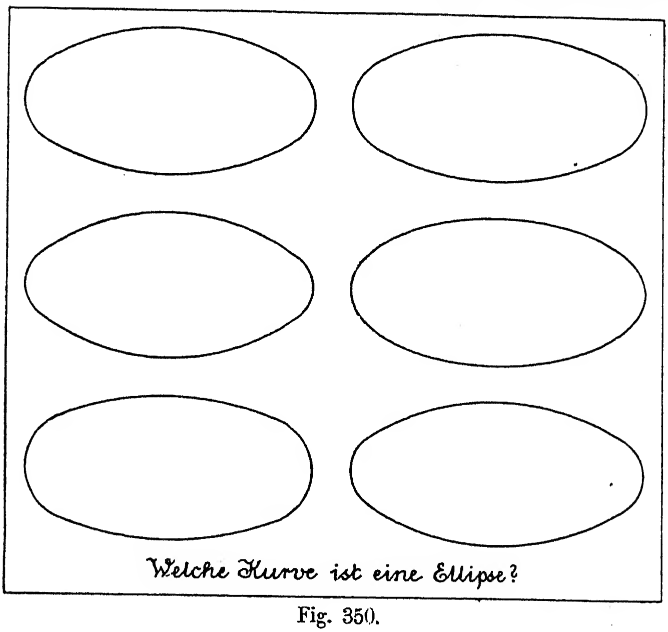


Fig. 350.

und Nebenscheitel, so kann man ziemlich ausgedehnte Stücke davon als Ersatz der Ellipsenbogen in der Nähe der Scheitel benutzen. Im übrigen ergänzt man die Kurve dazwischen mittels eines Kurvenlineals. Ist die Ellipse sehr länglich, also a bedeutend größer als b, siehe Fig. 349, so wird der Radius der Krümmungskreise der Nebenscheitel zu groß. Dann empfiehlt es sich, noch die vier Punkte der Ellipse zu bestimmen, die auf den Diagonalen $R_1 R_3$ und $R_2 R_4$ des Rechtecks liegen. Man findet sie so: Der Kreis um den Mittelpunkt O mit dem Radius a treffe die Nebenachse oben in C. Nun trage man die Strecke $a\sqrt{2}$, die gleich der Entfernung

von A_1 bis C ist, von O aus auf der Hauptachse nach beiden Seiten bis E_1 und E_2 ab und ziehe durch E_1 und E_2 die Parallelen zu den Diagonalen $R_2 R_4$ und $R_1 R_3$ des Rechtecks. Dadurch gehen vier Geraden hervor, die einen Rhombus bilden. Die Ellipse berührt die Seiten des Rhombus gerade in denjenigen Punkten P_1, P_2, P_3, P_4, die auf den Diagonalen des Rechtecks liegen. Der Beweis hierfür ergibt sich unmittelbar daraus, daß die Ellipse in den soeben benutzten Kreis übergeht, wenn man alle ihre Ordinaten im Verhältnis $a : b$ vergrößert, nach S. 185. Verfährt man nämlich ebenso mit den Ordinaten des Rechtecks und Rhombus, so gehen Rechteck und Rhombus in zwei dem Kreis umschriebene Quadrate über, wie es die punktierten Linien andeuten.

Die Zeichnung der Ellipse mittels der Krümmungskreise der Haupt- und Nebenscheitel liefert, obgleich diese Kreise einander nicht treffen, so daß noch Ergänzungen mittels des Kurvenlineals nötig sind, ein viel besseres Bild der Ellipse als dasjenige Verfahren, das fast überall (sogar von Mathematikern) benutzt wird. Man pflegt nämlich die Ellipse durch vier Kreisbogen zu ersetzen, die an den Stellen, wo sie ineinander übergehen, dieselben Tangenten haben. Um nicht zur Weiterverbreitung dieses schlechten Verfahrens beizutragen, geben wir Näheres darüber nicht an. Wie häßlich die danach entworfenen Ellipsenbilder sind, zeigt als abschreckendes Beispiel die Fig. 350. Nur eine der Linien ist eine Ellipse.

8. Beispiel: Die Scheitel der Hyperbel traten schon auf S. 191 auf. Wird die Hyperbel wie in (1) ebenda gegeben, so stellt sich y in der Form (2), ebenda, dar, und also wird y' gerade für die Scheitel, nämlich für $x = \pm a$, unstetig. Um die Krümmungsradien der Scheitel zu ermitteln, tut man deshalb gut, zunächst die Achsen miteinander zu vertauschen, also statt

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{zu schreiben:} \qquad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1\,.$$

Dann kommt

$$y = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + x^2}, \qquad y' = \frac{a\,x}{b\sqrt{b^2 + x^2}}, \qquad y'' = \frac{a\,b}{\sqrt{b^2 + x^2}^{\,3}}\,,$$

also für $x = 0$, wenn die Quadratwurzel positiv angenommen wird: $y = a$, $y' = 0$, $y'' = a : b^2$, so daß Satz 12 für $x = 0$ den Krümmungsradius $b^2 : a$ gibt. Vertauschen wir wieder x mit y, so folgt: Die auf S. 190 u. f. betrachtete Hyperbel hat in den Scheiteln $(\pm a; 0)$ Krümmungsradien, die absolut genommen gleich $b^2 : a$ sind. Nach Fig. 136, S. 191, ergibt sich daher der Krümmungsmittelpunkt K_1 des Scheitels A_1 wie in Fig. 351: Man errichtet im Scheitel A_1 das Lot auf die Achse und im Schnittpunkt C dieses Lotes mit einer Asymptote wieder das Lot auf die Asymptote. Dieses zweite Lot trifft die Achse an der gesuchten Stelle K_1. Denn aus $O A_1 \cdot A_1 K_1 = A_1 C^2$ folgt wegen $O A_1 = a$, $A_1 C = b$ sofort $A_1 K_1 = b^2 : a$. Der Krümmungsmittelpunkt K_2 des zweiten Scheitels A_2 liegt zu K_1 symmetrisch. Mit Hilfe der Krümmungskreise der Scheitel und mittels der Asymptoten läßt sich die Hyperbel ziemlich genau zeichnen. Überdies kann man einzelne Punkte nach Fig. 138, S. 196, ermitteln.

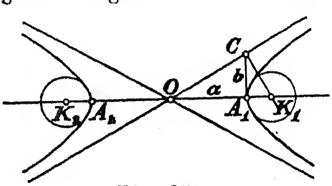


Fig. 351.

9. Beispiel: Die in der Fig. 213, S. 284, gezeichnete logarithmische Kurve $y = \ln x$ hat nur an der Stelle $(\frac{1}{2}\sqrt{2}; -\frac{1}{2}\ln 2)$ oder $(0{,}707;\ -0{,}347)$ einen Scheitel. Der zugehörige Krümmungsmittelpunkt ist $(2\sqrt{2};\ -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\ln 2)$ oder $(2{,}828;\ -1{,}847)$. Man bestätige dies und zeichne den Krümmungskreis des Scheitels ein.

10. Beispiel: Die Bildkurve der Funktion

$$y = e^{-x^2}$$

ist in der Wahrscheinlichkeitsrechnung wichtig. Nach S. 313 ist y stets positiv, außerdem nach S. 384 eine gerade Funktion von x; die Kurve verläuft also im 1. und 2. Quadranten und hat die x-Achse zur Symmetriegeraden. Da

$$y' = -2\,x\,e^{-x^2}$$

ist, steigt sie für negatives x und fällt sie für positives x. Für $x = 0$ hat sie das Maximum $y = 1$, während sie sich für $x = \pm\infty$ der y-Achse als ihrer Asymptote (vgl. S. 193) anschmiegt. Da

$$y'' = (4\,x^2 - 2)\,e^{-x^2}$$

ist, treten nach S. 459 für $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2} = \pm 0{,}707$ Wendepunkte auf. Für sie wird $y = 1 : \sqrt{e} = 0{,}607$ und $y' = \mp\sqrt{2 : e}$. Ist w der Abschnitt, den die Wendetangenten auf der y-Achse bestimmen, so ist $(1 : \sqrt{e} - w) : \frac{1}{2}\sqrt{2}$ die Steigung der einen Wendetangente, also gleich $-\sqrt{2 : e}$, woraus $w = 2 : \sqrt{e} = 1{,}213$ folgt. Hiernach sind die Wendepunkte W_1, W_2 mit ihren Tangenten leicht zu zeichnen, siehe Fig. 352. Man findet ferner, daß die Bedingung des Satzes 14 für die Scheitel so lautet:

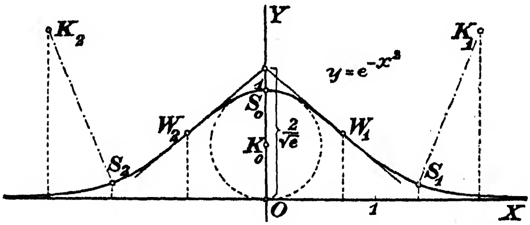


Fig. 352.

(8) $$x\,e^{-x^2}[(16\,x^4 - 12\,x^2 + 6)\,e^{-2x^2} + 3 - 2\,x^2] = 0\,.$$

Da e^{-x^2} stets positiv und nie gleich Null ist, kann dieser Faktor gestrichen werden. Der Faktor x gibt $x = 0$, d. h. den Scheitel S_0 oder $(0; 1)$ auf der y-Achse mit dem Krümmungsradius $-\frac{1}{2}$, also dem Krümmungsmittelpunkte K_0 oder $(0; \frac{1}{2})$ auf der y-Achse. Ferner liefert (8) nach Multiplikation mit e^{2x^2} noch die Bedingung:

$$(3 - 2\,x^2)\,e^{2x^2} + 16\,x^4 - 12\,x^2 + 6 = 0\,.$$

Um die Lösungen x dieser Gleichung zu berechnen, setzen wir $2\,x^2 = u$. Dann ergibt sich nämlich für u die einfachere Gleichung:

(9) $$(3 - u)\,e^u + 4\,u^2 - 6\,u + 6 = 0\,.$$

Zur Bestimmung von u benutzen wir die Regula falsi (S. 118), indem wir

$$v = (3 - u)\,e^u + 4\,u^2 - 6\,u + 6$$

als Fehler verwenden. Da $\ln e^u = u$, also $\log e^u = Mu$ ist, wo M den Modul (S. 298) bedeutet, kann man e^u leicht berechnen. Insbesondere ergeben sich für $u = 3$ und

$u = 4$ die Wertepaare:

u	v
3	24,0
4	— 8,6 .

Also liegt zwischen 3 und 4 eine Lösung von (9). Nach (10), S. 117, ergibt sich daraus der bessere Näherungswert $u = 3{,}7$. Für ihn ist $v = 10{,}25$. Aus dem Wertepaar

u	v
3,7	10,25
4,0	— 8,6

geht ferner der bessere Näherungswert $u = 3{,}86$ hervor, für den $v = 1{,}62$ ist. Für $u = 3{,}90$ dagegen wird $v = -1{,}02$. Aus diesen beiden Wertepaaren ergibt sich der bessere Näherungswert $u = 3{,}885$, für den $v = -0{,}007$ wird. Für $u = 3{,}884$ dagegen ist $v = 0{,}059$. Also liegt zwischen 3,884 und 3,885 eine Lösung der Gleichung (9). Da $u = 2x^2$ ist, liegt zwischen 1,3936 und 1,3937 eine Lösung x der Gleichung (8). Demnach hat die Kurve für x gleich rund 1,394 einen Scheitel S_1. Man findet hier $y = 0{,}143$ und nach Satz 12 die Koordinaten $\xi = 1{,}954$, $\eta = 1{,}545$ des zugehörigen Krümmungsmittelpunktes K_1. Im zweiten Quadranten ergibt sich symmetrisch hierzu der Scheitel S_2 mit dem Krümmungsmittelpunkte K_2. Die im vorhergehenden bestimmten Krümmungskreise und Wendetangenten geben eine außerordentlich gute Annäherung an die Kurve.

11. Beispiel: Die Kettenlinie, siehe 3. Beispiel, S. 364 u. f.:

$$y = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

hat in ihrem tiefsten Punkt $(0; 1)$ einen Scheitel. Der zugehörige Krümmungsradius ist gleich Eins. Bei der Parabel

$$y = 1 + \tfrac{1}{2}x^2,$$

die sich der Kettenlinie im tiefsten Punkt anschmiegt, ist dieselbe Stelle ein Scheitel mit demselben Krümmungsradius.

12. Beispiel: Wenn eine Kette außer ihrem eigenen Gewichte noch eine gleichförmig wagerecht verteilte Belastung, die Laufbahn einer Kettenbrücke, zu tragen hat, und wenn die Fläche des Querschnittes der Kette überall proportional zu der dort wirkenden Spannung ist, ergibt sich, wie in der Mechanik gelehrt wird, für die Kette die Gleichung:

$$y = -a \ln \cos cx,$$

wo a und c positive Konstanten bedeuten. Da $\cos cx$ nach Satz 21, S. 421, die Periode $2\pi : c$ hat, gilt dasselbe von y. Diese Funktion ist jedoch nach S. 268 nur für solche Werte von x vorhanden, für die $\cos cx$ positiv ist, z. B. im Intervalle von $cx = -\frac{1}{2}\pi$ bis $cx = +\frac{1}{2}\pi$. Für die Kettenbrücke kommt nur dies Intervall in Betracht. Wird nehmen also x zwischen $-\pi : 2c$ und $+ : 2c$ an. Für $x = \pm\pi : 2c$ ist $\cos cx = 0$, also $y = +\infty$, für $x = 0$ ist $\cos cx = 1$, also $y = 0$. Im ganzen Intervalle bleibt y positiv. Ferner ist die y-Achse Symmetrieachse, demnach der Anfangspunkt O nach S. 485 ein Scheitel. Nach Satz 12 ist hier der Krümmungsradius gleich $1 : c^2 a$. Die Bedingung des Satzes 14 für die Scheitel gibt:

$$\frac{\sin cx}{\cos^5 cx}(2\cos^2 cx + 2a^2c^2 \sin^2 cx - 3a^2c^2) = 0.$$

Gleich Null gesetzt liefert der erste Faktor den Scheitel O, der zweite dagegen, wenn man $\sin^2 cx$ durch $1 - \cos^2 cx$ ersetzt:

$$\cos^2 cx = \frac{a^2 c^2}{2(1 - a^2 c^2)}.$$

Da $\cos^2 cx$ zwischen 0 und 1 liegt, ergeben sich hieraus nur dann noch zwei Scheitel, wenn $a^2 c^2 < \frac{2}{3}$ ist, und zwar liegen beide Scheitel symmetrisch zur y-Achse. Besonders merkwürdig ist die Annahme $a^2 c^2 = \frac{2}{3}$, denn dann fallen alle drei Scheitel in einen, nämlich in O, zusammen, und der zugehörige Krümmungskreis berührt dann die Kurve in außerordentlich inniger Weise. Wählen wir z. B. $a = \sqrt{6}$, $c = \frac{1}{3}$, so tritt dieser Fall für die Bildkurve der Funktion

$$y = -\sqrt{6} \ln \cos \tfrac{1}{3} x$$

ein, und hier ist der Krümmungsradius des einzigen Scheitels O gleich $\frac{3}{2}\sqrt{6} = 3{,}674$. Siehe Fig. 353.

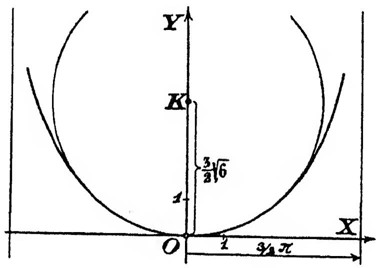


Fig. 353.

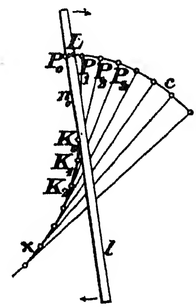


Fig. 354.

Wir betrachten die Normalen unendlich benachbarter Punkte P_0, $P_1, P_2 \ldots$ einer Kurve c, siehe Fig. 354. Nach S. 481 ist der Schnittpunkt der Normale n_0 von P_0 und der Normale n_1 von P_1 der zu P_0 gehörige Krümmungsmittelpunkt K_0, also $K_0 P_0 = K_0 P_1$. Ebenso ist der Schnittpunkt der Normalen n_1 und n_2 der Krümmungsmittelpunkt K_1 von P_1, also $K_1 P_1 = K_1 P_2$, usw. Die Punkte $K_0, K_1, K_2 \ldots$ folgen unendlich nahe aufeinander und bilden eine Kurve $\varkappa$, den Ort der Krümmungsmittelpunkte von c. Ferner ist die Gerade $K_0 P_1$, weil sie auch durch K_1 geht, die Tangente von $\varkappa$ in K_0, ebenso $K_1 P_2$ die Tangente von $\varkappa$ in K_1 usw. Hiernach gilt der

Satz 15: Der Ort der Krümmungsmittelpunkte einer Kurve c ist diejenige Kurve, deren Tangenten die Normalen der Kurve c sind.

Wenn man nur für einige Punkte P von c die Normalen zieht, ergibt sich die Kurve $\varkappa$ schon ziemlich deutlich als die von diesen Normalen eingehüllte Kurve. Legen wir längs n_0 auf die Figur

ein Lineal l, auf dem wir die mit P_0 zur Deckung kommende Stelle L anmerken, und denken wir uns die Kurve $\varkappa$ erhaben über der Zeichenfläche, so können wir das Lineal l längs der Kurve $\varkappa$ ohne Gleiten abrollen: Zuerst wird l um K_0 so weit gedreht, bis das Lineal längs $K_0 P_1$ anliegt, also auch K_1 deckt. Darauf wird das Lineal um K_1 gedreht, bis es längs $K_1 P_2$ anliegt, also auch K_2 deckt; alsdann wird es um K_2 gedreht, usw. Weil $K_0 P_0 = K_0 P_1$, ferner $K_1 P_1 = K_1 P_2$ usw. ist, kommt die Marke L nach und nach aus der Anfangslage P_0 in die Lagen P_1, P_2 usw. Wir haben also den

Satz 16: Der Ort der Krümmungspunkte einer Kurve c ist eine zweite Kurve $\varkappa$, aus der die Kurve c dadurch erzeugt werden kann, daß man eine Gerade l ohne Gleiten auf $\varkappa$ abrollen läßt und dabei die Bewegung eines Punktes L von l verfolgt.

Statt des Lineals hätten wir uns auch einen unausdehnbaren Faden um die Kurve $\varkappa$ herumgespannt denken können, befestigt an einer späteren Stelle und von K_0 aus tangential nach L hin auslaufend. Wird in L ein Zeichenstift angebracht, so beschreibt er bei der Abwickelung des gespannt gehaltenen Fadens von $\varkappa$ die Kurve c. Ein Beispiel hierzu, die Abwickelung eines Fadens von einer Kettenlinie, ist das 2. Beispiel auf S. 362 u. f. mit der Fig. 249. Eine in der angegebenen Art durch Abwickelung eines Fadens aus einer Kurve $\varkappa$ hervorgehende Kurve c heißt eine Evolvente von $\varkappa$, vom lateinischen evolvere, abwickeln, und die Kurve $\varkappa$ selbst heißt die Evolute von c. Also können wir sagen:

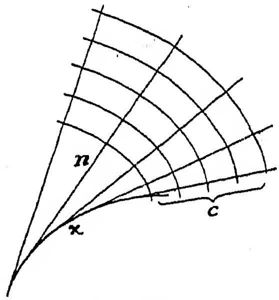


Fig. 355.

Satz 17: Die Evolute einer Kurve ist der Ort ihrer Krümmungsmittelpunkte.

Außerdem hat sich gezeigt, siehe Fig. 355:

Satz 18: Jede Kurve $\varkappa$ hat unendlich viele Evolventen c; die Evolventen durchsetzen die Tangenten n der Evolute $\varkappa$ senkrecht. Alle diese Evolventen haben die Evolute $\varkappa$ als Ort ihrer Krümmungsmittelpunkte gemein.

Da die Evolventen c da, wo sie eine Tangente n von $\varkappa$ treffen, sämtlich Tangenten senkrecht zu n haben, heißen sie auch Parallelkurven. Man nennt sie auch die senkrechten (orthogonalen) Trajektorien der Tangenten n von $\varkappa$. Zwei Parallelkurven c

schneiden auf allen ihren gemeinsamen Normalen n ein Stück von derselben Länge ab.

Verfolgt man das Abrollen eines Lineals l auf einer Kurve $\varkappa$ so weit, bis die Marke L auf $\varkappa$ selbst rückt, siehe Fig. 356, so hat die Bahnkurve c der Marke kurz vorher eine Tangente senkrecht zu einer Tangente von $\varkappa$ und ebenso kurz nachher; sie schweift aber beiderseits nach verschiedenen Seiten ab. Mithin hat die Evolvente c an jener Stelle L auf $\varkappa$ eine Spitze, indem sie dort die Normale ν von $\varkappa$ von beiden Seiten her berührt.

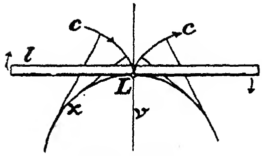


Fig. 356.

§ 4. Geradlinige Bewegungen.

Wir kommen zur Auseinandersetzung der Bedeutung, die dem zweiten Differentialquotienten einer Funktion in der Lehre von den Bewegungen und in der Mechanik zukommt. Dabei wollen wir annehmen, daß die unabhängige Veränderliche die Zeit t sei, gemessen mit irgendeiner Einheit. Die von t abhängige Veränderliche sei mit s bezeichnet und bedeute den Weg, den ein punktförmiges Mobil auf einer geraden Linie in der Zeit t zurücklegt, wobei s mit irgendeiner Längeneinheit zu messen ist. (Von krummlinigen Bewegungen soll erst in § 5 gesprochen werden.) Der erste Differentialquotient $ds : dt$ stellt nach S. 70, vgl. auch S. 256, die Geschwindigkeit v des Mobils zur Zeit t dar. Sie ist eine gewisse Funktion von t. Ihr Differentialquotient $dv : dt$, also das Verhältnis aus der unendlich kleinen Änderung der Geschwindigkeit und der dazu gebrauchten Zeit, heißt die Beschleunigung. Wenn die Beschleunigung positiv ist, nimmt die Geschwindigkeit zu, ist sie negativ, so nimmt die Geschwindigkeit ab (vgl. Satz 7, S. 104). Die Beschleunigung wird meistens mit p bezeichnet. Dann ist:

$$p = \frac{dv}{dt} = \frac{d\frac{ds}{dt}}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2},$$

d. h. die Beschleunigung ist der zweite Differentialquotient des Weges s nach der Zeit t.

Weg s, Geschwindigkeit v und Beschleunigung p sind alle drei Funktionen der Zeit t. Wir können aber auch (wie wir es z. B. bei der Kettenregel getan haben) eine dieser Größen, d. h. den Weg s oder die Geschwindigkeit v oder die Beschleunigung p als die unabhängige Veränderliche betrachten und überhaupt allgemein sagen: Von den vier Größen t, s, v, p ist bei einer bestimmten ins Auge

gefaßten geradlinigen Bewegung nur eine unabhängig veränderlich; die drei anderen sind Funktionen von ihr. Von einer Bewegung weiß man z. B. unter Umständen nur, daß die Beschleunigung p an einer beliebigen Stelle s des Weges eine bekannte Funktion von s ist. Dann wird man s als unabhängige Veränderliche betrachten, und es entsteht die Aufgabe, auch t und v als Funktionen von s zu berechnen. Wir kommen so überhaupt zu sechs verschiedenen Aufgaben, da es auf sechs Arten möglich ist, zwei der Größen t, s, v, p herauszugreifen und vorauszusetzen, daß zwischen diesen beiden eine gegebene Gleichung bestehe. Die zu lösende Aufgabe erfordert dann abgesehen vom einfachsten Falle, wie sich zeigen wird, Integrationen. Wir haben in Satz 9, S. 257, gesehen, daß sich diejenige Funktion y von x, die einen gegebenen Differentialquotienten $f(x)$ hat und für einen gegebenen Anfangswert x_0 von x einen ebenfalls gegebenen Anfangswert y_0 hat, so darstellt:

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + y_0.$$

Hiervon machen wir nachher wiederholt Gebrauch.

Außerdem machen wir natürlich von den Beziehungen Gebrauch, die zwischen t, s, v und p bestehen. Nach dem vorhin Gesagten ist:

(1) $$v = \frac{ds}{dt}, \quad p = \frac{dv}{dt} \left(= \frac{d^2s}{dt^2}\right),$$

woraus durch Division folgt:

(2) $$\frac{dv}{ds} = \frac{p}{v} \quad \text{oder} \quad p = v\frac{dv}{ds}.$$

Weil nach der Kettenregel

$$\frac{d(v^2)}{ds} = \frac{d(v^2)}{dv}\frac{dv}{ds} = 2v\frac{dv}{ds}$$

ist, liefert (2) außerdem:

(3) $$\frac{d(\frac{1}{2}v^2)}{ds} = p.$$

Satz 19: Bewegt sich ein Mobil geradlinig, so ist der Differentialquotient des halben Quadrats seiner Geschwindigkeit nach dem Wege gleich der Beschleunigung.

Statt (3) schreiben wir auch die später anzuwendende Formel:

(4) $$d(\tfrac{1}{2}v^2) = p\,ds.$$

Wir besprechen jetzt die einzelnen sechs Aufgaben:

A. Eine Gleichung zwischen t und s sei gegeben. Löst man sie nach s auf, d. h. schreibt man sie so, daß links s und rechts ein Ausdruck in t steht, so ist s eine bekannte Funktion von t:

$$s = f(t).$$

Hieraus ergibt sich ohne weiteres durch Differentiation

$$v = f'(t), \quad p = f''(t).$$

B. Eine Gleichung zwischen t und v sei gegeben. Löst man sie nach v auf, so mag sich ergeben:

$$v = f(t).$$

Ist $s = s_0$ für $t = t_0$, so bedeutet s nach der ersten Formel (1) diejenige Funktion von t, deren Differentialquotient gleich v oder $f(t)$ ist und die für $t = t_0$ gleich s_0 wird. Daher kommt als Weg:

$$s = \int_{t_0}^{t} f(t)\,dt + s_0.$$

Nach der zweiten Formel (1) ergibt sich als die Beschleunigung:

$$p = f'(t).$$

C. Eine Gleichung zwischen t und p sei gegeben. Sie sei, nach p aufgelöst, diese:

$$p = f(t).$$

Ist $v = v_0$ für $t = t_0$, so gibt die zweite Formel (1) die Geschwindigkeit:

$$v = \int_{t_0}^{t} f(t)\,dt + v_0.$$

Ist das Integral ausgerechnet, so kennt man v als Funktion von t, so daß man auf die Aufgabe B zurückkommt.

D. Eine Gleichung zwischen s und v sei gegeben. Sie sei, nach v aufgelöst:

$$v = f(s).$$

Nach (2) die ergibt sich Beschleunigung:

$$p = f(s)\,f'(s).$$

Nach der ersten Formel (1) hat man ferner:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{v} = \frac{1}{f(s)}.$$

Ist $t = t_0$ für $s = s_0$, so ergibt sich daher die Zeit:

$$t = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{f(s)} + t_0 .$$

E. Eine Gleichung zwischen s und p sei gegeben. Sie sei, nach p aufgelöst:

$$p = f(s) .$$

Ist $v = v_0$ für $s = s_0$, so wird $\frac{1}{2} v^2$ für $s = s_0$ gleich $\frac{1}{2} v_0^2$. Nach (3) oder (4) kommt daher:

$$\tfrac{1}{2} v^2 = \int_{s_0}^{s} f(s)\, ds + \tfrac{1}{2} v_0^2 ,$$

woraus als Geschwindigkeit folgt:

$$v = \sqrt{2 \int_{s_0}^{s} f(s)\, ds + v_0^2}.$$

Hat man das Integral ausgerechnet, so ist v eine bekannte Funktion von s, so daß man auf die Aufgabe D zurückkommt.

F. Eine Gleichung zwischen v und p sei gegeben. Sie sei, nach p aufgelöst:

$$p = f(v) .$$

Nach der zweiten Formel (1) wird:

$$\frac{dt}{dv} = \frac{1}{p} = \frac{1}{f(v)} .$$

Ist $t = t_0$ für $v = v_0$, so ergibt sich als die Zeit:

$$t = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{f(v)} + t_0 .$$

Nach (2) kommt ferner:

$$\frac{ds}{dv} = \frac{v}{p} = \frac{v}{f(v)} ,$$

also, wenn s_0 der Anfangswert von s ist, der Weg:

$$s = \int_{v_0}^{v} \frac{v\, dv}{f(v)} + s_0 .$$

Außer den erforderlichen Integrationen kann die Lösung dieser Aufgaben noch eine andere Schwierigkeit haben. Denn wenn z. B.

eine Gleichung zwischen v und p vorliegt, ist es fraglich, ob man sie auf die nach p aufgelöste Form $p = f(v)$ bringen kann. Immerhin aber geben die vorstehenden Lösungen die allgemeine Anleitung zur mathematischen Behandlung hierher gehöriger Aufgaben.

Wenn bei einer Bewegung die Geschwindigkeit v stets gleich Eins ist, ergibt sich aus der ersten Formel (1) oder auch nach B, sobald der Weg für $t = 0$ den Wert $s = 0$ hat, die Formel $s = t$. Dies bedeutet: Die Geschwindigkeitseinheit ist diejenige Geschwindigkeit, die ein Mobil beständig beibehält, wenn es in t Zeiteinheiten gerade t Wegeinheiten zurücklegt. In diesem Fall ist die Beschleunigung gleich Null. Hat dagegen die Beschleunigung p beständig den Wert Eins und ist die Anfangsgeschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ gleich Null, so folgt aus C, daß $v = t$ wird. Die Einheit der Beschleunigung ist also diejenige Beschleunigung, die einem Mobil beständig zukommt, wenn es in t Zeiteinheiten gerade die Geschwindigkeit $v = t$ erreicht. Da man nun für verschiedene Zwecke verschiedene Längeneinheiten und Zeiteinheiten benutzt, tut man gut, sich zu überlegen, welchen Einfluß sie auf die Definition der Einheiten der Geschwindigkeit und der Beschleunigung haben. Wegen $v = ds : dt$ hat die Geschwindigkeit die sogenannte Dimension Länge : Zeit. Dasselbe gilt natürlich auch für ihr Differential dv. Wegen $p = dv : dt$ hat folglich die Beschleunigung die Dimension Länge : (Zeit)^2.

Als dritte wesentliche Einheit tritt zur Längen- und Zeiteinheit noch die Masseneinheit hinzu. Nach den Grundlehren der Mechanik erzeugt eine auf eine punktförmige Masse m wirkende konstante Kraft von konstanter Richtung eine konstante Beschleunigung p. Als Maß der Kraft dient das Produkt $K = mp$. Die Dimension der Kraft ist also Länge . Masse : (Zeit)^2. Die Schwerkraft, d. h. die Anziehungskraft der Erde, erteilt allen Körpern die gleiche Beschleunigung g. Diese Gravitationskonstante ist gleich 9,81, wenn die Längeneinheit das Meter und die Zeiteinheit die Sekunde ist (vgl. 15. Beispiel, S. 259).

Im sogenannten absoluten Maßsystem benutzt man als Längeneinheit das Zentimeter, als Masseneinheit das Gramm und als Zeiteinheit die Sekunde. Es wird daher das C.G.S.-System genannt. Die zugehörige Krafteinheit heißt das Dyn. Dies ist diejenige Kraft, die einem Gramm die Beschleunigung Eins erteilt, wenn der Weg in Zentimetern und die Zeit in Sekunden gemessen wird. Da die Schwerkraft dem Gramm die Beschleunigung g erteilt und diese Beschleunigung im C.G.S.-System wegen ihrer Dimension Länge : (Zeit)^2 nicht 9,81, sondern 981 ist (wegen 1 m = 100 cm), hat die Schwerkraft 981 Dyn. Sie ist andererseits gleich dem Gewichte, d. h. gleich einem Gramm, woraus folgt, daß ein Kilogramm 981 000 Dyn beträgt.

Im *technischen Maßsystem* ist die Längeneinheit das Meter, die Zeiteinheit die Sekunde, die Krafteinheit das Kilogramm. Aus der Beziehung $K = m\,p$ zwischen Kraft, Masse und Beschleunigung kann man folgern, was im technischen Maßsystem die Masseneinheit ist. Da nämlich die Schwerkraft jedem Körper die Beschleunigung $g = 9{,}81$ (*jetzt nicht* 981) erteilt, wird die Masseneinheit $m = 1$ von der Erde mit der Kraft $K = 1 \,.\, g = 9{,}81$ (in kg) angezogen. Die Masseneinheit im technischen System ist also die Masse von 9,81 kg. Ein Körper von G kg Gewicht hat die Masse $G : 9{,}81$.

Noch sei bemerkt: Ist die Beschleunigung p konstant und zwar gleich Eins, und ist die Geschwindigkeit gleich Null zur Zeit $t = 0$, so ist, wie gesagt, beständig $v = t$, d. h. zur Zeit Eins herrscht die Geschwindigkeit Eins. Da nun die Krafteinheit diejenige Kraft bedeutet, die der Masseneinheit die Beschleunigung Eins erteilt, ergibt sich hieraus, *daß man die Krafteinheit auch als diejenige Kraft definieren kann, die der Masseneinheit in der Zeiteinheit die Geschwindigkeit Eins erteilt.* Dies gilt sowohl im absoluten wie auch im technischen Maßsystem.

Das Produkt aus der Kraft $m\,p$ zur Zeit t und dem im nächsten unendlich kleinen Zeitteilchen dt zurückgelegten Weg ds, also $mp\,ds$ heißt die *Arbeit*, die die Kraft mp in der Zeit dt leistet. Tragen wir zu jeder Abszisse s auf der geradlinigen Bahn die an der betreffenden Stelle wirkende Kraft $m\,p$ als Ordinate auf, so entsteht ein sogenanntes *Diagramm*, in dem die krumme Linie, siehe Fig. 357, durch ihre Abszissen den Weg und durch ihre Ordinaten die jeweilige Kraft veranschaulicht. Die zum Wegteilchen ds gehörige Arbeit ist der Inhalt des unendlich schmalen, über ds bis zur Kurve errichteten Rechtecks. Nach Satz 5, S. 229, ist daher die Arbeit A, die geleistet wird, während der Weg von s_0 bis s_1 zunimmt, gleich der zugehörigen *Fläche des Diagramms*

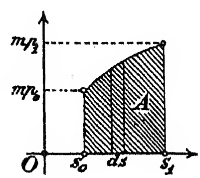


Fig. 357.

$$A = \int\limits_{s_1}^{s_0} m\,p\,d\,s\,. \tag{5}$$

Nach (4) ist nun $m\,p\,d\,s$ das m-fache des Zuwachses, den $\frac{1}{2}\,v^2$ auf dem Wege ds erfährt, also, da m *konstant* ist, die Arbeit A gleich dem m-fachen des Betrages, um den $\frac{1}{2}\,v^2$ von s_0 bis s_1 zunimmt. Ist v gleich v_0 an der Stelle s_0 und gleich v_1 an der Stelle s_1, so kommt daher:

$$A = \tfrac{1}{2}\,m\,v_1^{\,2} - \tfrac{1}{2}\,m\,v_0^{\,2}\,. \tag{6}$$

Das Produkt aus der Masse m und dem halben Quadrat der Geschwindigkeit v heißt die lebendige Kraft (oder kinetische Energie). Die Arbeit A ist also gleich dem Zuwachs der lebendigen Kraft auf dem zurückgelegten Weg. Ihre Dimension ist wie die der lebendigen Kraft (Länge)^2 . Masse : (Zeit)^2.

1. Beispiel: Eine punktförmige feste Masse M ziehe eine punktförmige bewegliche Masse m an, die zuerst in der Ruhelage die Entfernung s_0 von M habe. Die Zeit t werde vom Beginn der Einwirkung an gemessen. Die Wege s rechnen wir positiv im Sinn von M nach der Anfangslage von m, so daß die Kraft negativ wirkt. Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetze (vgl. 6. Beispiel, S. 142) hat die Kraft den Wert

$$-k\frac{Mm}{s^2},$$

wo k eine positive Konstante bedeutet. Die Kraft ist andererseits gleich dem Produkt aus der bewegten Masse m und ihrer Beschleunigung p, also:

$$p = -\frac{kM}{s^2}.$$

Somit ist die Beschleunigung p als Funktion des Weges s gegeben, siehe Fall E. Daher folgt, weil überdies $v_0 = 0$ ist:

$$\tfrac{1}{2}v^2 = \int_{s_0}^{s} -\frac{kM}{s^2}\,ds = \frac{kM}{s} - \frac{kM}{s_0}.$$

Die Arbeit auf dem Weg von s_0 bis s beträgt also nach (6):

$$A = \tfrac{1}{2}mv^2 = kMm\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s_0}\right).$$

Ist die bewegte Masse die Masseneinheit $m = 1$ und denkt man sie sich zuerst unendlich fern ($s_0 = \infty$), so folgt: Die Arbeit A, die die Anziehungskraft der Masse M leistet, um eine unendlich ferne Masseneinheit bis auf die Entfernung s heranzuziehen, hat den Betrag $kM : s$. Sie ist eine Funktion von s, und ihr Differentialquotient

$$\frac{dA}{ds} = -\frac{kM}{s^2}$$

ist die Beschleunigung p. Man benutzt $A = kM : s$, das sogenannte Potential der Masse M, als bequeme mathematische Ausdrucksweise für die Wirkungen, die die Masse M auf die Massen in ihrer Umgebung oder, wie man sagt, in ihrem Kraftfeld ausübt.

Besonders wichtig sind diejenigen geradlinigen Bewegungen, bei denen sich die Beschleunigung p linear mit konstanten Koeffizienten durch den Weg s und die Geschwindigkeit v ausdrückt:

(7) $$p = as + bv,$$

wo also a und b Konstanten seien. Diese Annahme ordnet sich

keinem der oben betrachteten sechs Fälle A bis F unter. Die Bedingung (7) kann man nach (1) so ausdrücken:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = as + b\,\frac{ds}{dt}. \tag{8}$$

Sie ist also eine Vorschrift für eine gesuchte Funktion s von t, denn sie verlangt, daß sich der zweite Differentialquotient der Funktion in der angegebenen Weise durch die Funktion und ihren ersten Differentialquotienten ausdrücke. Für das bessere Verstehen der folgenden mathematischen Schlüsse ist es vielleicht nützlich, die unabhängige Veränderliche statt mit t so zu bezeichnen, wie wir es sonst gewöhnt sind, nämlich mit x, und die abhängige statt s entsprechend y zu nennen. Wir stellen also statt (8) die Forderung:

Gesucht wird eine Funktion y von x, deren zweiter Differentialquotient sich linear mit konstanten Koeffizienten a und b aus der Funktion selbst und aus ihrem ersten Differentialquotienten zusammensetzt:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = ay + b\,\frac{dy}{dx}. \tag{9}$$

Zur Lösung dieser Aufgabe wenden wir einen Kunstgriff an, der auf ein Probieren hinauskommt: Wir bedenken, daß sich die Bedingung vereinfachen könnte, wenn man nicht die Funktion y selbst sucht, sondern ihr Produkt mit irgendeiner passend zu wählenden bekannten Funktion z von x. Erst der Erfolg wird zeigen, ob sich eine derartige Funktion z passend wählen läßt. Wir behalten uns also ihre besondere Annahme noch vor und fragen uns, welche Bedingung auf Grund von (9) das Produkt

$$u = yz \tag{10}$$

befriedigen muß, wenn zunächst z eine irgendwie angenommene Funktion von x ist. Da

$$u' = y'z + yz', \qquad u'' = y''z + 2y'z' + yz''$$

ist und da y'' der Bedingung (9) oder $y'' = ay + by'$ unterworfen ist, geht für u die Bedingung hervor:

$$u'' = (ay + by')z + 2y'z' + yz''.$$

Nach (10) ist aber

$$y = \frac{u}{z},$$

also:

$$y' = \frac{u'z - uz'}{z^2}.$$

Wird dieser Wert von y' und außerdem $y = u : z$ in die Formel für u'' eingesetzt, so kommt:

$$u'' = a u + b \frac{u' z - u z'}{z} + 2 \frac{(u' z - u z') z'}{z^2} + \frac{u z''}{z}.$$

Die Glieder auf der rechten Seite sind mit dem Faktor u oder u' behaftet. Ordnen wir sie danach, so kommt:

$$u'' = \left(a - b \frac{z'}{z} - 2 \frac{z'^2}{z^2} + \frac{z''}{z}\right) u + \left(b + 2 \frac{z'}{z}\right) u'.$$

Jetzt sind wir so weit vorbereitet, daß wir uns fragen können: Wie wird man die Funktion z von x zweckmäßig wählen, damit die in den Klammern stehenden Ausdrücke möglichst einfach werden? Halten wir Umschau unter den uns bekannten Funktionen, so bemerken wir, daß insbesondere die Exponentialfunktion

(11) $$z = e^{cx},$$

wo c eine Konstante sei, die Eigenschaft hat, daß $z' : z = c$ und $z'' : z = c^2$ ist. Wird diese Annahme (11) gemacht, so nimmt also die Bedingung für u die einfachere Form an:

$$u'' = (a - b c - c^2) u + (b + 2 c) u'.$$

Ja noch mehr: Wählen wir die Konstante $c = -\frac{1}{2} b$, so fällt auch das letzte Glied fort, und es bleibt die einfachere Bedingung übrig:

$$u'' = (a + \tfrac{1}{4} b^2) u.$$

Wegen (10) und (11) und $c = -\frac{1}{2} b$ hat sich somit ergeben:

Ist y eine Funktion von x, die der Bedingung (9) genügt, so stellt

(12) $$u = y e^{-\frac{1}{2} b x}$$

eine Funktion von x dar, die der einfacheren Bedingung

(13) $$\frac{d^2 u}{d x^2} = (a + \tfrac{1}{4} b^2) u$$

genügt.

Weil es die Rechnungen vereinfacht, sei die Wurzel aus dem absoluten Betrage der rechts auftretenden Konstanten $a + \frac{1}{4} b^2$ mit h bezeichnet. Dann ist

(14) $$a + \tfrac{1}{4} b^2 = \pm h^2$$

je nach dem Vorzeichen der linken Seite, und (13) lautet so:

(15) $$\frac{d^2 u}{d x^2} = \pm h^2 u.$$

Wenn wir unter v den ersten Differentialquotienten von u verstehen, ist die linke Seite von (15) der erste Differentialquotient von v. Also können wir (15) ersetzen durch:

$$\frac{du}{dx} = v \quad \text{und} \quad \frac{dv}{dx} = \pm h^2 u. \tag{16}$$

Wir suchen demnach Funktionen u und v von x, die diesen beiden Bedingungen genügen. Dabei sind drei Fälle zu unterscheiden:

Erster Fall: Gilt das obere Vorzeichen bei h^2, so folgt aus (16):

$$h\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} = h(hu + v), \qquad -h\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} = -h(-hu + v),$$

wofür wir auch schreiben können:

$$\frac{d(v + hu)}{dx} = h(v + hu), \qquad \frac{d(v - hu)}{dx} = -h(v - hu).$$

Also ist sowohl $v + hu$ als auch $v - hu$ eine Funktion von x, deren erster Differentialquotient gleich der Funktion selbst, multipliziert mit einer Konstanten h oder $-h$, ist. Hier können wir nun den Satz 7, S. 320, anwenden, indem wir die Funktion y des Satzes durch $v + hu$ oder $v - hu$ und die Konstante c des Satzes durch h oder $-h$ ersetzen, woraus sofort folgt:

$$v + hu = \text{konst.}\, e^{hx}, \qquad v - hu = \text{konst.}\, e^{-hx}.$$

Subtraktion beider Gleichungen voneinander liefert:

$$2hu = \text{konst.}\, e^{hx} - \text{konst.}\, e^{-hx}.$$

Dividieren wir noch mit $2h$, so ergibt sich für u ein Ausdruck von der Form:

$$u = \alpha e^{hx} + \beta e^{-hx}, \tag{17}$$

wo α und β Konstanten sind. Man möge von dieser Funktion u den zweiten Differentialquotienten ausrechnen, diesen und den Wert von u selbst in (15) einsetzen und sich überzeugen, daß der Bedingung (15) in der Tat genügt wird, wenn darin rechts das Pluszeichen steht.

Zweiter Fall: Wenn $h = 0$ ist, gibt (16) einfach $v = \text{konst.}$ und daher

$$u = \alpha x + \beta, \tag{18}$$

wo α und β Konstanten sind.

Dritter Fall: Gilt das untere Vorzeichen bei h^2, so kommen wir so zum Ziel: Nach der Kettenregel und nach (16) ist:

$$\frac{d(u^2)}{dx} = \frac{d(u^2)}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2u \cdot \frac{du}{dx} = 2u \cdot v,$$

$$\frac{d(v^2)}{dx} = \frac{d(v^2)}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = 2v \cdot \frac{dv}{dx} = 2v \cdot (-h^2 u),$$

woraus folgt:

$$h^2 \frac{d(u^2)}{dx} + \frac{d(v^2)}{dx} = 0 \qquad \text{oder:} \qquad \frac{d(h^2 u^2 + v^2)}{dx} = 0.$$

Dies bedeutet, daß $h^2 u^2 + v^2$ eine Konstante ist und zwar offenbar eine positive Konstante. Wir wollen sie daher k^2 nennen. Aus $h^2 u^2 + v^2 = k^2$ folgt nun

$$\left(\frac{hu}{k}\right)^2 + \left(\frac{v}{k}\right)^2 = 1,$$

so daß es nach Satz 5, S. 386, eine Größe w derart gibt, daß

$$\frac{hu}{k} = \sin w, \qquad \frac{v}{k} = \cos w$$

oder:

(19)
$$u = \frac{k}{h} \sin w, \qquad v = k \cos w$$

ist. Da u und v Funktionen von x sind, gilt dasselbe von w. Aus den Formeln (19) folgt:

$$\frac{dv}{dx} = k\frac{d\cos w}{dx} = k\frac{d\cos w}{dw} \cdot \frac{dw}{dx} = -k\sin w\frac{dw}{dx} = -hu\frac{dw}{dx}$$

oder, da die linke Seite nach (16) gleich $-h^2 u$ ist:

$$\frac{dw}{dx} = h, \qquad \text{d. h.} \qquad w = hx + \text{konst.},$$

mithin nach der ersten Formel (19):

$$u = \frac{k}{h} \sin(hx + \text{konst.}).$$

Weil wir den Sinus der Summe nach Satz 16, S. 411, zerlegen können, nimmt u die Form an:

(20)
$$u = \alpha \sin hx + \beta \cos hx,$$

wo α und β Konstanten sind. Man möge den zweiten Differentialquotienten von u berechnen, diesen und den Wert (20) selbst in (15) einsetzen und sich davon überzeugen, daß der Bedingung (15) in der Tat genügt wird, wenn darin rechts das Minuszeichen steht.

Somit hat sich ergeben:

Satz 20: Ist u eine Funktion von x, deren zweiter Differentialquotient ein konstantes Vielfaches der Funktion

selbst ist, so daß also entweder

$$\frac{d^2u}{dx^2} = h^2 u \quad \text{oder} \quad \frac{d^2u}{dx^2} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d^2u}{dx^2} = -h^2 u \quad (h = \text{konst.})$$

ist, so hat u im ersten Fall die Form:

$$u = \alpha e^{hx} + \beta e^{-hx},$$

im zweiten die Form:

$$u = \alpha x + \beta$$

und im dritten die Form:

$$u = \alpha \sin h x + \beta \cos h x .$$

In allen Fällen sind α und β irgendzwei Konstanten.

Beiläufig machen wir darauf aufmerksam, daß die Form von u im ersten Fall mit Hilfe der hyperbolischen Funktionen, vgl. (13) auf S. 359, auch so geschrieben werden kann:

$$u = \text{konst.}\, \mathfrak{Sin}\, h x + \text{konst.}\, \mathfrak{Cof}\, h x , \tag{21}$$

eine Form, die, verglichen mit der dritten, wieder das schon auf S. 359 und 405 erwähnte Entsprechen zwischen den goniometrischen und hyperbolischen Funktionen zeigt.

Nun muß man sich daran erinnern, daß die Bestimmung der Funktionen u nur ein Mittel zu dem Zweck war, diejenigen Funktionen y zu bekommen, die einer Bedingung von der Form (9) genügen. Wir hatten u durch (12) eingeführt, und danach ist

$$y = u e^{\frac{1}{2} b x}.$$

Außerdem war $a + \frac{1}{4} b^2$ nach (14) mit $\pm h^2$ bezeichnet worden. Aus Satz 20 ergibt sich demnach schließlich

Satz 21: Ist y eine Funktion von x, deren zweiter Differentialquotient sich linear mit konstanten Koeffizienten a und b aus der Funktion selbst und ihrem ersten Differentialquotienten zusammensetzt, d. h. ist

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a y + b \frac{dy}{dx} \quad (a, b = \text{konst.}),$$

so hat y eine der drei folgenden Formen:

Im Fall $a + \frac{1}{4} b^2 = h^2 > 0$ ist: $y = e^{\frac{1}{2} b x} (\alpha e^{hx} + \beta e^{-hx})$.

Im Fall $a + \frac{1}{4} b^2 = 0$ ist: $y = e^{\frac{1}{2} b x} (\alpha x + \beta)$.

Im Fall $a + \frac{1}{4} b^2 = -h^2 < 0$ ist: $y = e^{\frac{1}{2} b x} (\alpha \sin h x + \beta \cos h x)$.

In allen Fällen sind α und β irgendzwei Konstanten.

Die Sätze 20 und 21 werden wir bei den beiden folgenden Bewegungsaufgaben anwenden.

2. Beispiel: Auf eine punktförmige Masse m übe ein fester Punkt O eine zur Entfernung s von O proportionale Anziehungskraft aus. Zu Anfang ($t = 0$) sei das Mobil in der Entfernung a_0 von O und habe die Geschwindigkeit Null. Offenbar bleibt m beständig auf der Geraden durch O und durch diese Anfangslage. Demnach liegt eine geradlinige Bewegung vor, bei der die Beschleunigung proportional zur Entfernung s von O, dem Weg ist:

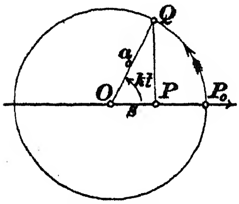


Fig. 358.

$$\frac{d^2 s}{d t^2} = c s \quad (c = \text{konst.}).$$

Ist die Konstante c positiv, so hat die Kraft die Richtung, in der s wächst, d. h. von O fort, ist c negativ, so wird dagegen m von O angezogen. Dies ist der Fall, den wir betrachten. Wegen $c < 0$ können wir $c = -k^2$ setzen. Nach dem dritten Fall von Satz 20, worin jetzt s, t und k an die Stelle von u, x und h treten, ergibt sich demnach für den Weg s und die Geschwindigkeit v:

$$s = \alpha \sin k t + \beta \cos k t, \qquad v = \frac{d s}{d t} = k(\alpha \cos k t - \beta \sin k t).$$

Weil $s = a_0$ und $v = 0$ für $t = 0$ sein soll, ist $\beta = a_0$ und $\alpha = 0$. Also kommt einfacher:

$$(22) \qquad s = a_0 \cos k t, \qquad v = -k a_0 \sin k t.$$

Dieser Fall liegt vor, wenn das Mobil m mit dem Punkt O elastisch verbunden ist, weil dann nach den Gesetzen der Elastizitätslehre die Anziehung proportional zur Entfernung von O ist. Nach S. 425 macht das Mobil einfache Schwingungen. Wenn ein Punkt Q den Kreis um O mit dem Radius a_0 von der Anfangslage P_0 des Mobils aus gleichförmig beschreibt und dabei einen Umlauf in der Zeit $2\pi : k$ vollendet, macht der Fußpunkt P des Lotes von Q auf die Bahn $O P_0$ gerade die betrachtete Bewegung des Mobils m, siehe Fig. 358. Der Unterschied gegenüber der Betrachtung auf S. 424 u. f. liegt bloß darin, daß die Zeit von einem anderen Augenblick an gerechnet ist. Die Beschleunigung ist $p = -k^2 s$.

3. Beispiel: Die soeben betrachteten Schwingungen sollen durch einen geringen Widerstand gedämpft werden, und zwar sei der Widerstand zur Geschwindigkeit v proportional. Dann ist nicht $p = -k^2 s$, sondern

$$p = -k^2 s - c v$$

die Beschleunigung, wobei c eine gewisse verhältnismäßig kleine positive Konstante bedeutet. Wir können hierfür nach (1) schreiben:

$$(23) \qquad \frac{d^2 s}{d t^2} = -k^2 s - c \frac{d s}{d t}.$$

Hier ist nun Satz 21 anzuwenden. Man ersetze nämlich darin x, y, a, b durch t, s, $-k^2$, $-c$. Die im Satz auftretende Größe $a + \frac{1}{4} b^2$ ist gleich $-k^2 + \frac{1}{4} c^2$ und fällt negativ aus, weil c klein sein soll, so daß der dritte Fall des Satzes vorliegt. Deshalb kommt:

$$s = e^{-\frac{1}{2} c t} (\alpha \sin h t + \beta \cos h t)$$

Hierbei ist h die positive Wurzel

$$h = \sqrt{k^2 - \tfrac{1}{4} c^2}. \tag{24}$$

Die Konstanten α und β hängen vom Anfangszustand ab, den wir wie im vorigen Beispiel annehmen wollen, so daß $s = a_0$ für $t = 0$ sei, d. h. $\beta = a_0$. Da die Geschwindigkeit

$$v = \frac{ds}{dt} = e^{-\frac{1}{2}ct}[-\tfrac{1}{2}c(\alpha \sin ht + a_0 \cos ht) + h(\alpha \cos ht - a_0 \sin ht)]$$

für $t = 0$ gleich Null sein soll, ist ferner $\alpha = \frac{1}{2} c a_0 : h$. Demnach kommt:

$$s = \frac{a_0}{h} e^{-\frac{1}{2}ct}(\tfrac{1}{2} c \sin ht + h \cos ht).$$

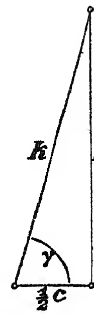


Fig. 359.

Weil aus $\frac{1}{2} c$, h und k nach (24) ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse k gebildet werden kann, siehe Fig. 359, liegt es nahe, den der Kathete h gegenüberliegenden Winkel γ dieses Dreiecks einzuführen. Er ist infolge der Kleinheit von c nahezu ein rechter. Wegen $\frac{1}{2} c = k \cos \gamma$ und $h = k \sin \gamma$ ergibt sich dann nach Satz 16, S. 411, die bequemere Formel:

$$s = a_0 e^{-\frac{1}{2}ct} \frac{\sin(ht + \gamma)}{\sin \gamma}. \tag{25}$$

Diese **gedämpften Schwingungen** wollen wir zeichnen: Ist P_0 die Anfangslage des Mobils, also $OP_0 = a_0$, so tragen wir an OP_0 den kleinen Komplementwinkel $\frac{1}{2}\pi - \gamma$ von γ an und errichten in P_0 auf OP_0 das Lot, das den freien Scheitel des Winkels in Q_0 treffe, siehe Fig. 360. Dann benutzen wir OQ_0 als Anfangsstrahl von Polarkoordinaten φ, r (siehe S. 344) und zeichnen die in Polarkoordinaten durch die Funktion

$$r = \frac{a_0}{\sin \gamma} e^{-\frac{c}{2h}\varphi}$$

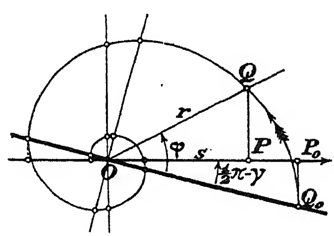


Fig. 360.

gegebene **logarithmische Spirale** (siehe S. 350 u. f.) für von $\varphi = 0$ an wachsende Winkel. Sie geht von Q_0 aus, wird immer enger, da der Exponent von e einen negativen Koeffizienten hat, und durchsetzt die Radienvektoren nach S. 350 unter dem Winkel $\pi - \gamma$. **Demnach hat sie in Q_0 die Gerade Q_0P_0 als Tangente.** Nun durchlaufe ein Punkt Q von Q_0 aus die Spirale so, daß sich der Radiusvektor OQ **gleichförmig** um O dreht und einen vollen Umlauf in der Zeit $2\pi : h$ vollendet. Zur Zeit t ist dann der Winkel φ des Radiusvektors OQ mit dem Anfangsstrahl gleich ht, also der Radiusvektor

$$r = \frac{a_0}{\sin \gamma} e^{-\frac{1}{2}ct},$$

nach (25) daher $s = r \sin(\varphi + \gamma)$, d. h. **die Lage P des Mobils m zur Zeit t ergibt sich als Fußpunkt des Lotes von Q auf die Gerade OP_0.** Man erkennt hieraus, daß das Mobil längs dieser Geraden um O mit immer kürzeren Ausschlägen hin und her schwingt, während die Zeitdauer zwischen zwei aufeinanderfolgenden größten Ausschlägen nach verschiedenen Seiten hin immer gleich $\pi : h$ bleibt, weshalb die Schwingungen **isochron** heißen (vgl. das 5. Beispiel, S. 292).

Aus der Figur entnimmt man leicht die Winkel φ für die größten Ausschläge und für die Durchgänge durch O. Nach (25) ist die Geschwindigkeit:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{a_0 e^{-\frac{1}{2}ct}}{\sin\gamma}\left[-\tfrac{1}{2}c\sin(ht+\gamma) + h\cos(ht+\gamma)\right],$$

also wegen $\frac{1}{2}c = k\cos\gamma$ und $h = k\sin\gamma$ nach Satz 16, S. 411:

$$(26) \qquad v = -k a_0 e^{-\frac{1}{2}ct}\frac{\sin ht}{\sin\gamma}.$$

Aus den Werten (25) und (26) von s und v setzt sich nach (23) die Beschleunigung p in der Form $-k^2 s - cv$ als Funktion von t zusammen:

$$p = \frac{k^2 a_0 e^{-\frac{1}{2}ct}}{\sin\gamma}\left[-\sin(ht+\gamma) + 2\cos\gamma\sin ht\right],$$

wofür sich nach Satz 16, S. 411, schreiben läßt:

$$(27) \qquad p = k^2 a_0 e^{-\frac{1}{2}ct}\frac{\sin(ht-\gamma)}{\sin\gamma}.$$

Nach (25) ist die Entfernung s gleich Null, wenn $\sin(ht+\gamma) = 0$ ist, nach (26) die Geschwindigkeit v gleich Null, wenn $\sin ht = 0$ ist, und nach (27) die Beschleunigung p gleich Null, wenn $\sin(ht-\gamma) = 0$ ist. Hieraus lassen sich die zugehörigen Zeiten bestimmen. Sie sind in der Tafel auf der nächsten Seite zusammengestellt. Dabei ist es zweckmäßig, die Konstante

$$(28) \qquad e^{-\frac{c\pi}{2h}} = \varkappa$$

zu setzen.

Eine andere graphische Darstellung geht hervor, wenn man die Zeit t als Abszisse und die Entfernung s als Ordinate benutzt, siehe Fig. 361, wobei sich die Bildkurve der Funktion (25) als wellenförmige Linie mit immer flacher werdenden

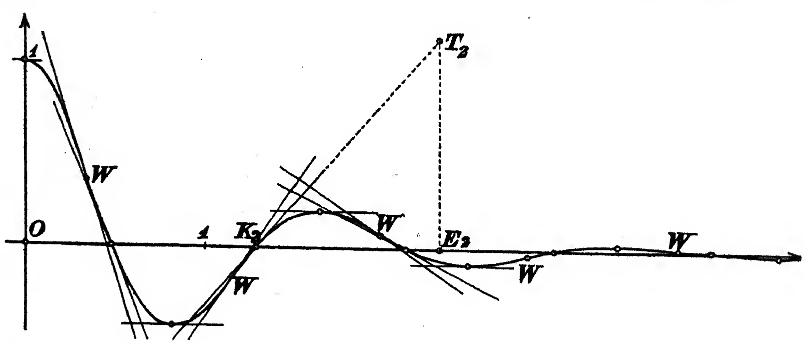


Fig. 361.

Bergen und Tälern zeigt. Sie ist nach S. 423 als **gedämpfte Sinuswelle** zu bezeichnen. Die Abszissen der **Gipfel- und Talpunkte** stehen unter 1. und 4. in der t-Spalte der Tafel; es sind die ganzen Vielfachen von $\pi : h$. Die Punkte W gehören zu den Abszissen t, für die $p = 0$, d. h. der zweite Differentialquotient von s nach t gleich Null ist, siehe unter 2. und 5. Sie sind nach S. 459 die **Wendepunkte** der Kurve.

Gedämpfte Schwingungen.

	t	s	v	p
1. Größte positive Ausschläge	$2n\frac{\pi}{h}$	$a_0 \varkappa^{2n}$	0	$-k^2 a_0 \varkappa^{2n}$
2. Beschleunigung Null mit negativer Geschwindigkeit	$\frac{\gamma}{h}+2n\frac{\pi}{h}$	$2a_0 \cos\gamma\, e^{-\frac{c\gamma}{2h}} \varkappa^{2n}$	$-k a_0 e^{-\frac{c\gamma}{2h}} \varkappa^{2n}$	0
3. Durchgang durch O mit negativer Geschwindigkeit	$\frac{\pi-\gamma}{h}+2n\frac{\pi}{h}$	0	$-k a_0 e^{-\frac{c(\pi-\gamma)}{2h}} \varkappa^{2n}$	$2k^2 a_0 e^{-\frac{c(\pi-\gamma)}{2h}} \varkappa^{2n}$
4. Größte negative Ausschläge	$(2n+1)\frac{\pi}{h}$	$-a_0 \varkappa^{2n+1}$	0	$k^2 a_0 \varkappa^{2n+1}$
5. Beschleunigung Null mit positiver Geschwindigkeit	$\frac{\gamma}{h}+(2n+1)\frac{\pi}{h}$	$-2a_0 \cos\gamma\, e^{-\frac{c\gamma}{2h}} \varkappa^{2n+1}$	$k a_0 e^{-\frac{c\gamma}{2h}} \varkappa^{2n+1}$	0
6. Durchgang durch O mit positiver Geschwindigkeit	$\frac{\pi-\gamma}{h}+(2n+1)\frac{\pi}{h}$	0	$k a_0 e^{-\frac{c(\pi-\gamma)}{2h}} \varkappa^{2n+1}$	$-2k^2 a_0 e^{-\frac{c(\pi-\gamma)}{2h}} \varkappa^{2n+1}$

Hierin bedeutet n eine positive ganze Zahl, also 0, 1, 2, 3 usw.

Der erste hat die Abszisse $\gamma : h$. Die Abszissen der übrigen gehen aus dieser durch Addition der ganzen Vielfachen von $\pi : h$ hervor. Die Wendepunkte sind nicht die Knotenpunkte, d. h. Schnittpunkte der Kurve mit der Abszissenachse. Die Knotenpunkte sind vielmehr durch die Bedingung $s = 0$ gekennzeichnet, siehe unter 3. und 6. Der erste (absteigende) Knoten hat die Abszisse $(\pi - \gamma) : h$. Die Abszissen der übrigen gehen daraus durch Addition der ganzen Vielfachen von $\pi : h$ hervor.

Was die Ordinaten der Gipfel- und Talpunkte und der Wendepunkte betrifft, so entnimmt man der s-Spalte der Tafel, daß sie je eine geometrische Progression (vgl. S. 290) bilden, deren Glieder aus den Anfangswerten

$$a_0 \quad \text{und} \quad 2\, a_0 \cos\gamma\, e^{-\frac{c\gamma}{2h}}$$

durch fortwährende Multiplikation mit $-\varkappa$ hervorgehen. Zu ihrer Ermittelung zieht man eine Gerade g, siehe Fig. 362, trägt auf ihr $AE = 1$ und $AK = \varkappa$ ab, legt durch E die Gerade unter 45^0, durch K die unter 90^0 und verbindet den Schnittpunkt beider mit A durch die Gerade h. Wenn man die angedeutete Zickzackkonstruktion ausführt, sind die auf g von A aus bis zu den Punkten des Zickzacks gemessenen Strecken gleich $1, \varkappa, \varkappa^2, \varkappa^3 \ldots$ In Fig. 361 ist $a_0 = 1$ gewählt, so daß Fig. 362 auf g sofort die absolut gemessenen Ordinaten der Gipfel- und Talpunkte gibt. Die Ordinate des ersten Wendepunktes wird rechnerisch bestimmt und als Strecke von A aus auf g aufgetragen. Von ihrem Endpunkt aus wird der Zickzack parallel zum angegebenen gezeichnet. Die Strecken von A bis zu den Zickzackpunkten auf g sind dann die absolut genommenen Ordinaten der Wendepunkte. Die Steigungen der Wendepunkte und ebenso die der Knotenpunkte werden durch $v = ds : dt$ in der v-Spalte unter 2., 5. und 3., 6. angegeben und bilden ebenfalls je eine geometrische Progression mit dem konstanten Faktor $-\varkappa$. Sie werden also auch mit Hilfe einer Konstruktion wie in Fig. 362 durch Strecken dargestellt, nachdem man die absoluten Werte ihrer Anfangsglieder berechnet hat. In Fig. 361 ist die Tangentenkonstruktion für den zweiten Knotenpunkt K_2 angegeben: Hier ist $K_2E_2 = 1$ und E_2T_2 gleich der mittels der Hilfsfigur als Strecke bestimmten Steigung.

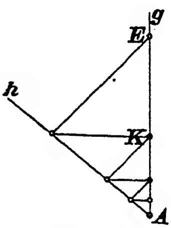


Fig. 362.

Die Ordinaten der Gipfel- und Talpunkte zeigen, daß das logarithmische Dekrement aufeinanderfolgender größter Ausschläge konstant, nämlich gleich $-\frac{1}{2} c\pi : h$, ist. Vgl. 5. Beispiel, S. 292.

Den Figuren 359—362 sind die Annahmen $k = 4$, $c = 2$, $a_0 = 1$ zugrunde gelegt. Die Einheit ist in allen, mit Ausnahme der verkleinerten Fig. 359, dieselbe. Dabei ist $h = \sqrt{15} = 3{,}873$, $\gamma = 1{,}318$ (im Bogenmaß) oder $75\frac{1}{2}{}^0$, $\varkappa = 0{,}445$. Absichtlich haben wir c ziemlich groß gewählt, um die Wirkung der Dämpfung recht deutlich zu machen.

§ 5. Krummlinige Bewegungen.

Ein punktförmiges Mobil m beschreibe eine krumme Bahn in der Ebene und sei zur Zeit t an einer Stelle P mit den Koordinaten x und y. Diese Koordinaten x und y sind dann Funktionen der Zeit t, etwa:

(1) $$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t).$$

Gelegentlich (S. 437) machten wir schon auf diese Art der Darstellung einer Kurve durch zwei Funktionen aufmerksam. Während wir sonst immer y als Funktion von x annahmen, um eine Bildkurve durch eine Gleichung $y = f(x)$ festzulegen, sind jetzt x und y als Funktionen einer dritten Veränderlichen t gegeben. Aber auch jetzt ist y eine Funktion von x, denn die Auflösung der ersten Gleichung (1) nach t ergibt für t eine Funktion von x, und wenn diese Funktion in die zweite Gleichung (1) eingesetzt wird, geht schließlich für y eine Funktion von x hervor.

Für die geometrische Natur der Kurve, die ein Punkt $(x; y)$ infolge der Vorschriften (1) beschreibt, ist es gleichgültig, ob wir t als die Zeit oder als sonst irgendeine unabhängige Veränderliche deuten. Es empfiehlt sich oft, Kurven auf diese Art darzustellen, weil unter Umständen eine schwierige Gleichung $y = f(x)$ durch zwei einfachere Gleichungen $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ersetzt werden kann.

1. Beispiel: Eine Ellipse mit den Halbachsen a und b kann nach dem auf S. 186 angegebenen Verfahren aus konzentrischen Kreisen mit den Radien a und b hergestellt werden, wie es Fig. 133 zeigte. Wenn wir darin $\sphericalangle A_1 O U = t$ setzen, wird $O Q = O U \cos t = a \cos t$ und $Q P = S V = O V \sin t = b \sin t$. Also hat der Ellipsenpunkt die Koordinaten

$$x = a \cos t, \qquad y = b \sin t.$$

Durchläuft t alle Werte von 0 bis 2π, so beschreibt der Punkt $(x; y)$ die Ellipse einmal. Während sonst die Ellipse durch die in x und y quadratische Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dargestellt wurde, siehe (1) auf S. 185, liegt hier eine oft bequemere Darstellung mittels einer Hilfsveränderlichen t vor. Deutet man t als die Zeit, so heißt dies, daß sich der Radius $O U$ in Fig. 133 gleichförmig um O so dreht, daß er eine volle Umdrehung in der Zeit 2π vollendet.

2. Beispiel: Zwei Stäbe $O U$ und $U P$ seien in der Ebene so beweglich, daß sich $O U$ um einen festen Punkt O und $U P$ um den Endpunkt U von $O U$ drehen kann. $O U$ drehe sich mit einer konstanten Geschwindigkeit um O und $U P$ mit einer konstanten Geschwindigkeit um U. Die Bahnkurve von P heißt eine Radlinie oder Trochoide. Im Laufe der Bewegung werden O, U, P einmal in gerader Linie liegen. Wir nehmen diese Lage $O U_0 P_0$, siehe Fig. 363, als positive x-Achse an. Die Bahn von P ist bestimmt, sobald das Verhältnis $n : m$ der beiden konstanten Drehungsgeschwindigkeiten gegeben wird, wobei n oder m positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem sich $O U$ oder $U P$ im positiven oder negativen Sinn dreht. $O U$ beschreibe in der Zeit t den Winkel $n t$, also $U P$ den Winkel $m t$. Ist $O U = a$, $U P = b$ und die Längeneinheit zugleich die x- und y-Einheit, so

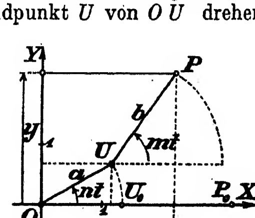


Fig. 363.

liest man aus der Figur als Koordinaten von P ab:

$$x = a\cos n t + b\cos m t\,, \qquad y = a\sin n t + b\sin m t\,.$$

Diese Gleichungen geben für jeden Wert von t einen Punkt $(x; y)$ der Kurve. Um die Kurve in der Form $y = f(x)$ darzustellen, müßte man t aus der ersten Gleichung als Funktion von x berechnen, was unmöglich ist, wenn das Verhältnis $n:m$ nicht gleich dem von zwei ganzen Zahlen ist. — Die Kurven, die der Techniker Zykloiden nennt, sind diejenigen, die in der Mathematik Trochoiden heißen. Unter Zykloiden versteht der Mathematiker nur die Bahnen der Punkte auf dem Umfang eines Kreises, der auf einem anderen Kreise abrollt. Sie gehören zwar, wie man leicht einsieht, auch zu den Trochoiden, aber nicht jede Trochoide ist eine derartige Kurve.

Das letzte Beispiel zeigt, daß die Darstellungsform

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t) \tag{1}$$

für manche Kurven geradezu die einzig mögliche ist. Wir haben nun zu erörtern, wie man auf Grund dieser Darstellung (1) einer Kurve die Steigung, den Krümmungsradius usw. berechnet. Dabei soll im Folgenden der Akzentstrich die Differentiation nach t andeuten, also z. B. φ' der erste Differentialquotient $d\varphi : dt$ und φ'' der zweite Differentialquotient $d^2\varphi : dt^2$ sein. Aus (1) folgt:

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'\,, \qquad \frac{dy}{dt} = \psi'\,. \tag{2}$$

Die Steigung $dy : dx$ der Kurve ergibt sich, wenn man die zweite Formel mit der ersten dividiert:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'}{\varphi'}\,. \tag{3}$$

Ferner ist:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\,\dfrac{dy}{dx}}{dx}\,.$$

Dividiert man Zähler und Nenner mit dt, so kommt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\,\dfrac{dy}{dx} : dt}{dx : dt}\,.$$

Nach (3) kann man hierin $dy : dx$ durch $\psi' : \varphi'$, nach (2) außerdem $dx : dt$ durch φ' ersetzen. Also kommt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\,\dfrac{\psi'}{\varphi'} : dt}{\varphi'} = \frac{1}{\varphi'}\,\frac{d\,\dfrac{\psi'}{\varphi'}}{dt}\,.$$

Die Bruchregel ergibt nun:

$$\frac{d\,\dfrac{\psi'}{\varphi'}}{dt} = \frac{\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''}{\varphi'^2}\,,$$

so daß als zweiter Differentialquotient von y nach x hervorgeht:

(4)
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\varphi' \psi'' - \psi' \varphi''}{\varphi'^3}.$$

Ferner ist

$$\frac{d^3 y}{d x^3} = \frac{d \frac{d^2 y}{d x^2}}{d x} = \frac{d \frac{d^2 y}{d x^2} : d t}{d x : d t},$$

so daß sich infolge von (4) und der ersten Gleichung (2) ergibt:

(5)
$$\frac{d^3 y}{d x^3} = \frac{(\varphi' \psi''' - \psi' \varphi''') \varphi' - 3 (\varphi' \psi'' - \psi' \varphi'') \varphi''}{\varphi'^5}.$$

Entsprechend kann man die höheren Differentialquotienten von y nach x berechnen.

Im Satz 10, S. 478, und Satz 12, S. 483, bedeuteten nun y' und y'' die Differentialquotienten (3) und (4), da damals der Akzent die Differentiation nach x ausdrückte (nicht, wie jetzt, die nach t). Setzen wir also die Werte (3) und (4) statt y' und y'' in jene Sätze ein, so kommt:

Satz 22: Wird eine Kurve in der Ebene mittels einer Hilfsveränderlichen t in der Form

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

dargestellt, so hat sie an der Stelle, die zu einem bestimmten Werte von t gehört, die Krümmung

$$k = \frac{\varphi' \psi'' - \psi' \varphi''}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}^3}.$$

Der Krümmungsradius hat den hierzu reziproken Wert und der Krümmungsmittelpunkt die Koordinaten:

$$\xi = \varphi - \psi' \frac{\varphi'^2 + \psi'^2}{\varphi' \psi'' - \psi' \varphi''}, \qquad \eta = \psi + \varphi' \frac{\varphi'^2 + \psi'^2}{\varphi' \psi'' - \psi' \varphi''}.$$

Vorausgesetzt wird dabei, daß die x-Einheit der y-Einheit gleich sei.

3. Beispiel: Rollt ein Kreis vom Radius a auf einer Geraden ab, so heißen die Bahnen aller mit dem Kreis fest verbundenen Punkte Trochoiden mit gerader Grundlinie, insbesondere die Bahnen derjenigen Punkte, die auf dem Kreisumfange liegen, gewöhnliche Zykloiden. Dagegen sprachen wir im 2. Beispiele von den Trochoiden mit kreisförmiger Grundlinie. Wir wollen die gewöhnlichen Zykloiden untersuchen. Der die Kurve beschreibende Punkt wird gelegentlich auf die Grundlinie selbst kommen. Wir wählen diese Stelle als Anfangspunkt O und die Grundlinie als positive x-Achse nach der Seite hin, nach der der Kreis rollt, siehe Fig. 364. Ist der Kreis aus der Anfangslage k_0 in irgendeine Lage k übergegangen,

so ist derjenige Punkt, der zuerst in O lag, an eine Stelle P des Kreises k gelangt, und die Strecke von O bis Q muß gleich dem Bogen von P bis Q sein, wenn Q den Punkt bedeutet, in dem k die x-Achse berührt. Bezeichnet man mit M den Mittel-

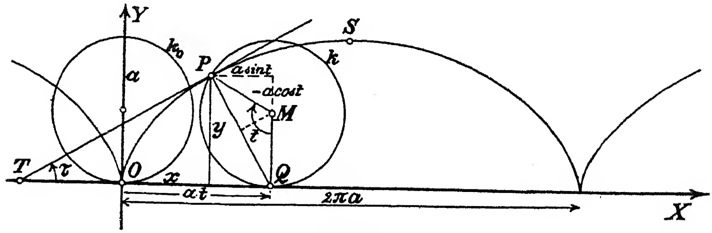


Fig. 364.

punkt von k und setzt man $\sphericalangle QMP = t$, so ist der Bogen $PQ = at$, wenn t im Bogenmaß gemessen wird, also auch die Strecke $OQ = at$. Die Koordinaten x und y von P ergeben sich daraus, daß die Projektion von MP oder a auf die x-Achse gleich $a \sin t$ und die auf die y-Achse gleich $a \cos t$ ist. Weil aber in der Figur $\cos t$ negativ ist, liest man aus ihr ab:

$$x = at - a \sin t, \qquad y = a - a \cos t.$$

Mithin stellen die Gleichungen:

$$(6) \qquad x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t)$$

die gewöhnliche Zykloide mittels der Hilfsveränderlichen t dar. Diese Hilfsveränderliche heißt der Wälzungswinkel. Wächst er um 2π, so nimmt x um $2\pi a$ zu, während y wieder den alten Wert erreicht. Das zu den Werten t von 0 bis 2π gehörige Stück der Kurve ist daher kongruent mit dem zu den Werten t von 2π bis 4π gehörigen Stück, indem es in dieses durch Verschiebung längs der x-Achse um die Strecke $2\pi a$, gleich dem Umfange des Kreises, übergeht. Dasselbe gilt für die folgenden Stücke, so daß die Zykloide eine periodische Kurve ist, deren Periode gleich dem Umfange des rollenden Kreises ist. Hiernach dürfen wir uns auf die Werte des Wälzungswinkels t von 0 bis 2π beschränken. Nach (6) ist:

$$\varphi = a(t - \sin t), \qquad \varphi' = a(1 - \cos t), \qquad \varphi'' = a \sin t,$$
$$\psi = a(1 - \cos t), \qquad \psi' = a \sin t, \qquad \psi'' = a \cos t.$$

Daher ergibt sich nach (3) mit Rücksicht auf Satz 19, S. 413, die Steigung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2} t.$$

Da $\sphericalangle OQP$ das Komplement von $\sphericalangle PQM$ und andererseits $\sphericalangle PQM$ das Komplement von $\frac{1}{2}t$ ist, wird $\sphericalangle OQP = \frac{1}{2}t$. Wenn die Tangente von P die x-Achse in T trifft, ist der Tangentenwinkel $\tau = \sphericalangle QTP$. Nun muß $\operatorname{tg}\tau = dy : dx$ sein. Demnach ist $\operatorname{tg}\tau$ gleich dem Kotangens des Winkels OQP, d. h. die Tangente TP von P ist senkrecht zur Verbindungslinie von P mit demjenigen Punkt Q, in dem der rollende Kreis augenblicklich die x-Achse berührt. Die Gerade QP ist also die Normale des Zykloidenpunktes P.

Ferner ist:

$$\varphi'^2 + \psi'^2 = a^2 [\sin^2 t + (1 - \cos t)^2] = 2a^2(1 - \cos t),$$
$$\varphi'\psi'' - \psi'\varphi'' = a^2 [\cos t(1 - \cos t) - \sin^2 t] = -a^2(1 - \cos t),$$

so daß sich aus Satz 22 als Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes K von P ergeben:

$$\xi = a(t + \sin t), \qquad \eta = -a(1 - \cos t). \tag{7}$$

Diese Gleichungen stellen nach S. 493 die Evolute der Zykloide mittels der Hilfsveränderlichen t dar. Sie erinnern an die Gleichungen (6) der Zykloide selbst. In der Tat ist die Evolute auch eine Zykloide. Zum Beweise dieser Behauptung benutzen wir für die Evolute ein neues Achsenkreuz: Zur höchsten Stelle S des betrachteten Zykloidenbogens, die übrigens nach S. 485 ein Scheitel ist, weil ihre Ordi-

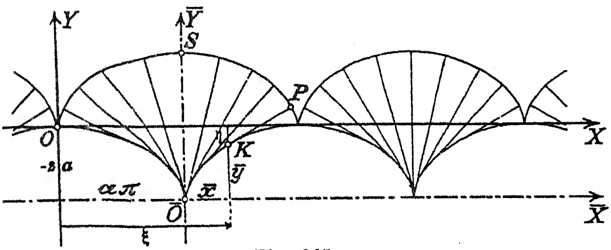


Fig. 365.

nate den Bogen symmetrisch teilt, gehört der Wert $t = \pi$, also nach (7) der Krümmungsmittelpunkt mit den Koordinaten $a\pi$ und $-2a$. Diesen Punkt wählen wir als neuen Anfangspunkt $\bar{O}$, siehe Fig. 365, während wir die neuen Achsen parallel zu den alten Achsen ziehen. Hat nun der Punkt K, dessen Koordinaten die Werte (7) haben, im neuen Achsenkreuze die Koordinaten $\bar{x}$ und $\bar{y}$, so ist

$$\bar{x} = \xi - a\pi, \qquad \bar{y} = \eta + 2a,$$

so daß (7) gibt:

$$\bar{x} = a(t - \pi + \sin t), \qquad \bar{y} = a(1 + \cos t).$$

Setzen wir $t - \pi = \bar{t}$, so wird $t = \bar{t} + \pi$, also $\sin t = -\sin \bar{t}$, $\cos t = -\cos \bar{t}$. Mittels der neuen Hilfsveränderlichen $\bar{t}$ stellt sich demnach die Evolute der Zykloide im neuen Achsenkreuze so dar:

$$\bar{x} = a(\bar{t} - \sin \bar{t}), \qquad \bar{y} = a(1 - \cos \bar{t}).$$

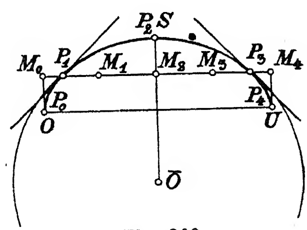


Fig. 366.

Die Übereinstimmung dieser Formeln mit (6), abgesehen von den geänderten Bezeichnungen, lehrt: **Die Evolute einer gewöhnlichen Zykloide ist eine mit ihr kongruente Zykloide.** Sie ist in Fig. 365 die untere Kurve.

Will man einen Zykloidenbogen zeichnen, so verfährt man wie in Fig. 366: Man bestimmt die fünf Punkte P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, die zu $t = 0, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ gehören. Die zugehörigen erzeugenden Kreise haben Mittelpunkte M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 in gleichen Abständen voneinander, und P_1 und P_3 liegen auf der Geraden $M_0 M_4$. Die Tangenten in P_1 und P_2 sind unter 45^0 geneigt. Außerdem wird der Krümmungsmittelpunkt $\bar{O}$ des Scheitels S oder P_2 gefunden, wenn man $4a = 4OM_0$ von P_2 aus nach unten abträgt. Der Krümmungskreis um O durch P_2 schmiegt sich der Kurve in der Umgebung des Scheitels sehr innig an. Da sich der Kurvenbogen periodisch wiederholt, entstehen in O und U (oder P_0 und P_4) Spitzen, die man besser in Fig. 364 und 365 sieht.

Wieder liege eine Kurve c in der allgemeinen Darstellungsform (1) vor. Jetzt soll die Fläche F berechnet werden, die vom Radiusvektor, d. h. von dem Strahl überstrichen wird, der den Anfangspunkt O mit dem Kurvenpunkte verbindet. Dabei möge die Hilfsveränderliche von t_0 bis t wachsen, so daß der Punkt ein Bogenstück $P_0 P$ der Kurve c durchläuft. Siehe Fig. 367. Die Fläche F ist eine Funktion von t. Wenn t um dt zunimmt, wobei P bis P' wandere, wächst die Fläche F um ihr Differential dF, das gleich dem Inhalte des unendlich kleinen Dreiecks OPP' ist. Die Lote von P und P' auf die x-Achse mögen die Fußpunkte Q und Q' haben. Nun ist:

$$dF = \triangle\, OPP' = \triangle\, OQP + \text{Trapez } QQ'P'P - \triangle\, OQ'P'.$$

Wegen $OQ = x$, $QQ' = dx$, $QP = y$, $Q'P' = y + dy$ folgt hieraus:

$$dF = \tfrac{1}{2}xy + \tfrac{1}{2}dx(2y + dy) - \tfrac{1}{2}(x + dx)(y + dy) = \tfrac{1}{2}(y\,dx - x\,dy).$$

Man tut nun gut, ein derartiges Flächenstück positiv zu rechnen, sobald die Drehung des Radiusvektors von OP nach OP' hin im positiven Sinn stattfindet. In Fig. 367 ist aber die Drehung negativ. Daher ist statt der letzten Formel zu setzen:

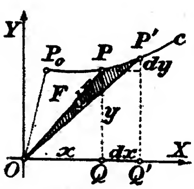


Fig. 367.

$$dF = \tfrac{1}{2}(x\,dy - y\,dx),$$

so daß kommt:

$$2\frac{dF}{dt} = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}.$$

Werden hierin die Werte φ und ψ für x und y eingesetzt, so steht rechts die Funktion $\varphi\psi' - \psi\varphi'$ von t. Mithin gilt der

Satz 23: Wird eine Kurve mittels einer Hilfsveränderlichen t in der Form

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

dargestellt, so hat die Fläche, die der zum Kurvenpunkte P gehörige Radiusvektor OP überstreicht, während die Hilfsveränderliche von t_0 bis t wächst, die Größe:

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} (\varphi\psi' - \psi\varphi')\,dt,$$

falls man sie positiv oder negativ rechnet, je nachdem sich der Radiusvektor OP im positiven oder negativen Sinn um O dreht.

Von jetzt an werde unter t die Zeit verstanden. Wir wollen nämlich die Bewegung eines punktförmigen Mobils P von der Masse m untersuchen, dessen Koordinaten x und y die durch (1) gegebenen Funktionen der Zeit t sind. Dabei setzen wir die x-Einheit gleich der y-Einheit voraus. Wächst die Zeit t um dt, so wachsen x und y um $dx = \varphi' dt$, $dy = \psi' dt$, so daß der Weg ds des Mobils in der Zeit dt nach (19), S. 361, ist:

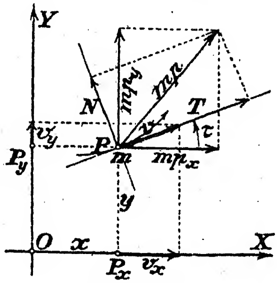


Fig. 368.

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}\, dt.$$

Folglich wird die Geschwindigkeit:

$$(8) \qquad v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}.$$

Ihre Richtung ist tangential zur Bahnkurve c und hat deshalb die unter (3) berechnete Steigung $dy : dx = \psi' : \varphi'$. Die Fußpunkte P_x und P_y der Lote vom Punkte P auf die x- und y-Achse, siehe Fig. 368, durchlaufen die Achsen nach den Gesetzen $x = \varphi(t)$ und $y = \psi(t)$, so daß

$$(9) \qquad v_x = \frac{dx}{dt} = \varphi'. \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = \psi'$$

ihre Geschwindigkeiten sind. Offenbar sind v_x und v_y die Projektionen von v auf die Achsen. Man kann sich daher vorstellen, daß die Bewegung des Punktes P durch zwei im allgemeinen veränderliche Kräfte erzeugt wird, die in P parallel zur x- und y-Achse angreifen. Die eine bewirkt eine Beschleunigung p_x parallel zur x-Achse, die andere eine Beschleunigung p_y parallel zur y-Achse. Diese Beschleunigungen sind nach S. 494 die Differentialquotienten der Geschwindigkeiten v_x und v_y:

$$(10) \qquad p_x = \frac{dv_x}{dt} = \varphi''. \qquad p_y = \frac{dv_y}{dt} = \psi''.$$

Die beiden Kräfte sind mp_x und mp_y. Wenn man ihre Mittelkraft bildet, gelangt man zu einer der Größe und Richtung nach veränderlichen Kraft als Ursache der Bewegung des Mobils. Die Größe dieser Kraft ist

$$\sqrt{m^2 p_x^2 + m^2 p_y^2} = m \sqrt{\varphi''^2 + \psi''^2},$$

und ihre Richtung hat die Steigung $p_y : p_x$ oder $\psi'' : \varphi''$. Also ist die Kraft im allgemeinen nicht tangential zur Bahn. Das Mobil m hat zur Zeit t die Beschleunigung:

(11) $$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \sqrt{\varphi''^2 + \psi''^2}$$

in der Richtung mit der Steigung $p_y : p_x$ oder $\psi'' : \varphi''$.

Ist τ der Tangentenwinkel, so kommt nach Satz 1, S. 449, und nach (3):

$$\cos\tau = \frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}, \qquad \sin\tau = \frac{\psi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}},$$

wo die Wurzel positiv sein muß, wenn die Tangente im Sinn der Bewegung positiv gerechnet wird. Man kann die Kraft mp auch in eine Komponente T längs der Tangente und eine Komponente N längs der Normale der Bahn zerlegen. Da sich aus $-mp$, mp_x, mp_y durch Verschieben ein geschlossenes Dreieck bilden läßt, gibt die Projektion auf die Tangente und Normale nach Satz 11, S. 408:

$$T = m p_x \cos\tau + m p_y \sin\tau, \qquad N = -m p_x \sin\tau + m p_y \cos\tau.$$

Dabei ist die Normale positiv zu messen in der Richtung, die aus der Drehung der positiven Tangente im positiven Sinn um einen rechten Winkel hervorgeht. $T : m$ und $N : m$ heißen die Tangentialbeschleunigung p_t und Normalbeschleunigung oder Zentripetalbeschleunigung p_n. Man bekommt nach Einsetzen der Werte von $\cos\tau$, $\sin\tau$, p_x und p_y:

(12) $$p_t = \frac{T}{m} = \frac{\varphi'\varphi'' + \psi'\psi''}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}, \qquad p_n = \frac{N}{m} = \frac{\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}.$$

Nun ist $\varphi'\varphi'' + \psi'\psi''$ der halbe Differentialquotient von $\varphi'^2 + \psi'^2$, d. h. nach (8) der von $\frac{1}{2}v^2$; also ergibt sich aus der ersten Formel (12):

$$p_t = \frac{1}{2v}\frac{d(v^2)}{dt} = \frac{1}{2v}\frac{d(v^2)}{dv}\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2v}\cdot 2v\cdot\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt}$$

oder wegen $v = ds : dt$

(13) $$p_t = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Die Tangentialbeschleunigung ist demnach der zweite Differentialquotient des Weges s auf der Kurve nach der Zeit t. Die Normalbeschleunigung bewirkt die Krümmung der Bahn; sie ist daher nach derjenigen Seite der Bahnkurve gerichtet, auf der der Krümmungsmittelpunkt K des Kurvenpunktes P liegt. Nach (12) und nach Satz 22 ist:

(14) $$p_n = \frac{v^2}{\varrho},$$

wenn ϱ den Krümmungsradius bedeutet.

Unter der Arbeit, die von der Kraft mp im Zeitdifferential dt geleistet wird, versteht man das Produkt aus dem zurückgelegten Weg ds und der Projektion der Kraft auf die Wegrichtung. (Auf S. 499 wurde ein besonderer Fall hiervon erwähnt.) Da sich aus $-mp$, N, T durch Verschieben ein geschlossenes Dreieck bilden läßt, ist die Projektion von mp auf die Wegrichtung nach Satz 11, S. 408, gleich der Summe der Projektionen von N und T. Die erste Projektion ist gleich Null, folglich $T\,ds$ die Arbeit. Nach (13) kommt:

$$T\,ds = m\,p_t\,ds = m\frac{d^2 s}{dt^2}\cdot ds = m\,\frac{dv}{dt}\cdot\frac{ds}{dt}\cdot dt = m\,v\,\frac{dv}{dt}\cdot dt.$$

Weil $2mv\,\frac{dv}{dt}$ der Differentialquotient von mv^2 ist, wird:

$$T\,ds = \frac{d\,(\frac{1}{2}m\,v^2)}{dt}\cdot dt = d\,(\tfrac{1}{2}\,m\,v^2).$$

Wie auf S. 500 ergibt sich also auch hier, wenn man $\frac{1}{2}mv^2$ die lebendige Kraft (oder kinetische Energie) nennt:

Satz 24: Bei der Bewegung eines punktförmigen Mobils in der Ebene ist die Arbeit im Zeitteilchen dt gleich dem Zuwachs der lebendigen Kraft.

4. Beispiel: Eine punktförmige Masse m werde mit einer Anfangsgeschwindigkeit c, die mit der Wagerechten den Winkel α bilde, im luftleeren Raum fortgeschleudert. Sie bleibt in der lotrechten Ebene durch die Anfangsgeschwindigkeit. Die Wagerechte durch den Ausgangspunkt O sei die x-Achse, die Lotrechte nach oben die positive y-Achse. Da die Schwere mg nach unten wirkt, ist die wagerechte Beschleunigung $p_x = 0$, die lotrechte $p_y = -g$. Nach (10) ist daher $\varphi'' = 0$, $\psi'' = -g$, nach (9) folglich $v_x = \varphi' =$ konst., $v_y = \psi' = -g\,t +$ konst., so daß φ linear und ψ quadratisch in t ist. Da außerdem für $t = 0$ auch $x = \varphi = 0$, $y = \psi = 0$, $v_x = c\cos\alpha$ und $v_y = c\sin\alpha$ ist, bestimmen sich die Konstanten leicht. Für die Wurfbahn ergibt sich:

$$x = c\cos\alpha\,.\,t\,,\qquad y = -\tfrac{1}{2}\,g\,t^2 + c\sin\alpha\,.\,t\,.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $t = x : c\cos\alpha$, so daß das Einsetzen dieses Wertes in die zweite liefert:

$$y = -\frac{1}{2}\,\frac{g}{c^2\cos^2\alpha}\,x^2 + \operatorname{tg}\alpha\,.\,x\,,$$

d. h. die Wurfbahn ist eine Parabel (nach S. 95). Man bestätige, daß $c^2\sin 2\alpha : g$ die Wurfweite ist, d. h. die Entfernung von O bis zu der Stelle, wo das Mobil wieder die x-Achse trifft. Für welchen Winkel α ist die Wurfweite am größten?

5. Beispiel: Ein Mobil von der Masse m beschreibe mit konstanter Geschwindigkeit einen Kreis um O mit dem Radius a, siehe Fig. 369. Zu Anfang ($t = 0$) sei es auf der x-Achse an der Stelle P_0 oder $(a\,;\,0)$. Es vollende eine

Umdrehung im positiven Sinn in der Zeit T. Zur Zeit t hat der Radiusvektor OP des Mobils den Winkel $2\pi t : T$ zurückgelegt, so daß

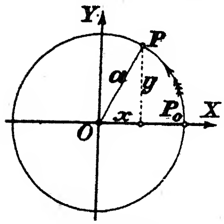


Fig. 369.

$$x = a \cos \frac{2\pi t}{T}, \qquad y = a \sin \frac{2\pi t}{T}$$

ist. Die Winkelgeschwindigkeit (vgl. S. 427) ist $2\pi : T$. Nach (12) wird $p_t = 0$ und $p_n = (2\pi : T)^2 a$. Die sogenannte Zentripetalkraft ist also gleich $m\,(2\pi : T)^2 a$, d. h. gleich Masse mal **Quadrat** der Winkelgeschwindigkeit mal Radius.

Wer hier das Kapitel nach sorgfältiger Durcharbeit beendet, wird sich fragen, was er nun von dem Vorgetragenen im Kopfe behalten muß. In den vorhergehenden Kapiteln haben wir öfters Gelegenheit genommen, in dieser Hinsicht Ratschläge zu erteilen. Aber jetzt, wo wir schon einen so weiten Weg gemeinsam durchschritten haben, scheint es uns an der Zeit, dem Leser selbst die Entscheidung zu überlassen. Nur eine Bemerkung wollen wir dazu machen: Schon auf S. 41 sagten wir, daß zuviel Auswendiglernen von Übel ist. Also nur das, was man wirklich glaubt, auch noch nach längerer Zeit zu behalten, vertraue man seinem Gedächtnis an. Im übrigen tröste man sich damit, daß man, wenn es not tut, ja immer zur betreffenden Stelle des Buches zurückblättern kann!

Zehntes Kapitel.[1]

Berechnung der Funktionen.

§ 1. Der Mittelwertsatz.

In diesem Kapitel wollen wir uns mit einigen allgemeinen Verfahren beschäftigen, die dazu dienen, die Werte einer vorgelegten Funktion für vorgeschriebene Werte der unabhängigen Veränderlichen zu berechnen. Die Grundlage dieser Verfahren ist ein Satz, der ohne weiteres einleuchten wird und trotz seiner Einfachheit eine merkwürdig große Tragweite hat.

Unter $F(x)$ werde eine Funktion von von x verstanden, die in einem Intervalle, etwa von $x=a$ bis $x=b$, stetig und differentiierbar sei, so daß sowohl $F(x)$ als auch $F'(x)$ für jedes x des Intervalles einen bestimmten endlichen Wert hat[2]. Insbesondere soll $F(x)$ am Anfange $x=a$ und am Ende $x=b$ des Intervalles gleich Null sein. Die Bildkurve der Funktion soll also die Abszissenachse an den Stellen $x=a$ und $x=b$ treffen, siehe Fig. 370

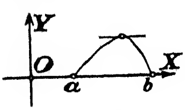


Fig. 370.

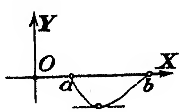


Fig. 371.

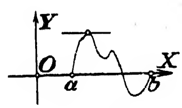


Fig. 372.

und 371 in den einfachsten Fällen und Fig. 372, wo mehrere Berge und Täler vorkommen. Stets gibt es **innerhalb** des Intervalles, wohlbemerkt nicht an den Enden $x=a$ und $x=b$, sondern dazwischen, mindestens einen Kurvenpunkt, dessen Tangente zur Abszissenachse parallel ist, für den also $F'(x)$ gleich Null wird. Denn wenn die Kurve zuerst gestiegen (oder gefallen) ist, muß sie doch nachher

---

[1] Dies Kapitel kann auch, wenn man will, erst nach § 3 des nächsten Kapitels durchgenommen werden.

[2] Statt des gebräuchlichen $f(x)$ benutzen wir hier nur deshalb $F(x)$, weil wir uns die Bezeichnung $f(x)$ für andere Funktionen in den folgenden Paragraphen vorbehalten wollen.

wieder fallen (oder steigen), weil sie durch die Stellen $x = a$ und $x = b$ der Abszissenachse gehen soll. Daß es immer auch dann, wenn die Kurve an einer der Stellen $x = a$ und $x = b$ selbst (oder an beiden) die Abszissenachse berührt, mindestens einen derartigen Kurvenpunkt innerhalb des Intervalles gibt, soll Fig. 373 veranschaulichen. Somit gilt der

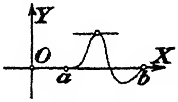


Fig. 373.

Satz 1 (Mittelwertsatz): Wenn eine Funktion $F(x)$ und ihr Differentialquotient $F'(x)$ für jedes x eines Intervalles von $x = a$ bis $x = b$ bestimmte endliche Werte haben und wenn überdies die Funktion $F(x)$ selbst sowohl am Anfange $x = a$ als auch am Ende $x = b$ des Intervalles gleich Null ist, gibt es **innerhalb** des Intervalles mindestens einen Wert von x, für den der Differentialquotient $F'(x)$ gleich Null wird.

Dieser Satz wird der Mittelwertsatz genannt, weil man den innerhalb des Intervalles gelegenen Wert von x, für den $F'(x)$ gleich Null wird, als einen Mittelwert zwischen den Werten a und b bezeichnen kann. Im allgemeinen läßt sich nichts darüber sagen, ob dieser Mittelwert näher bei a oder näher bei b liegt, auch kann es, wie Fig. 372 und 373 zeigen, mehrere derartige Werte geben. Das Wesentliche ist, daß es mindestens einen gibt, der weder a noch b selbst ist. Man kann den Mittelwertsatz auch rein rechnerisch, ohne die geometrische Veranschaulichung, beweisen, aber wir wollen uns damit nicht aufhalten.

1. Beispiel: Die Funktion $\sin x$ ist gleich Null für $x = 0$ und $x = \pi$, mithin muß es ein x zwischen 0 und π geben, für das der Differentialquotient, also $\cos x$, gleich Null wird. In der Tat tritt dies für $x = \frac{1}{2}\pi$ ein.

Der Mittelwertsatz läßt sich durch wiederholte Anwendung verallgemeinern. Der erste Schritt geschieht so: Drei verschiedene Werte von x seien a, b, c, und es sei $a < b < c$. Die Funktion $F(x)$ und ihr Differentialquotient $F'(x)$ mögen von $x = a$ bis $x = c$ überall bestimmte endliche Werte haben; insbesondere sei $F(x)$ gleich Null für $x = a$, $x = b$ und $x = c$. Dann gilt Satz 1 sowohl für das Intervall von $x = a$ bis $x = b$, als auch für das von $x = b$ bis $x = c$. Mithin gibt es mindestens einen Wert α zwischen a und b sowie mindestens einen Wert β zwischen b und c derart, daß $F'(x)$ für $x = \alpha$ und für $x = \beta$ gleich Null wird. Nun fügen wir die Voraussetzung hinzu, daß auch der zweite Differentialquotient $F''(x)$ für jedes x von $x = a$ bis $x = c$ einen bestimmten

endlichen Wert habe. Dann kann der Satz 1 auf die Funktion $F'(x)$ statt auf $F(x)$ im Intervalle von $x=\alpha$ bis $x=\beta$ angewandt werden, weil sie für $x=\alpha$ und $x=\beta$ gleich Null wird. Da die Funktion $F'(x)$ den Differentialquotienten $F''(x)$ hat, folgt mithin, daß es mindestens ein x zwischen α und β, also ein x innerhalb des Intervalles von $x=a$ bis $x=c$ gibt, für das $F''(x)$ gleich Null wird.

Wie man dies noch weiter verallgemeinert, dürfte nun wohl einleuchten: Man macht die Voraussetzung, daß $F(x)$ an vier verschiedenen Stellen gleich Null sei, und überdies die Annahme, daß auch der dritte Differentialquotient $F'''(x)$ überall im betrachteten Intervalle bestimmte endliche Werte habe. Aus Satz 1 folgt dann zunächst wie soeben, daß $F''(x)$ an mindestens zwei verschiedenen Stellen innerhalb des Intervalles gleich Null wird, und dann, indem man den Satz auf die Funktion $F''(x)$ anwendet, daß $F'''(x)$ an mindestens einer Stelle innerhalb des Intervalles gleich Null wird. Ganz allgemein ergibt sich:

Satz 2: Wenn eine Funktion $F(x)$ und ihre n ersten Differentialquotienten $F'(x)$, $F''(x)$, ... $F^{(n)}(x)$ in einem Intervalle bestimmt und endlich sind, und wenn die Funktion $F(x)$ selbst an $n+1$ verschiedenen Stellen $a_0, a_1, a_2 \ldots a_n$ des Intervalles gleich Null wird, gibt es mindestens einen Wert von x, für den der n^{te} Differentialquotient $F^{(n)}(x)$ gleich Null wird, und zwar ist dieser Wert größer als der kleinste und kleiner als der größte der $n+1$ Werte $a_0, a_1, a_2 \ldots a_n$.

Man kann allgemein einen Wert, der größer als der kleinste und kleiner als der größte von mehreren gegebenen Werten ist, einen Mittelwert von ihnen nennen. Dann läßt sich Satz 2 auch so aussprechen:

Satz 3: Wenn eine Funktion von x und ihre n ersten Differentialquotienten in einem Intervalle, in dem die Funktion für $n+1$ verschiedene Werte von x gleich Null wird, überall bestimmt und endlich sind, gibt es mindestens einen Mittelwert dieser $n+1$ Werte, für den der n^{te} Differentialquotient der Funktion gleich Null wird.

2. Beispiel: Sind $a_1, a_2 \ldots a_n$ verschiedene Konstanten, so wird die ganze Funktion n-ten Grades

$$y=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$$

gleich Null für $x=a_1, a_2 \ldots a_n$. Nach Satz 3 muß also ihr $(n-1)$-ter Differen-

tialquotient für mindestens einen Mittelwert von $a_1, a_2 \dots a_n$ gleich Null werden. Da y nach Ausrechnung der Klammern die Form

$$y = x^n - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)\, x^{n-1} + \dots$$

bekommt, wo die zum Schlusse durch Punkte angedeuteten Glieder niedrigere Potenzen von x enthalten, ist

$$\begin{aligned} y^{(n-1)} &= n\,(n-1)\dots 3 \,.\, 2 \,.\, x - (n-1)\,(n-2)\dots 2 \,.\, 1 \,.\, (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \\ &= (n-1)\,(n-2)\dots 2 \,.\, 1\, (nx - a_1 - a_2 - \dots - a_n). \end{aligned}$$

Also ist $y^{(n-1)}$ gleich Null nur für $x = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$, d. h. für das arithmetische Mittel (S. 242) von $a_1, a_2 \dots a_n$. Dies ist demnach größer als der kleinste und kleiner als der größte der n Werte. Das läßt sich leicht auch geradezu beweisen.

§ 2. Über das Einschalten in Tafeln.

Wird man in die Lage versetzt, häufiger die Werte einer gewissen Funktion y für verschiedene Werte von x zu gebrauchen, so richtet man sich eine Tafel ein, in der man die Werte von y für eine große Anzahl möglichst eng aufeinanderfolgender Werte von x einschreibt. Die fünfstelligen Logarithmentafeln z. B. enthalten die Werte von $y = \log x$ für alle ganzzahligen x von 1000 bis 10 000, die fünfstelligen logarithmisch-trigonometrischen Tafeln die von $y = \log \sin x, \log \cos x$ usw. für alle Winkel von 0° bis 90° von Minute zu Minute. Beim Gebrauche einer Tafel für solche Werte von x, die in der Tafel nicht vorkommen, aber zwischen zwei darin auftretenden Werten von x liegen, wendet man das Verfahren des Einschaltens oder Interpolierens an. Es beruht wie bei der Regula falsi (S. 118) darauf, daß man annimmt, der Zuwachs der Funktion y sei innerhalb des Intervalles zwischen zwei aufeinanderfolgenden x-Werten der Tafel zum Zuwachs von x selbst proportional (vgl. S. 117 und S. 302). Diese Annahme trifft nicht streng zu, denn sonst müßte y nach Satz 1, S. 28, eine ganze lineare Funktion von x sein. Sie ist aber erlaubt, weil ein sehr kurzes Bogenstück der Bildkurve von y angenähert durch die geradlinige Sehne erreicht werden darf. Jetzt soll es sich darum handeln, den Fehler dieses Einschaltverfahrens abzuschätzen.

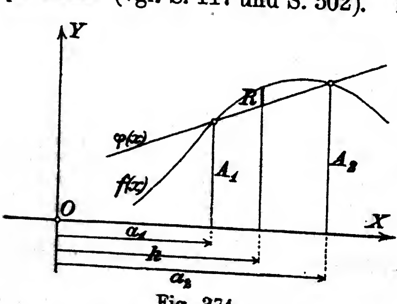


Fig. 374.

In Fig. 374 sei die krumme Linie das Bild einer Funktion

$y = f(x)$. Diese Funktion habe für $x = a_1$ und $x = a_2$ die Werte A_1 und A_2. Dabei sei $a_1 < a_2$. Den Kurvenbogen von der Stelle $(a_1; A_1)$ nach der Stelle $(a_2; A_2)$ ersetzen wir durch die Sehne. Die Gerade dieser Sehne ist nach dem schon vorhin angeführten Satze 1, S. 28, oder nach Satz 4, S. 31, das Bild einer ganzen linearen Funktion $\varphi(x)$, deren Form $cx + k$ ist. Die Konstanten c und k lassen sich leicht bestimmen, denn es muß ja

$$A_1 = c\,a_1 + k, \qquad A_2 = c\,a_2 + k$$

sein. Hieraus folgt durch Subtraktion:

$$c = \frac{A_1 - A_2}{a_1 - a_2}$$

und, nachdem man die erste Bedingung mit a_2 und die zweite mit a_1 multipliziert hat, ebenfalls durch Subtraktion:

$$k = \frac{a_1 A_2 - a_2 A_1}{a_1 - a_2}.$$

Die lineare Funktion $\varphi(x)$ oder $cx + k$ ist demnach:

$$\varphi(x) = \frac{A_1 - A_2}{a_1 - a_2}\,x + \frac{a_1 A_2 - a_2 A_1}{a_1 - a_2}$$

Man kann sie auch so schreiben:

$$(1) \qquad \varphi(x) = A_1 \frac{x - a_2}{a_1 - a_2} + A_2 \frac{x - a_1}{a_2 - a_1}.$$

Hier geht der zweite Summand aus dem ersten durch Vertauschen der Indizes 1 und 2 hervor.

Nun sei h irgendein Wert von x im Innern des Intervalles von $x = a_1$ bis $x = a_2$. Für $x = h$ hat $f(x)$ den Wert $f(h)$. Beim Einschalten wird aber nicht diese Ordinate der Kurve an der Stelle $x = h$ benutzt, sondern die der Geraden, d. h. der Wert $\varphi(h)$. Mithin stellt

$$(2) \qquad R = f(h) - \varphi(h)$$

den dabei gemachten Fehler dar. Wir werden jetzt den Satz 2 des § 1 für den Fall $n = 2$ anwenden, für den wir ihn noch einmal wie folgt formulieren können:

Satz 4: Wenn $a_1 < h < a_2$ drei verschiedene Werte von x sind, für die eine Funktion $F(x)$ gleich Null wird, und wenn diese Funktion $F(x)$ sowie ihre beiden Differentialquotienten $F'(x)$ und $F''(x)$ im Intervalle von $x = a_1$ bis $x = a_2$ bestimmte endliche Werte haben, gibt es

innerhalb des Intervalles mindestens einen Wert u von x, für den der zweite Differentialquotient $F''(x)$ gleich Null wird: $F''(u) = 0$.

Wir werden nun eine Funktion $F(x)$ bilden, für die alle Voraussetzungen dieses Satzes zutreffen. Zunächst ist die Differenz $f(x) - \varphi(x)$ für $x = a_1$ und $x = a_2$ gleich Null, während sie für $x = h$ den Wert R hat. Ferner ist die ganze Funktion zweiten Grades

(3) $$\psi(x) = \frac{(x - a_1)(x - a_2)}{(h - a_1)(h - a_2)}$$

auch für $x = a_1$ und $x = a_2$ gleich Null, während sie für $x = h$ den Wert Eins hat. Deshalb ist die aus beiden Ausdrücken zuzammengesetzte Funktion $f(x) - \varphi(x) - R\,\psi(x)$ oder

(4) $$F(x) = f(x) - \varphi(x) - R\,\frac{(x - a_1)(x - a_2)}{(h - a_1)(h - a_2)}$$

sowohl für $x = a_1$ und $x = a_2$ als auch für $x = h$ gleich Null. Damit auch die übrigen Voraussetzungen des Satzes 4 erfüllt werden, nehmen wir noch an, daß $f(x), f'(x)$ und $f''(x)$ im Intervalle von $x = a_1$ bis $x = a_2$ überall bestimmt und endlich seien. Weil $\varphi(x)$ eine ganze lineare Funktion $cx + k$, $\varphi'(x) = c$ und $\varphi''(x) = 0$ ist, und weil die Funktion $\psi(x)$ nach (3) eine ganze Funktion zweiten Grades und

$$\psi'(x) = \frac{2x - a_1 - a_2}{(h - a_1)(h - a_2)}, \qquad \psi''(x) = \frac{2}{(h - a_1)(h - a_2)}$$

ist, erfüllt die durch (4) dargestellte Funktion $F(x)$ nunmehr alle Voraussetzungen des Satzes 4. Ihr zweiter Differentialquotient ist:

$$F''(x) = f''(x) - \frac{2R}{(h - a_1)(h - a_2)},$$

weil ja $\varphi''(x) = 0$ ist. Nach Satz 4 gibt es einen Wert u zwischen a_1 und a_2 derart, daß $F''(u) = 0$ ist. Dies liefert also:

$$f''(u) - \frac{2R}{(h - a_1)(h - a_2)} = 0$$

oder

(5) $$R = \tfrac{1}{2}(h - a_1)(h - a_2)\,f''(u).$$

Hiermit ist für den beim Einschalten begangenen Fehler R ein neuer Ausdruck gewonnen. Allerdings läßt sich der Fehler R hieraus nicht berechnen, denn in (5) tritt die Größe u auf, von der uns nur das Eine bekannt ist, daß sie zwischen a_1 und a_2 liegt. Aber die Formel (5) gestattet uns, die Größe des Fehlers abzu-

schätzen: Weil wir nicht wissen, welchen Wert zwischen a_1 und a_2 die Größe u bedeutet, lassen wir u alle Werte von a_1 bis a_2 durchlaufen. Nun bedeute μ den größten Wert, den dabei der absolute Betrag von $f''(u)$ annimmt. Dann folgt, daß für den richtigen Wert u sicher $|f''(u)| \leqq \mu$ ist. Also liefert (5):

$$|R| \leqq \tfrac{1}{2} |(h-a_1)(h-a_2)| \mu. \tag{6}$$

Satz 5: Beim Einschalten oder Interpolieren zur angenäherten Berechnung des Wertes einer Funktion $f(x)$, von der man die Werte für $x = a_1$ und $x = a_2$ kennt, für irgendeinen zwischen a_1 und a_2 gelegenen Wert $x = h$ wird ein Fehler begangen, dessen absoluter Betrag nicht größer als

$$\tfrac{1}{2} |(h-a_1)(h-a_2)| \mu$$

ist, wo μ den größten Wert des absoluten Betrages von $f''(x)$ im Intervalle von $x = a_1$ bis $x = a_2$ bedeutet. Dabei wird vorausgesetzt, daß $f(x)$, $f'(x)$ und $f''(x)$ überall in diesem Intervalle bestimmte endliche Werte haben.

Hiermit ist eine Schranke für den Einschaltungsfehler R gewonnen; wir wissen nicht, ob der absolute Betrag des wirklich begangenen Fehlers die Schranke erreicht, aber wir wissen, daß er sie nie überschreitet.

Was den Wert von $|(h-a_1)(h-a_2)|$ betrifft, so ist zu beachten, daß $(x-a_1)(x-a_2)$ eine ganze quadratische Funktion vorstellt, deren Bild eine Parabel ist, die an den Stellen $x = a_1$ und $x = a_2$ die Abszissenachse schneidet und dazwischen ein Tal bildet, dessen tiefster Punkt zu $x = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$ gehört und die Tiefe $-\frac{1}{4}(a_2 - a_1)^2$ hat, vgl. S. 95. Wenn also h von a_1 bis a_2 geht, nimmt der absolute Betrag von $(h-a_1)(h-a_2)$ von Null bis $\frac{1}{4}(a_2-a_1)^2$ zu und dann wieder bis Null ab. Mithin ist nach (6):

$$|R| \leqq \frac{1}{8}(a_2 - a_1)^2 \mu. \tag{7}$$

Viele Tafeln geben die Werte einer Funktion $f(x)$ für aufeinanderfolgende ganzzahlige positive Werte von x, so z. B. die fünfstelligen Logarithmentafeln die Werte von $\log x$ für alle ganzen Zahlen von 1000 bis 10 000. In einem derartigen Fall sind also a_1 und a_2 aufeinanderfolgende ganze positive Zahlen N und $N+1$, zwischen denen eingeschaltet wird, so daß aus (7) folgt:

$$|R| \leqq \frac{1}{8} \mu. \tag{8}$$

Der absolute Betrag des Fehlers ist demnach hier nie größer als ein Achtel des Maximums des absoluten Betrages von $f''(x)$ im Intervalle von $x = N$ bis $x = N + 1$.

1. Beispiel: Man findet gelegentlich Tafeln für die Quadratwurzeln aller ganzen positiven Zahlen von 1 bis etwa 1000, abgerundet auf vier Dezimalstellen. Hier ist $f(x) = \sqrt{x}$, also $f''(x) = -1 : (4\sqrt{x^3})$. Wenn x von der Zahl N bis zur Zahl $N + 1$ geht, ist der absolute Betrag von $f''(x)$ nicht größer als $1 : (4\sqrt{N^3})$, also der absolute Betrag des Fehlers nach (8) nicht größer als $1 : (32\sqrt{N^3})$. Da es sich um vierstellige Tafeln handelt, wird aber verlangt, daß der absolute Betrag des Fehlers sicher nicht mehr als 0,00005 ausmache. Deshalb wird zu fordern sein:

$$\frac{1}{32\sqrt{N^3}} < 0{,}000\,05, \quad \text{d. h.} \quad \sqrt{N^3} > 625.$$

Dies aber ist für $N \geqq 74$ der Fall. Man wird also in der Tafel der Quadratwurzeln ohne Bedenken zwischen $\sqrt{N}$ und $\sqrt{N+1}$ einschalten dürfen, wenn $N \geqq 74$ ist.

2. Beispiel: Auch beim Gebrauch der Tafel der gewöhnlichen Logarithmen schaltet man zwischen zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden ganzen positiven Zahlen N und $N + 1$ ein. Hier ist $f(x) = \log x$, also $f''(x) = -M : x^2$, wo M den Modul bedeutet, vgl. S. 298. Nach (8) ist also $|R| \leqq \frac{1}{8} M : N^2$, d. h. $|R| < 0{,}055 : N^2$. In vier- und fünfstelligen Tafeln gehen die Numeri N von 1000 bis 10 000, der kleinste ist also 1000, und der absolute Betrag des Fehlers ist daher kleiner als 0,000 000 055. Das ist vollkommen befriedigend. In siebenstelligen Tafeln gehen die Numeri N von 10 000 an, so daß hier $|R|$ kleiner als 0,000 000 000 55 ist, was auch vollkommen ausreicht. Man hat vorgeschlagen, für kürzere Rechnungen die dreistelligen Logarithmen der Zahlen von 10 bis 100 zu benutzen, weil sie bequem auf einem Blatt in der Größe einer Besuchskarte Platz haben. Hier kommt $|R| < 0{,}00055$, und diese Fehlerschranke ist bedenklich, denn der Fehler könnte die dritte Dezimalstelle beeinflussen. In der Tat, aus log 11 gleich 0,041 und log 12 gleich 0,079 folgert man durch Einschalten log 11,5 gleich 0,060, während bei der Abrundung auf drei Dezimalstellen log 11,5 gleich 0,061 ist.

3. Beispiel: Die fünfstelligen Tafeln für die gewöhnlichen Logarithmen von $\sin x$ geben die Werte für alle Winkel von 0° bis 90° von Minute zu Minute. Wir verstehen also jetzt unter x die Minutenzahl eines Winkels. Dann kommen in der Tafel nur die ganzzahligen Werte x von 0 bis 90.60 oder 5400 vor. Das zur Minutenzahl x gehörige Bogenmaß ist $\pi x : 10\,800$, nach (3), S. 7, wo die Gradzahl g durch $g : 60$ ersetzt werden muß. Demnach ist jetzt

$$\frac{d \log \sin x}{dx} = \frac{M\pi}{10\,800} \operatorname{ctg} x, \qquad \frac{d^2 \log \sin x}{dx^2} = -\frac{M\pi^2}{10\,800^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Nach (8) ist daher

$$|R| \leqq \frac{1}{8} \cdot \frac{M\pi^2}{10\,800^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha} < \frac{0{,}000\,000\,004\,6}{\sin^2 \alpha},$$

wenn zwischen dem Winkel von α Minuten und dem von $\alpha + 1$ Minuten eingeschaltet wird. Weil die Tafel fünfstellig ist, wird aber gefordert, daß $|R| < 0{,}000\,005$ sei. Das ist hiernach sicher der Fall, wenn $\sin^2 \alpha > 0{,}00092$,

also $\sin\alpha > 0{,}031$ ist. Dies trifft ein, wenn der Winkel mehr als $1^0 45'$ beträgt. Für kleinere Winkel kann der Einschaltfehler in der Tat sehr beträchtlich werden, denn man bedenke, daß $\log\sin x$ für $\lim x = 0$ nach $-\infty$ strebt. Die Tafelwerke enthalten deshalb meistens noch eine Hilfstafel für $\log\sin x$ und zwar gehen dabei die Winkel von 0^0 bis 2^0 in Intervallen von je einer Sekunde.

4. Beispiel: Man untersuche in entsprechender Weise die Güte des Einschaltverfahrens in einer fünfstelligen Tafel für die gewöhnlichen Logarithmen von $\operatorname{tg} x$. Auch hier wird eine besondere Tafel für die Winkel von 0^0 bis 2^0 in Intervallen von je einer Sekunde aus demselben Grunde beigefügt. Wegen des Satzes über Komplementwinkel, S. 385, braucht man bei $\log\cos x$ und $\log\operatorname{ctg} x$ eine Sondertafel für die Winkel von 88^0 bis 90^0 in Intervallen von je einer Sekunde.

§ 3. Interpolationsformel von Lagrange.

Wenn eine Tafel von Funktionswerten wie in § 2 vorliegt, läßt sich das Einschalten dadurch verbessern, daß man nicht nur die beiden die Einschaltstelle einschließenden Stellen der Tafel, sondern auch andere benachbarte Werte der Tafel berücksichtigt. Um dies zu tun, müssen wir vorweg eine Hilfsfunktion aufbauen, die eine Verallgemeinerung der in § 2 gebrauchten Funktion $\varphi(x)$ ist, siehe (1) auf S. 525. Wir nehmen uns nämlich vor, eine ganze Funktion möglichst niedrigen Grades zu bilden, die für n verschiedene gegebene Werte $a_1, a_2 \ldots a_n$ der unabhängigen Veränderlichen n gegebene Werte $A_1, A_2 \ldots A_n$ annimmt.

Die oben auf S. 525 hergestellte Funktion $\varphi(x)$, die wir jetzt, weil sie vom ersten Grad ist, mit $\varphi_1(x)$ bezeichnen wollen, hat für $x = a_1$ den Wert A_1 und für $x = a_2$ den Wert A_2. Offenbar läßt sie sich auch so schreiben:

$$(1)\qquad \varphi_1(x) = A_1 + \frac{A_2 - A_1}{a_2 - a_1}(x - a_1).$$

Wir versuchen nun, ein Glied von der Form konst. $(x - a_1)(x - a_2)$ so hinzuzufügen, daß die hervorgehende Funktion außerdem für $x = a_3$ den Wert A_3 annimmt. Man beachte, daß dies neue Glied sowohl für $x = a_1$, als auch für $x = a_2$ gleich Null ist, d. h. daß die Funktion

$$(2)\qquad \varphi_2(x) = \varphi_1(x) + c_2(x - a_1)(x - a_2),$$

wenn c_2 eine Konstante bedeutet, ebenso wie $\varphi_1(x)$ selbst für $x = a_1$ und $x = a_2$ die Werte A_1 und A_2 hat. Soll nun $\varphi_2(x)$ außerdem für $x = a_3$ gleich A_3 werden, so muß c_2 so gewählt werden, daß

$$A_3 = \varphi_1(a_3) + c_2(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$$

ist. Demnach werde

(3) $$c_2 = \frac{A_3 - \varphi_1(a_3)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}$$

gesetzt. Das darf geschehen, da der Nenner nicht gleich Null ist, weil $a_3 \neq a_1$ und $\neq a_2$ angenommen wird. Unter $\varphi_1(a_3)$ ist dabei der Wert der Funktion (1) für $x = a_3$ zu verstehen, aber es ist nicht nötig, ihn besonders hinzuschreiben. Nachdem wir für die Konstante c_2 den Wert (3) gewählt haben, steht jetzt fest, daß die Funktion (2) für $x = a_1, a_2, a_3$ die Werte A_1, A_2, A_3 hat. Diese Funktion $\varphi_2(x)$ ist eine ganze Funktion zweiten Grades.

Diese Schlußweise läßt sich fortsetzen: Wir verstehen unter c_3 eine Konstante und bilden

(4) $$\varphi_3(x) = \varphi_2(x) + c_3(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3).$$

Weil der letzte Summand für $x = a_1, a_2, a_3$ gleich Null ist, nimmt $\varphi_3(x)$ ebenso wie $\varphi_2(x)$ für $x = a_1, a_2, a_3$ die Werte A_1, A_2, A_3 an. Nun können wir c_3 so bestimmen, daß $\varphi_3(x)$ überdies für $x = a_4$ den Wert A_4 bekommt, indem wir nämlich verlangen, daß

$$A_4 = \varphi_2(a_4) + c_3(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)$$

sei, woraus sich ergibt:

(5) $$c_3 = \frac{A_4 - \varphi_2(a_4)}{(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)}.$$

Man sieht, daß sich so der folgende Satz ergibt:

Satz 6: Sind n verschiedene Konstanten $a_1, a_2 \ldots a_n$ und außerdem n Konstanten $A_1, A_2 \ldots A_n$ gegeben, so kann man eine ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades $\varphi_{n-1}(x)$ bilden, die für $x = a_1, a_2 \ldots a_n$ die Werte $A_1, A_2 \ldots A_n$ annimmt. Man setze nämlich nacheinander an:

$$\varphi_1(x) = A_1 + \frac{A_2 - A_1}{a_2 - a_1}(x - a_1),$$

$$c_2 = \frac{A_3 - \varphi_1(a_3)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)},$$

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(x) + c_2(x - a_1)(x - a_2)$$

$$c_3 = \frac{A_4 - \varphi_2(a_4)}{(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)},$$

$$\varphi_3(x) = \varphi_2(x) + c_3(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)$$

und fahre so fort bis:

$$\varphi_{n-1}(x) = \varphi_{n-2}(x) + c_{n-1}(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_{n-1}),$$

$$c_{n-1} = \frac{A_n - \varphi_{n-2}(a_n)}{(a_n - a_1)(a_n - a_2)\ldots(a_n - a_{n-1})}.$$

Die dadurch entstandene Funktion $\varphi_{n-1}(x)$ ist nun, wie sich leicht beweisen läßt, die **einzige** ganze Funktion von nicht höherem als $(n-1)^{\text{ten}}$ Grad, die für $x = a_1, a_2, \ldots, a_n$ die Werte $A_1, A_2 \ldots A_n$ annimmt. Gäbe es nämlich noch eine zweite, etwa $\psi(x)$, so wäre die Differenz

$$\varphi_{n-1}(x) - \psi(x)$$

eine ganze Funktion von nicht höherem als $(n-1)^{\text{ten}}$ Grad, die für die n verschiedenen Werte $a_1, a_2 \ldots a_n$ von x gleich Null wird. Nach Satz 5, S. 102, müßte sie also die n Faktoren $x - a_1$, $x - a_2$, $\ldots, x - a_n$ enthalten, was unmöglich ist, weil das Produkt dieser n Faktoren eine ganze Funktion n^{ten} Grades ist. Also:

Satz 7: Die in Satz 6 aufgestellte ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades $\varphi_{n-1}(x)$ ist die einzige ganze Funktion von nicht höherem als $(n-1)^{\text{ten}}$ Grad, die für die n verschiedenen Werte $a_1, a_2 \ldots a_n$ von x die n Werte $A_1, A_2 \ldots A_n$ annimmt.

Nun kommen wir dazu, auseinanderzusetzen, was eigentlich mit der Herstellung dieser Funktion $\varphi_{n-1}(x)$ bezweckt wird. Wir nehmen an, $f(x)$ sei eine vorgelegte Funktion von x. Sie habe für n verschiedene Werte $a_1, a_2 \ldots a_n$ von x die n Werte $A_1, A_2 \ldots A_n$. Da nun die Funktion $\varphi_{n-1}(x)$ ebenfalls für $x = a_1, a_2 \ldots a_n$ die Werte $A_1, A_2 \ldots A_n$ annimmt, haben die Bildkurven der Funktionen $f(x)$ und $\varphi_{n-1}(x)$ die n Punkte $(a_1; A_1), (a_2; A_2) \ldots (a_n; A_n)$ gemein. Ist $f(x)$ in einem Intervalle, dem die Stellen $x = a_1, a_2 \ldots a_n$ angehören, stetig, so ziehen wir daraus, daß $\varphi_{n-1}(x)$ als ganze Funktion ebenfalls stetig ist (vgl. Satz 1, S. 90), die Folgerung, daß die Bildkurven von $f(x)$ und $\varphi_{n-1}(x)$ in dem Intervalle vermutlich wenig von einander abweichen. Deshalb werden wir die ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades $\varphi_{n-1}(x)$ als eine der vorgelegten Funktion $f(x)$ angenäherte Funktion, als eine Näherungs- oder Ersatzfunktion benutzen. Sie ist die Verallgemeinerung jener linearen Funktion $\varphi_1(x)$, die in § 2 mit $\varphi(x)$ bezeichnet war, und die beim gewöhnlichen Einschalten zwischen zwei Stellen als Ersatzfunktion dient. Jetzt werden nicht zwei, sondern n Stellen benutzt. Die Funktion $\varphi_{n-1}(x)$ wurde 1795 von dem französischen Mathematiker LAGRANGE (1736—1813) aufgestellt und wird die LAGRANGEsche Interpolationsformel genannt. Man sagt, daß man zwischen n bekannten Wertepaaren $(a_1; A_1)$, $(a_2; A_2) \ldots (a_n; A_n)$ von x und $f(x)$ einschaltet oder interpoliert, wenn man statt der eigentlich zu berechnenden Funktion $f(x)$ die Funktion $\varphi_{n-1}(x)$ benutzt.

Aber jetzt fragt es sich wieder, wie man den **Fehler**

$$R = f(h) - \varphi_{n-1}(h) \tag{6}$$

abschätzen kann, der bei diesem Interpolieren begangen wird, wenn man an einer Stelle $x = h$ statt $f(h)$ den Wert $\varphi_{n-1}(h)$ benutzt. Die Schlußweise ist eine Verallgemeinerung der in § 2. Einerseits wissen wir, daß $f(x) - \varphi_{n-1}(x)$ für $x = a_1, a_2 \ldots a_n$ übereinstimmen. Andrerseits hat die ganze Funktion n^{ten} Grades

$$\psi(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(h-a_1)(h-a_2)\ldots(h-a_n)}$$

für $x = a_1, a_2 \ldots a_n$ den Wert Null. Wir setzen selbstverständlich voraus, daß die Stelle $x = h$ von $a_1, a_2 \ldots a_n$ verschieden sei. Nun bilden wir die Funktion $f(x) - \varphi_{n-1}(x) - R\,\psi(x)$, also:

$$F(x) = f(x) - \varphi_{n-1}(x) - R\,\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(h-a_1)(h-a_2)\ldots(h-a_n)}. \tag{7}$$

Auch sie hat für $x = a_1, a_2 \ldots a_n$ den Wert Null. Aber außerdem wird für $x = h$ der letzte Bruch gleich Eins und $f(x) - \varphi_{n-1}(x)$ nach (6) gleich R, d. h. $F(x)$ ist auch für $x = h$ gleich Null. Auf die Funktion $F(x)$, die demnach für die $n+1$ Werte $a_1, a_2 \ldots a_n$ und h von x verschwindet, soll der Satz 3, S. 523, angewandt werden. Wir setzen deshalb voraus, daß die Funktion $f(x)$ selbst und ihre n ersten Differentialquotienten $f'(x), f''(x) \ldots f^{(n)}(x)$ in einem Intervalle, in dem die $n+1$ Stellen $a_1, a_2, \ldots a_n$ und h liegen, überall bestimmte endliche Werte haben. Denn da dies ja auch für die ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades $\varphi_{n-1}(x)$ gilt und ebenso für die ganze Funktion n^{ten} Grades $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$, trifft es dann auch für die Funktion $F(x)$ nebst ihren n ersten Differentialquotienten zu. Aus dem angeführten Satz folgt nun, daß es mindestens einen Wert u von x im Intervalle gibt, für den der n^{te} Differentialquotient $F^{(n)}(x)$ gleich Null wird, und daß u ein Mittelwert (S. 523) der $n+1$ Werte $a_1, a_2 \ldots a_n$ und h ist. Wie sieht aber der n^{te} Differentialquotient von $F(x)$ aus? Der n^{te} Differentialquotient von $\varphi_{n-1}(x)$ ist gleich Null, weil $\varphi_{n-1}(x)$ eine ganze Funktion von nur $(n-1)^{\text{tem}}$ Grad ist. Der n^{te} Differentialquotient des Produktes $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$ ist nach dem 2. Beispiele, S. 523 u. f. gleich $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ oder $n!$ (S. 324). Aus (7) folgt demnach:

$$F^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - R\,\frac{n!}{(h-a_1)(h-a_2)\ldots(h-a_n)}.$$

Wie gesagt, muß $F^{(n)}(x)$ für $x = u$ verschwinden, also kommt:

$$0 = f^{(n)}(u) - R \frac{n!}{(h-a_1)(h-a_2)\dots(h-a_n)}$$

d. h. es ist:

$$R = \frac{1}{n!} f^{(n)}(u)(h-a_1)(h-a_2)\dots(h-a_n)\,. \tag{8}$$

Da uns der Mittelwert u nicht bekannt ist, betrachten wir alle Werte von $f^{(n)}(x)$ in demjenigen kleinsten Intervall, in dem $a_1, a_2 \dots a_n$ und h liegen und daher auch u liegen muß. Ist μ_n das Maximum des absoluten Betrages von $f^{(n)}(x)$ in diesem Intervalle, so ist sicher $|f^{(n)}(u)| \leqq \mu_n$. Mithin liefert (8) eine Schranke für den Fehler, indem sich ergibt:

Satz 8: Kennt man die Werte einer Funktion $f(x)$ für n verschiedene Stellen $x = a_1, a_2, \dots a_n$ und ermittelt man mit Hilfe der Lagrangeschen Interpolationsformel angenähert ihren Wert an einer anderen Stelle $x = h$, so hat der absolute Betrag des Fehlers die Schranke:

$$\frac{\mu_n}{n!} |(h-a_1)(h-a_2)\dots(h-a_n)|\,,$$

falls μ_n den größten absoluten Betrag von $f^{(n)}(x)$ in demjenigen kleinsten Intervalle bedeutet, das die $n+1$ Stellen $a_1, a_2, \dots a_n$ und h enthält. Dabei wird vorausgesetzt, daß $f(x), f'(x), \dots f^{(n)}(x)$ überall in diesem Intervalle bestimmte endliche Werte haben.

Beispiel. Die Sinus von 0°, 15°, 30°, 45° haben die auf vier Dezimalstellen abgerundeten Werte

0,0000, 0,2588, 0,5000, 0,7071.

Auf Grund dieser Werte wollen wir Näherungsfunktionen bilden und ihre Zuverlässigkeit abschätzen. Hier ist $n = 4$ und $a_1 = 0$, $a_2 = 15$, $a_3 = 30$, $a_4 = 45$, während A_1, A_2, A_3, A_4 die angegebenen Sinuswerte sind. Satz 6 gibt zunächst:

$$\varphi_1(x) = 0{,}0000 + \frac{0{,}2588}{15} x = 0{,}017\,253\,x\,,$$

woraus man alsdann $c_2 = -0{,}000\,039\,1$ berechnet. Folglich kommt weiterhin:

$$\varphi_2(x) = 0{,}017\,253\,x - 0{,}000\,039\,1\,x(x-15).$$

Hieraus berechnet man $c_3 = -0{,}000\,000\,81$ und erhält schließlich

$$\varphi_3(x) = 0{,}017\,253 - 0{,}000\,039\,1\,x(x-15) - 0{,}000\,000\,81\,x(x-15)(x-30).$$

Schritt für Schritt sind bei der Ausrechnung mehr Dezimalstellen berücksichtigt worden, weil die auftretenden Faktoren mit x größere Werte annehmen können. Die Funktion $\varphi_1(x)$ stimmt mit $\sin x$ nur für $x = 0$ und für $x = 15$ überein, dagegen $\varphi_2(x)$ auch noch für $x = 30$ und $\varphi_3(x)$ auch noch für $x = 45$. Dabei

bedeutet x wohlbemerkt das Gradmaß des Winkels. Infolgedessen sind die vier ersten Differentialquotienten von $\sin x$ nach S. 397:

$$\frac{\pi}{180}\cos x, \qquad -\frac{\pi^2}{180^2}\sin x, \qquad -\frac{\pi^3}{180^3}\cos x, \qquad \frac{\pi^4}{180^4}\sin x.$$

Die Näherungsfunktion $\varphi_1(x)$ benutzen wir im Intervalle von 0 bis 15, dagegen $\varphi_2(x)$ im Intervalle von 0 bis 30 und schließlich $\varphi_3(x)$ im Intervalle von 0 bis 45. Dementsprechend sind unter μ_2, μ_3 und μ_4 die Maxima der absoluten Beträge des 2., 3. und 4. Differentialquotienten im ersten, zweiten und dritten Intervalle zu verstehen. Weil $\sin x$ wächst, dagegen $\cos x$ abnimmt, kommt

$$\mu_2 = \frac{\pi^2}{180^2}\sin 15^0, \qquad \mu_3 = \frac{\pi^3}{108^3}, \qquad \mu_4 = \frac{\pi^4}{180^4}\sin 45^0$$

oder:

$$\mu_2 = 0{,}2588\cdot\frac{\pi^2}{180^2}, \qquad \mu_3 = \frac{\pi^3}{180^3}, \qquad \mu_4 = 0{,}7071\cdot\frac{\pi^4}{180^4}.$$

Nach Satz 8 haben die absoluten Beträge der Fehler von $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ in den zugehörigen Intervallen die Schranken

$$\frac{\mu_2}{1.2}\,|h(h-15)|, \quad \frac{\mu_3}{1.2.3}\,|h(h-15)(h-30)|, \quad \frac{\mu_4}{1.2.3.4}\,|h(h-15)(h-30)(h-45)|.$$

Soll h irgendwo im Intervalle gewählt werden, so muß man noch die Maxima der absoluten Beträge der drei Funktionen von h

$$\begin{aligned} \omega_1 &= h(h-15) && \text{für } 0 \leqq h \leqq 15, \\ \omega_2 &= h(h-15)(h-30) && \text{für } 0 \leqq h \leqq 30, \\ \omega_3 &= h(h-15)(h-30)(h-45) && \text{für } 0 \leqq h \leqq 45 \end{aligned}$$

feststellen. Weil alle drei an den Intervallgrenzen verschwinden, braucht man nur die Maxima und Minima der Funktionen innerhalb ihrer Intervalle zu ermitteln und zuzusehen, welcher dieser Werte den größten absoluten Betrag hat. Die Funktion ω_1 hat für $h = \frac{15}{2}$ ein Minimum, also ist $|\omega_1| \leqq (\frac{15}{2})^2$. Die Funktion ω_2 hat für $h = 15 + 5\sqrt{3}$ das Minimum $-750\sqrt{3}$ und für $h = 15 - 5\sqrt{3}$ das Maximum $750\sqrt{3}$. Folglich ist $|\omega_2| \leqq 750\sqrt{3}$. Was schließlich ω_3 betrifft, so ist es bequemer, $h = z + \frac{45}{2}$ zu setzen, denn dann kommt:

$$\omega_3 = [z^2 - (\tfrac{15}{2})^2]\,[z^2 - (\tfrac{45}{2})^2]$$

oder noch bequemer, wenn man $z^2 = t$ setzt:

$$\omega_3 = [t - (\tfrac{15}{2})^2]\,[t - (\tfrac{45}{2})^2].$$

Weil h von 0 bis 45 geht, läuft z von $-\frac{45}{2}$ bis $+\frac{45}{2}$. Also ist t auf das Intervall von 0 bis $(\frac{45}{2})^2$ beschränkt. Da nun ω_3 an der Intervallgrenze $t = 0$ nicht verschwindet, kann hier ein Grenzmaximum oder Grenzminimum eintreten (vgl. S. 106). Deshalb ist der Wert von ω_3 für $t = 0$, nämlich $\frac{9}{16}\cdot 15^4$, mit zu berücksichtigen. Innerhalb des Intervalls hat ω_3 nur ein Minimum, nämlich für $t = \frac{5}{4}\cdot 15^2$, und zwar ist es gleich -15^4. Der absolute Betrag hiervon ist größer als $\frac{9}{16}\cdot 15^4$. Folglich ergibt sich $|\omega_3| \leqq 15^4$.

Nunmehr kennen wir die Schranken der absoluten Beträge der Fehler der drei Näherungsfunktionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ in ihren Intervallen von 0 bis 15, von 0 bis 30 und von 0 bis 45, nämlich:

$$\frac{0{,}2588}{2}\cdot\frac{\pi^2}{180^2}\cdot\left(\frac{15}{2}\right)^2, \qquad \frac{1}{6}\cdot\frac{\pi^3}{180^3}\cdot 750\sqrt{3}, \qquad \frac{0{,}7071}{24}\cdot\frac{\pi^4}{180^4}\cdot 15^4.$$

Man muß sie bei der Ausrechnung der Sicherheit halber nach oben abrunden:

$$0{,}0023, \qquad 0{,}0012, \qquad 0{,}000\,14.$$

Mithin kann man statt $\sin x$ im Intervalle von 0^0 bis 15^0 den Näherungswert $\varphi_1(x)$ und im Intervalle von 0^0 bis 30^0 den Näherungswert $\varphi_2(x)$ benutzen, sobald man die Abrundung auf zwei Dezimalstellen vornimmt. Der dritte Näherungswert $\varphi_3(x)$ hat im Intervalle von 0^0 bis 45^0 einen Fehler, der auch noch bei der Abrundung auf drei Dezimalstellen ohne Bedeutung ist.

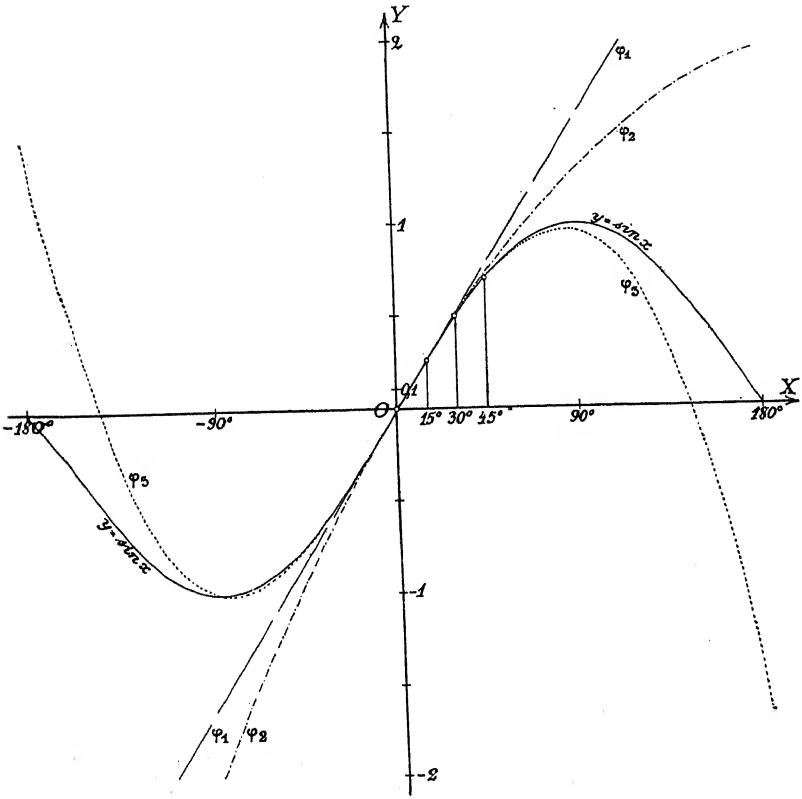


Fig. 375.

In Fig. 375 sind die Bildkurven von $\sin x$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ und $\varphi_3(x)$ im Intervall von $x = -180$ bis $x = +180$ dargestellt. Man sieht, wie stark die Näherungskurven außerhalb der ins Auge gefaßten Intervalle von der Sinuslinie abweichen. Übrigens erscheint die Sinuslinie gegenüber der in Fig. 274, S. 388, infolge anderer Wahl der Einheiten überhöht.

Satz 6 lehrt, wie man die Näherungsfunktionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ usw. nacheinander aufstellen kann, indem jede folgende aus der schon vorher gewonnenen ermittelt wird. Dies

ist in der Anwendung das einzige Richtige, da man von vornherein nicht weiß, ob die Näherungsfunktion für die Zwecke, die man im Auge hat, genügend genau ist, wenn man nur zwei, drei, vier usw. schon bekannte Werte der Funktion $f(x)$ berücksichtigt. Die Form dagegen, in der man gewöhnlich die Lagrangesche Interpolationsformel $\varphi_{n-1}(x)$ schreibt, ist für die Anwendungen unbequem. Immerhin wollen wir sie angeben:

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi_{n-1}(x) = {} & A_1 \frac{(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)} \\ & + A_2 \frac{(x-a_3)\ldots(x-a_n)(x-a_1)}{(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)(a_2-a_1)} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + A_n \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})}. \end{aligned}\right.$$

Hier entsteht jeder folgende Summand aus dem vorhergehenden, indem man gleichzeitig sowohl $a_1, a_2 \ldots a_n$ als auch $A_1, A_2, \ldots A_n$ zyklisch vertauscht, d. h. a_1 durch a_2, a_2 durch a_3 usw., schließlich a_{n-1} durch a_n und überdies noch a_n durch a_1 ersetzt und entsprechend mit $A_1, A_2 \ldots A_n$ verfährt. Daß diese Funktion wirklich dieselbe wie die auf Grund des Satzes 6 gewonnene ist, sieht man so ein: Man erkennt, daß der erste in (9) auftretende Bruch für $x = a_1$ gleich Eins, dagegen für die andern Werte $a_2, a_3 \ldots a_n$ gleich Null wird. Entsprechendes gilt von den andern Brüchen, indem a_1 durch a_2 usw. zu ersetzen ist. Deshalb hat die ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades (9) für $x = a_1, a_2 \ldots a_n$ die Werte $A_1, A_2 \ldots A_n$. Nach Satz 7 gibt es aber nur eine Funktion von dieser Art; deshalb ist die Funktion (9) dieselbe wie die des Satzes 6.

Wie gesagt, ist die allmähliche Herleitung der Funktion $\varphi_{n-1}(x)$ auf Grund des Satzes 6 vorzuziehen. Wenn man dementsprechend zuerst die lineare Funktion $\varphi_1(x)$ bildet und darauf nach und nach die Glieder

$$(10)\qquad c_2(x-a_1)(x-a_2), \qquad c_3(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) \text{ usw.}$$

hinzufügt, entsteht die Reihe der Näherungskurven durch eine fortgesetzte Aufeinanderlagerung (vgl. S. 87). Zuerst werden zu den Ordinaten der Geraden, die $\varphi_1(x)$ vorstellt, die Ordinaten der ersten Funktion (10) addiert; dadurch entsteht eine Parabel als Bildkurve von $\varphi_2(x)$. Alsdann werden zu ihren Ordinaten die der zweiten Funktion (10) addiert, usw. Man nennt die entstehenden Bildkurven von ganzen Funktionen höheren Grades auch höhere Parabeln.

Eigentlich ist es nicht richtig, nur vom Einschalten oder Interpolieren zu reden. Denn nichts hindert uns, den Wert $x = h$, für den $f(x)$ angenähert berechnet werden soll, außerhalb des kleinsten Intervalles zu wählen, in dem die n Werte $a_1, a_2 \dots a_n$ liegen. Dann handelt es sich um ein sogenanntes Extrapolieren. Aber je weiter entfernt man h wählt, um so größer wird das Intervall, innerhalb dessen es auf das Maximum μ_n des absoluten Betrags von $f^{(n)}(x)$ ankommt, um so geringer also die Wahrscheinlichkeit, daß die Fehlerschranke hinreichend klein ausfällt.

Es ist nicht gesagt, daß der absolute Betrag des Fehlers wirklich so groß wird, wie es die Fehlerschranke angibt. Er kann in Wahrheit viel kleiner sein. Wir haben nur kein Mittel, ihn festzustellen, und müssen deshalb nach der Schranke urteilen.

§ 4. Die Taylorsche Formel.

Um zu einer Näherungsfunktion für eine zu berechnende Funktion $f(x)$ zu kommen, kann man noch manche andere Wege einschlagen. Das Verfahren, das wir jetzt anwenden wollen, entspringt aus der Bemerkung, daß sich eine Tangente in ihrem Berührungspunkt an die Bildkurve von $f(x)$ anschmiegt. Die Tangente ist das Bild einer ganzen linearen Funktion, deren Differentialquotient mit dem von $f(x)$ für den betrachteten Bildpunkt übereinstimmt. Diese lineare Funktion hat demnach für einen bestimmten Wert von x mit $f(x)$ zweierlei gemein, erstens den Funktionswert (geometrisch: den Berührungspunkt) und zweitens den Wert des Differentialquotienten (geometrisch: die Steigung).

Wenn wir eine vorgelegte Funktion $f(x)$ etwa in der Gegend der Stelle betrachten, die zu $x = 0$ gehört, liegt es daher nahe, an die folgende Aufgabe heranzugehen: Eine ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades:

(1) $$\varphi_{n-1}(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}$$

soll hergestellt werden, die mit $f(x)$ für $x = 0$ sowohl den Funktionswert selbst als auch die Werte des ersten, zweiten usw. Differentialquotienten bis zum $(n-1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten gemein hat, so daß sie insgesamt n Bedingungen befriedigen soll. Da gerade n verfügbare Konstanten $c_0, c_1, c_2 \dots c_{n-1}$ vorkommen, darf man erwarten, daß sie sich wirklich so bestimmen lassen, daß $\varphi_{n-1}(x)$ den gestellten Anforderungen genügt. Die Bildkurve von $\varphi_{n-1}(x)$ wird sich dann an die Bildkurve von $f(x)$ für $x = 0$ ganz besonders eng

anschmiegen, so daß man vermuten darf, daß $\varphi_{n-1}(x)$ in der Nähe von $x=0$ eine leidliche Näherungsfunktion von $f(x)$ wird.

Die n Forderungen sind leicht zu befriedigen. Nach (1) kommt nämlich:

$$\varphi'_{n-1}(x) = 1\,c_1 + 2\,c_2 x + 3\,c_3 x^2 + \cdots + (n-1)\,c_{n-1}\,x^{n-2},$$
$$\varphi''_{n-1}(x) = 1\,.\,2\,c_2 + 2\,.\,3\,c_3 x + \cdots + (n-1)(n-2)\,c_{n-1}\,x^{n-3}$$

usw. Für $x=0$ haben also $\varphi_{n-1}(x)$, $\varphi'_{n-1}(x)\ldots\varphi^{(n-1)}_{n-1}(x)$ die Werte:

$$c_0, \quad 1!\,c_1, \quad 2!\,c_2, \ldots (n-1)!\,c_{n-1}.$$

Andererseits haben $f(x)$, $f'(x), \ldots f^{(n-1)}(x)$ für $x=0$ gewisse n Werte, die wir einfach so bezeichnen:

$$f(0), \quad f'(0), \quad f''(0), \ldots f^{(n-1)}(0).$$

Demnach fordern wir:

$$c_0 = f(0), \quad 1!\,c_1 = f'(0), \quad 2!\,c_2 = f''(0), \ldots (n-1)!\,c_{n-1} = f^{(n-1)}(0),$$

woraus

$$c_0 = f(0), \quad c_1 = \frac{f'(0)}{1!}, \quad c_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \ldots c_{n-1} = \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}$$

hervorgeht. Die gesuchte Funktion ergibt sich durch Einsetzen dieser Werte der Konstanten in (1). Also kommt:

$$(2) \qquad \varphi_{n-1}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}.$$

Die Bezeichnungen $f'(0)$, $f''(0)$ usw. sind so zu verstehen, daß man zunächst $f'(x)$, $f''(x)$ usw. für veränderliches x berechnet und erst nach den vollzogenen Differentiationen für x den Wert Null setzt.

Satz 9: Es gibt nur eine ganze Funktion $\varphi_{n-1}(x)$ vom höchstens $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade, die den Bedingungen genügt, daß sie und ihre $n-1$ ersten Differentialquotienten für $x=0$ mit einer vorgelegten Funktion $f(x)$ und ihren $n-1$ ersten Differentialquotienten übereinstimmen, nämlich die Funktion:

$$\varphi_{n-1}(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots + f^{n-1}(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

1. Beispiel: Wenn $f(x) = e^x$ ist, haben alle Differentialquotienten den Wert e^x, also für $x=0$ den Wert Eins. Die ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades

$$\varphi_{n-1}(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

und ihre Differentialquotienten bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung stimmen also für $x=0$ mit e^x und den entsprechenden Differentialquotienten von e^x überein. In Satz 6, S. 318 hatten wir für e^x eine unendliche Reihe gefunden, die, nach dem n^{ten} Glied abgebrochen, gerade gleich $\varphi_{n-1}(x)$ ist.

Daß wir als den Zahlenwert von x, für den $f(x), f'(x) \ldots f^{(n-1)}(x)$ mit $\varphi_{n-1}(x), \varphi'_{n-1}(x), \ldots \varphi_{n-1}^{(n-1)}(x)$ übereinstimmen sollen, den Wert $x=0$ gewählt haben, ist Nebensache. Entsprechende Schlüsse kann man machen, wenn man die Übereinstimmung an einer anderen Stelle $x=a$ erreichen will. Man kann das Ergebnis für diesen Fall sofort aus Satz 9 ableiten, indem man $x-a$ als neue Veränderliche t einführt. Denn für $x=a$ wird dann $t=0$. Außerdem werden dann $f(x)$ und $\varphi_{n-1}(x)$ Funktionen von t, und da $dx:dt=1$ wegen $x=t+a$ ist, lehrt die Kettenregel, daß die Differentiation nach t dieselben Differentialquotienten wie die nach x gibt. Jetzt tritt mithin an die Stelle von $f(0)$ der Wert von f für $t=0$, d. h. für $x=a$, also $f(a)$. Ebenso sind $f'(0), f''(0)$ usw. durch $f'(a), f''(a)$ usw. zu ersetzen. Da außerdem $x-a$ statt t zu schreiben ist, kommt der

Satz 10: Es gibt nur eine ganze Funktion $\varphi_{n-1}(x)$ vom höchstens $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade, die den Bedingungen genügt, daß sie und ihre $n-1$ ersten Differentialquotienten für einen bestimmten Wert $x=a$ mit einer vorgelegten Funktion $f(x)$ und ihren $n-1$ ersten Differentialquotienten übereinstimmen, nämlich die Funktion:

$$\varphi_{n-1}(x)=f(a)+f'(a)\frac{x-a}{1!}+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+\cdots+f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Dabei sind $f'(a), f''(a)$ usw. so gemeint: Zunächst berechnet man bei veränderlich gelassenem x die Differentialquotienten $f'(x), f''(x)$ usw. und setzt erst dann darin $x=a$.

Wenn nun $a+h$ einen von a verschiedenen bestimmt gewählten Wert von x bedeutet, wird $f(x)$ für $x=a+h$ mit $\varphi_{n-1}(x)$ nicht mehr übereinstimmen. Aber immerhin darf man vermuten, daß $\varphi_{n-1}(a+h)$ von $f(a+h)$ nicht allzu sehr abweicht, wenn nur h hinreichend nahe bei Null liegt. Man wird also $\varphi_{n-1}(x)$ als Näherungsfunktion statt $f(x)$ für Werte $x=a+h$ in der Nähe von $x=a$ benutzen.

Für die Abweichung, nämlich für den Fehler

$$R=f(a+h)-\varphi_{n-1}(a+h), \tag{3}$$

soll wieder eine Schranke ermittelt werden. Zu diesem Zwecke sucht man wie im vorigen Paragraphen eine andere Ausdrucksform

für R, und dies gelingt, indem man die folgende Funktion $F(x)$ betrachtet, die an die Funktion (7) auf S. 532 erinnert:

(4)
$$F(x) = f(x) - \varphi_{n-1}(x) - R\frac{(x-a)^n}{h^n}.$$

Wir wollen annehmen, daß $f(x)$, $f'(x)$, ... $f^{(n)}(x)$ überall im Intervalle von $x = a$ bis $x = a + h$ bestimmte endliche Werte haben. Dies trifft auch für $\varphi_{n-1}(x)$, $\varphi'_{n-1}(x)$, ... $\varphi_{n-1}^{(n)}(x)$ zu, da $\varphi_{n-1}(x)$ eine ganze Funktion ist. Daher haben auch $F(x)$, $F'(x)$, ... $F^{(n)}(x)$ überall im Intervalle von $x = a$ bis $x = a + h$ bestimmte endliche Werte. Die ersten $n - 1$ Differentialquotienten von $F(x)$ sind nämlich:

(5)
$$\left\{\begin{aligned} F'(x) &= f'(x) - \varphi'_{n-1}(x) - R\frac{n(x-a)^{n-1}}{h^n}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F^{n-1}(x) &= f^{(n-1)}(x) - \varphi_{n-1}^{(n-1)}(x) - R\frac{n(n-1)\ldots 3.2(x-a)}{h^n}, \end{aligned}\right.$$

während der n^{te} die etwas einfachere Form

(6)
$$F^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - R\frac{n!}{h^n}$$

hat, weil der n^{te} Differentialquotient der ganzen Funktion $\varphi_{n-1}(x)$ gleich Null ist.

Da $f(x)$, $f'(x)$, ... $f^{(n-1)}(x)$ für $x = a$ mit $\varphi_{n-1}(x)$, $\varphi'_{n-1}(x)$, ... $\varphi_{n-1}^{(n-1)}(x)$ übereinstimmen, werden die in (4) und (5) rechts zuerst stehenden Differenzen sämtlich gleich Null für $x = a$. Da die übrigen Glieder in (4) und (5) sämtlich mit wenigstens einem Faktor $x - a$ behaftet sind, folgt also, daß $F(x)$, $F'(x)$ ... $F^{(n-1)}(x)$ für $x = a$ verschwinden. Außerdem sieht man aus (4) und (3), daß $F(x)$ auch für $x = a + h$ verschwindet. Da somit $F(a) = 0$ und $F(a + h) = 0$ ist, lehrt Satz 1, S. 522, daß $F'(x)$ für einen Wert $x = u_1$ zwischen a und $a + h$ gleich Null wird. Weil $F'(a) = 0$ und $F'(u_1) = 0$ ist, lehrt die Anwendung desselben Satzes auf die Funktion $F'(x)$, daß $F''(x)$ für einen Wert u_2 zwischen a und u_1 verschwindet. So kann man weiter schließen, weil $F''(x)$, ... $F^{(n-1)}(x)$ sämtlich für $x = a$ den Wert Null haben. Mithin gibt es schließlich einen gewissen Wert $x = u$ zwischen a und $a + h$, für den $F^{(n)}(x)$ verschwindet. Aus (6) folgt somit für $x = u$:

$$0 = f^{(n)}(u) - R\frac{n!}{h^n},$$

und hieraus ergibt sich:

(7)
$$R = f^{(n)}(u)\,\frac{h^n}{n!}.$$

Dies ist die gesuchte neue Ausdrucksform des Fehlers. Obgleich u nicht bekannt ist, kann man doch daraus, daß u zwischen a und $a+h$ liegt, einen Schlüß ziehen: Im Intervalle von $x=a$ bis $x=a+h$ sei μ_n das Maximum des absoluten Betrages von $f^{(n)}(x)$. Der absolute Betrag von $f^{(n)}(u)$ kann dies Maximum nicht überschreiten. Also gelangt man zu

Satz 11: Wenn eine Funktion $f(x)$ und ihre n ersten Differentialquotienten im Intervalle von $x=a$ bis $x=a+h$ überall bestimmte endliche Werte haben und μ_n das Maximum des absoluten Betrages von $f^{(n)}(x)$ im Intervall ist, hat der absolute Betrag des Fehlers, den man begeht, wenn man $f(a+h)$ durch

$$\varphi_{n-1}(a+h)=f(a)+f'(a)\frac{h}{1!}+f''(a)\frac{h^2}{2!}+\cdots+f^{(n-1)}(a)\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}$$

ersetzt, die Schranke:

$$\mu_n\frac{|h|^n}{n!}.$$

Die in Satz 10 gefundene Näherungsfunktion $\varphi_{n-1}(x)$ wurde, allerdings als Reihe bis ins Unendliche für $\lim n=\infty$ erstreckt, worauf wir später noch zurückkommen werden, im Jahre 1715 von dem englischen Mathematiker Taylor (1685—1731) aufgestellt. Deshalb heißt $\varphi_{n-1}(x)$ die Taylorsche Formel.[1] Der Ausdruck (7) wurde 1797 von Lagrange (siehe S. 531) angegeben und heißt die Lagrangesche Restformel. Man kann nämlich nach (3) den Fehler R auch als den Rest bezeichnen, den man zu $\varphi_{n-1}(a+h)$ addieren muß, um $f(a+h)$ zu erhalten.

Den Umstand, daß u zwischen a und $a+h$ liegt, drückt man meistens anders aus: Weil u von a nur um einen Bruchteil von h abweicht, kann man $u=a+\theta h$ setzen, wenn man die Verabredung trifft, daß unter θ eine Zahl zwischen 0 und 1 verstanden werden soll. Dann wird aus (7):

$$R=f^{(n)}(a+\theta h)\frac{h^n}{n!}. \tag{8}$$

Der Satz 11 läßt sich nun so aussprechen:

Satz 12: Wenn eine Funktion $f(x)$ und ihre n ersten Differentialquotienten im Intervalle von $x=a$ bis $x=a+h$

[1] In dem besonderen Fall $a=0$ wird $\varphi_{n-1}(x)$ die in Satz 9 aufgestellte Formel. Es ist ein alter Zopf, daß man diese Funktion immer besonders als die Maclaurinsche Formel bezeichnet. Denn Maclaurin hat sie erst im Jahre 1742 aufgestellt und noch dazu selbst dabei bemerkt, daß sie schon bei Taylor vorkommt!

überall bestimmte endliche Werte haben, gibt es zwischen 0 und 1 gelegene Zahl θ derart, daß die Formel

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\frac{h}{1!} + f''(a)\frac{h^2}{2!} + \cdots + f^{(n-1)}(a)\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n)}(a+\theta h)\frac{h^n}{n!}.$$

Insbesondere ergibt sich für $n=1$ der folgende Satz, der we wiederholter späterer Anwendungen ausdrücklich formuliert wer möge:

Satz 13: Wenn eine Funktion $f(x)$ und ihr Differen quotient $f'(x)$ im Intervalle von $x=a$ bis $x=a$ überall bestimmte endliche Werte haben, gibt es zwischen 0 und 1 gelegene Zahl θ derart, daß Formel gilt:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a+\theta h)\,h.$$

Man benutzt die Sätze 11 und 12 zur angenäherten Berechn einer Funktion $f(x)$, wenn man weiß, welche Werte ihr und ih Differentialquotienten für einen bestimmten Wert a der Veränd lichen x zukommen. Dies ist meistens der Fall und ganz besond häufig für $a=0$.

Wenn man $f(x)$ für einen von a verschiedenen Wert $x=a$ berechnen will, wird man von vornherein nicht wissen, wie groß m den Grad $n-1$ der Näherungsfunktion $\varphi_{n-1}(x)$ annehmen mu damit die Fehlerabschätzung ausreicht. Man wird daher mit einfachsten Annahme $n-1=1$, d. h. $n=2$ beginnen, also na und nach die Näherungswerte bilden:

$$\varphi_1(a+h) = f(a) + f'(a)\frac{h}{1!}, \qquad \text{Schranke } \mu_2\frac{|h|^2}{2!},$$

$$\varphi_2(a+h) = f(a) + f'(a)\frac{h}{1!} + f''(a)\frac{h^2}{2!}, \qquad \text{Schranke } \mu_3\frac{|h|^3}{3!}, \text{ usw.}$$

Dabei bedeuten μ_2, μ_3 usw. die Maxima der absoluten Betr von $f''(x)$, $f'''(x)$ usw. im Intervalle von $x=a$ bis $x=a+h$. I

$$\varphi_2(a+h) = \varphi_1(a+h) + f''(a)\frac{h^2}{2!},$$

$$\varphi_3(a+h) = \varphi_2(a+h) + f'''(a)\frac{h^3}{3!}$$

usw. ist, liegt also hier wie bei der Lagrangeschen Interpolation formel, vgl. S. 535 u. f., die Annehmlichkeit vor, daß jeder neue Näh rungswert aus dem vorhergehenden durch Addition eines Glied hervorgeht.

Nimmt man nicht von vornherein einen bestimmten Wert $a+h$ an, sondern läßt man $a+h$ beliebig, gleich x, so werden die Bildkurven der Funktionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ usw. Näherungskurven für die Bildkurve der Funktion $f(x)$, indem sie sich in dem zu $x=a$ gehörigen Punkt immer inniger an die Kurve anschmiegen. Die Näherungskurven gehen durch Aufeinanderlagern (vgl. S. 87) hervor: Da jetzt $a+h=x$, also $h=x-a$ ist, zeichnet man zuerst die Bildkurve von $\varphi_1(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$, die eine Gerade ist, dann durch Addition der Ordinaten der Bildkurve von

$$f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}$$

die Bildkurve von $\varphi_2(x)$, die eine Parabel ist, darauf die Bildkurve von $\varphi_3(x)$ durch Addition der Ordinaten der Bildkurve von

$$f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!}$$

usw.

2. Beispiel: Im 3. Beispiel auf S. 451 wurden die höheren Differentialquotienten von $\sin x$ berechnet für den Fall, daß x den Winkel im Bogenmaß bedeutet. Für $x=0$ findet man, daß $\sin x$ und die Differentialquotienten von $\sin x$ die Werte $0, 1, 0, -1$ usw. haben, indem immer diese vier Zahlen in derselben Reihenfolge wiederkehren. Da also der 2., 4., 6. usw. Differentialquotient von $\sin x$ für $x=0$ verschwindet, ergeben sich für $\sin x$ in den Fällen $n-1=2, 4, 6$ usw. dieselben Näherungsfunktionen wie in den Fällen $n-1=1, 3, 5$ usw. Daher wird man für $n-1$ eine gerade, also für n eine ungerade ganze positive Zahl $2m+1$ wählen, wo also m irgendeine ganze positive Zahl bedeute. Dann gibt der Satz 12, wenn man $a=0$ und $f(x)=\sin x$ setzt:

$$(9)\qquad \sin h = \frac{h}{1!}-\frac{h^3}{3!}+\frac{h^5}{5!}-\cdots\pm\frac{h^{2m-1}}{(2m-1)!}\mp\cos(\theta_1 h)\frac{h^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

Ganz entsprechend findet man:

$$(10)\qquad \cos h = 1-\frac{h^2}{2!}+\frac{h^4}{4!}-\cdots\pm\frac{h^{2m}}{2m}\mp\cos(\theta_2 h)\frac{h^{2m+2}}{(2m+2)!}.$$

In (9) und (10) bedeuten θ_1 und θ_2 zwischen 0 und 1 gelegene Zahlen. Die Vorzeichen der einzelnen Glieder wechseln beständig. Überdies ist h das Bogenmaß des Winkels. Da die absoluten Beträge von $\cos(\theta_1 h)$ und $\cos(\theta_2 h)$ kleiner als Eins sind und da nach Satz 3, S. 314, die Brüche

$$\frac{h^{2m+1}}{(2m+1)!} \quad \text{und} \quad \frac{h^{2m+2}}{(2m+2)!}$$

nach Null streben, wenn m nach $+\infty$ strebt, kann man die Restglieder in (9) und (10) dadurch, daß man m hinreichend groß annimmt, so unbedeutend machen, wie man nur immer will. Ferner ist $\operatorname{tg} h=\sin h:\cos h$ und $\operatorname{ctg} h = 1:\operatorname{tg} h$. Deshalb kann man alle goniometrischen Funktionen mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit berechnen. Nach S. 399 darf man sich dabei auf Winkel zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ beschränken, ja infolge

des Satzes 4, S. 385, auf Winkel zwischen 0 und $\frac{1}{4}\pi$. Dann sind $\theta_1 h$ und $\theta_2 h$ ebenfalls zwischen 0 und $\frac{1}{4}\pi$ gelegen. Weil $\cos x$ von $x = 0$ bis $x = \frac{1}{4}\pi$ vom

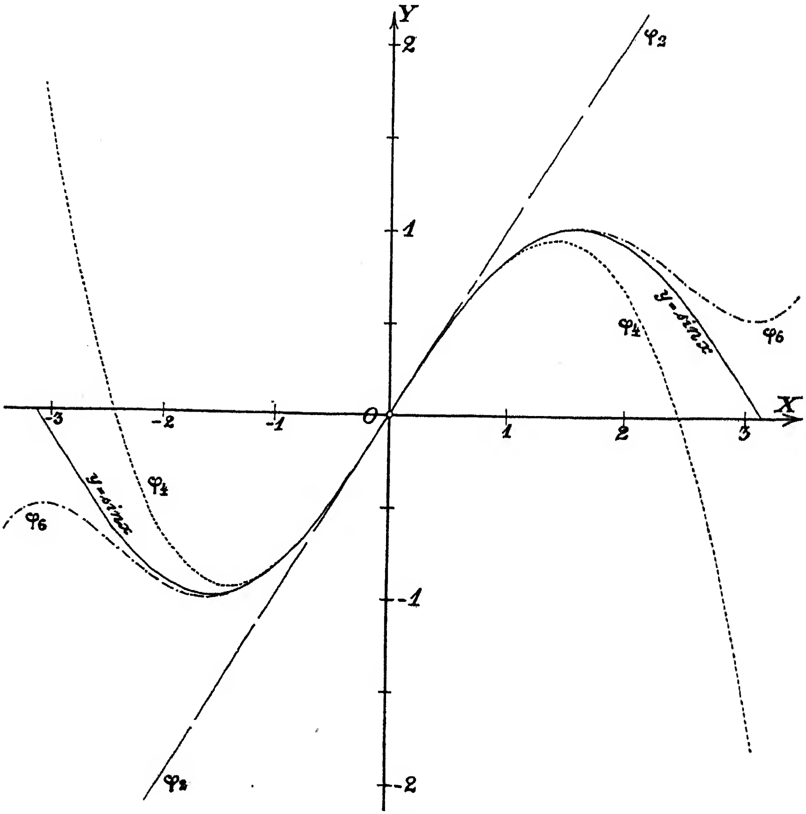


Fig. 376.

Wert Eins an abnimmt, sind die absoluten Beträge der Restglieder in (9) und (10) bei der Beschränkung auf $0 < h < \frac{1}{4}\pi$ kleiner als

$$\frac{(\frac{1}{4}\pi)^{2m+1}}{(2m+1)!} \quad \text{und} \quad \frac{(\frac{1}{4}\pi)^{2m+2}}{(2m+2)!}$$

Für $m = 1, 2, 3$ sind diese Zahlen kleiner als die in folgender Tafel:

m		
1	0,081	0,016
2	0,002 5	0,000 33
3	0,000 037	0,000 003 6

Demnach reicht die Annahme $m = 3$ aus, um $\sin h$ und $\cos h$ aus den Näherungswerten

$$\frac{h}{1!} - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} \quad \text{und} \quad 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \frac{h^6}{6!}$$

mit einem Fehler zu berechnen, der weniger als die Hälfte der vierten Dezimaleinheit ausmacht. In Fig. 376 sind die Bildkurven der Näherungsfunktionen

$$\varphi_2(x) = \frac{x}{1!}, \qquad \varphi_4(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!}, \qquad \varphi_6(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

der Funktion $\sin x$ sowie die Sinuskurve selbst im Intervalle von $x = -\pi$ bis $x = +\pi$ dargestellt. Man vergleiche hiermit die Fig. 375, S. 535. Beide Figuren sind in denselben Maßeinheiten entworfen.

Man kann die Formeln (9) und (10) auch verwenden, um zeichnerisch einen Winkel von gegebenem Bogenmaße zu bestimmen. Dabei sei das Bogenmaß als Veränderliche mit φ statt h bezeichnet. Derjenige Punkt, dessen Koordinaten $x = \cos\varphi$ und $y = \sin\varphi$ sind, liegt auf dem Kreis um den Anfangspunkt O vom Radius 1, weil $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ ist. Außerdem bildet der Radius mit der x-Achse den Winkel φ. Hat man das Bogenmaß φ eines Winkels bestimmt gewählt, so stellt man die Fig. 377 her, indem man die Strecken

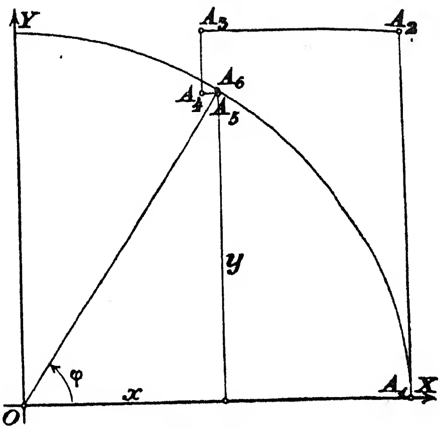


Fig. 377.

$$O A_1 = 1, \qquad A_1 A_2 = \frac{\varphi}{1}, \qquad A_2 A_3 = -\frac{\varphi^2}{1.2}, \qquad A_3 A_4 = -\frac{\varphi^3}{1.2.3}$$

usw. mit nach je zwei Malen wechselndem Vorzeichen immer senkrecht aneinander ansetzt, und zwar nach rechts oder oben, wenn die Strecke das Pluszeichen, dagegen nach links oder unten, wenn sie das Minuszeichen hat. Da die Längen schnell abnehmen, kann man schon nach wenigen Schritten die Endpunkte kaum voneinander unterscheiden. Man nähert sich also schnell einem gewissen Grenzpunkte. Seine x-Koordinate setzt sich aus $O A_1$, $A_2 A_3$ usw. additiv zusammen und ist daher, wie (10) zeigt, gleich $\cos\varphi$, während sich seine y-Koordinate additiv aus $A_1 A_2$, $A_3 A_4$ usw. zusammensetzt und daher, wie (9) zeigt, gleich $\sin\varphi$ ist. Mithin wird der Grenzpunkt derjenige, dessen Radiusvektor mit der positiven x-Achse den Winkel φ bildet. Beachtenswert ist, daß die Konstruktion von selbst auf einen Punkt des Einheitskreises führt. In unserer Figur ist $\varphi = 1$ gewählt worden; die Zeichnung endet dann praktisch schon bei A_6. Das Gradmaß des hier ermittelten Winkels ist nach dem 2. Beispiel, S. 9, 10, gleich 57° 17′ 45″.

Bedeutet ε das Bogenmaß eines Winkels, der so wenig von Null abweicht, daß ε^2 vernachlässigt werden darf, so lehren die Formeln (9) und (10), daß

(11) $$\sin\varepsilon = \varepsilon, \qquad \cos\varepsilon = 1$$

gesetzt werden darf. Aus Satz 16, S. 411, folgt daher, wenn man darin $x = \alpha$ und $y = \varepsilon$ setzt: Wenn ε^2 vernachlässigt werden darf, ist

$$\sin(\alpha + \varepsilon) = \sin\alpha + \varepsilon\cos\alpha, \qquad \cos(\alpha + \varepsilon) = \cos\alpha - \varepsilon\sin\alpha.$$

3. Beispiel: Die Anwendung des Satzes 12 auf $f(x) = e^x$ für $a = 0$ gibt, wie das erste Beispiel zeigte:

(12) $$e^h = 1 + \frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + e^{\theta h}\frac{h^n}{n!},$$

wobei θ zwischen 0 und 1 liegt. Das Restglied strebt nach Null, wenn n über jede Zahl wächst (nach Satz 3, S. 314). Besser ist aber die in Satz 5, S. 318, gefundene Restabschätzung. Hier sei nur noch bemerkt: Ist ε so nahe bei Null gelegen, daß ε^2 vernachlässigt werden darf, so lehrt die Formel (12) für $n = 2$, daß man setzen darf:

$$e^\varepsilon = 1 + \varepsilon.$$

4. Beispiel: Da $\ln x$ für $x = 0$ keinen endlichen Wert hat, kann Satz 12 auf $\ln(a + h)$ für $a = 0$ nicht angewandt werden, wohl aber z. B. für $a = 1$. Da allgemein (vgl. das 7. Beispiel, S. 452)

$$\frac{d^n \ln x}{dx^n} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$$

ist, haben $\ln x$ und die Differentialquotienten von $\ln x$ für $x = 1$ die Werte 0, 1, $-1!$, $2!$, $-3!$, $4!$ usw., so daß sich ergibt:

(13) $$\ln(1 + h) = \frac{h}{1} - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + \cdots \pm \frac{h^{n-1}}{n-1} \mp \frac{h^n}{n(1+\theta h)^n},$$

wobei θ zwischen 0 und 1 liegt. Diese Formel gilt nur für $h > -1$, weil negative Zahlen keine Logarithmen haben, also für den natürlichen Logarithmus einer jeden positiven Zahl. Die unendliche Reihe dagegen, die wir auf S. 277 oben fanden und die aus (13) für $\lim n = \infty$ hervorgehen würde, gilt nur für Numeri, die zwischen 0 und 2 liegen. Allerdings gibt (13) für $h > 1$ eine wenig taugliche Formel, da $1 + \theta h$ irgendeinen Wert zwischen 1 und $1 + h$ haben und daher die Schranke für das letzte Glied der Formel (13) recht groß werden kann. Falls ε so nahe bei Null liegt, daß man ε^2 vernachlässigen kann, weicht $1 + \theta\varepsilon$ nur sehr wenig von Eins ab, weshalb das letzte Glied der Formel (13) bei den Annahmen $h = \varepsilon$ und $n = 2$ vernachlässigt werden darf. Also kommt dann:

(14) $$\ln(1 + \varepsilon) = \varepsilon.$$

Sind N und $N + \delta$ zwei Numeri, so ist

$$\ln(N + \delta) = \ln\left[N\left(1 + \frac{\delta}{N}\right)\right] = \ln N + \ln\left(1 + \frac{\delta}{N}\right),$$

also, wenn $\delta : N$ hinreichend wenig von Null abweicht, nach (14):

$$\ln(N + \delta) = \ln N + \frac{\delta}{N}.$$

Durch Multiplikation mit dem Modul M gehen nach (10), S. 298, Näherungs-

formeln für den gewöhnlichen Logarithmus hervor:

$$\log(1+\varepsilon) = \varepsilon M, \qquad \log(N+\delta) = \log N + \frac{\delta}{N} M.$$

Hiernach ist z. B. $\log 101$ angenähert gleich $\log 100 + 0{,}01\, M$ oder $2{,}00\,434$, und dieser Wert unterscheidet sich von dem wahren Werte $2{,}00\,432$ erst in der fünften Dezimalstelle.

Unten (8) haben wir den Fehler oder Rest R, um den sich die Näherungsfunktion $\varphi_{n-1}(x)$ für $x = h$ von der richtigen Funktion $f(x)$ unterscheidet, auf die Form gebracht:

$$R = f^{(n)}(a + \theta h)\frac{h^n}{n!}. \tag{15}$$

Die zwischen 0 und 1 gelegene Zahl θ ist nicht näher bekannt, weshalb wir uns eben damit begnügen müssen, bei der Abschätzung des Fehlers alle Werte $a + \theta h$ im Intervalle von $x = a$ bis $x = a + h$ ins Auge zu fassen. Deshalb kann die Fehlerabschätzung, selbst wenn der Fehler wirklich nur klein ist, zu roh ausfallen. Weil dies bei der Lagrangeschen Restform (15) tatsächlich öfters vorkommt, hat man den Rest durch ähnliche Überlegungen wie auf S. 540 u. f. auf gewisse andere Formen gebracht. Wir wollen davon absehen, sie mitzuteilen, und nur ein besonders wichtiges Beispiel, in dem die Lagrangesche Restform versagt, auf andere Art behandeln.

5. Beispiel: Nach S. 327 soll unter einer Potenz $(1+x)^m$, worin der Exponent m irgendeine positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl sein darf, ihr positiver Wert verstanden werden, sobald die Basis $1 + x$ positiv, also $x > -1$ ist. Setzt man $f(x) = (1+x)^m$, so wird

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}, \qquad f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}, \ldots,$$

also für $x = 0$:

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = m, \qquad f''(0) = m(m-1), \ldots$$

Die Anwendung des Satzes 12 für $a = 0$ liefert daher:

$$\left\{\begin{aligned}(1+h)^m = 1 &+ \frac{m}{1!}h + \frac{m(m-1)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{(n-1)!}h^{n-1} \\ &+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}(1+\theta h)^{m-n}h^n,\end{aligned}\right. \tag{16}$$

wobei θ zwischen 0 und 1 liegt. Hat m insbesondere einen positiven ganzzahligen Wert, so kann man die ganze positive Zahl n gleich m annehmen. Dann wird $(1+\theta h)^{m-n}$ gleich Eins, und es ergibt sich die bekannte Formel

$$(1+h)^n = 1 + \frac{n}{1!}h + \frac{n(n-1)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{n!}h^n \tag{17}$$

für eine ganze positive Potenz eines Binoms, d. h. einer zweigliedrigen

Summe, also der sogenannte **binomische Lehrsatz.** (Er trat gelegentlich schon im 9. Beispiel, S. 452, auf.) Die Koeffizienten heißen die **Binomialkoeffizienten**, und man bezeichnet den Koeffizienten von h^k so:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k} \qquad (k = 1, 2, \ldots n). \tag{18}$$

Da er gleich $n! : [k!(n-k)!]$ ist, beweist man sofort die Formeln:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \qquad \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k},$$

von denen die erste zeigt, daß die Binomialkoeffizienten in (17) symmetrisch angeordnet sind, so daß also der letzte wieder gleich Eins ist, während man auf Grund der zweiten Formel in bekannter Weise die Binomialkoeffizienten der n^{ten} Potenz aus denen der $(n-1)^{\text{ten}}$ Potenz ableitet. Mit Benutzung der Bezeichnung (18) lautet die binomische Formel (17) so:

$$(1+h)^n = 1 + \binom{n}{1} h + \binom{n}{2} h^2 + \ldots + \binom{n}{n} h^n$$

oder auch, wenn man noch festsetzt, daß $\binom{n}{0}$ die Eins bedeuten soll.

$$(1+h)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} h + \binom{n}{2} h^2 + \ldots + \binom{n}{n} h^n. \tag{19}$$

Wenn nun aber der **Exponent** m von $1+h$ **keine ganze positive Zahl** ist, kann man die ganze positive Zahl n nicht gleich m wählen; vielmehr tritt dann in der Entwicklung (16) stets ein letztes Glied auf, das mit $\mathfrak{h}$ behaftet ist und nur abgeschätzt werden kann. Die Schranke für dieses Glied wird zu groß, wenn h negativ ist. Man kann aber auf anderen Wegen beweisen, **daß der absolute Betrag des Restgliedes nach Null strebt, sobald die Anzahl n immer weiter wächst, und zwar unter der Voraussetzung** $-1 < h < 1$. Wir zeigen es so[1]:

Indem wir h wieder mit x bezeichnen, bilden wir eine nach (16) nahe liegende Funktion, nämlich diese:

$$F(x) = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n - (1+x)^m. \tag{20}$$

Sie hat für $x = 0$ den Wert Null. Ihr Differentialquotient ist:

$$F'(x) = m + \frac{m(m-1)}{1!}x + \ldots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} - m(1+x)^{m-1}.$$

Wenn man ihn mit $1+x$, dagegen $F(x)$ mit m multipliziert und dann beides voneinander abzieht, bleibt nur ein mit x^n behaftetes Glied stehen, indem sich alles andere forthebt. Man bekommt:

$$(1+x)F'(x) - mF(x) = -\frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{n!}x^n.$$

[1] Wenn diese Betrachtungen noch zu schwierig oder gerade hier störend sein sollten, raten wir, sie **vorläufig** zu überschlagen und erst beim Ergebnisse (24) auf S. 550 weiter zu lesen.

Dividiert man diese Gleichung mit $(1+x)^{m+1}$, so wird ihre linke Seite nichts anderes als der Differentialquotient von $F(x):(1+x)^m$. Da $F(0)=0$ ist, ergibt sich also durch Integration von $x=0$ bis $x=h$:

$$\frac{F(h)}{(1+h)^m}=\int_0^h -\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{n!}\frac{x^n\,dx}{(1+x)^{m+1}}.$$

Setzen wir zur Abkürzung die Konstante

(21) $$\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{n!}=c,$$

so haben wir also:

(22) $$\frac{F(h)}{(1+h)^m}=\int_0^h\frac{-c\,x^n\,dx}{(1+x)^{m+1}}.$$

Zunächst wollen wir jetzt h positiv annehmen. Dann durchläuft x von 0 bis h wachsend lauter positive Werte, so daß dx und $1+x$ positiv sind. Da nun das Integral nach Satz 4, S. 228, eine Summe vorstellt, also sein absoluter Betrag nach Satz 8, S. 59, nicht größer als der absolute Betrag desjenigen Integrals ist, das hervorgeht, wenn man den Integranden durch seinen absoluten Betrag ersetzt, gibt (22):

$$\left|\frac{F(h)}{(1+h)^m}\right|\leqq\int_0^h\frac{|c|x^n\,dx}{(1+x)^{m+1}}.$$

Da x zwischen 0 und h liegt, also $1+x\geqq 1$ ist, wird der Integrand und folglich auch der Wert des Integrals sicher vergrößert, wenn man 1 statt $1+x$ setzt. Dann aber hat das Integral einen sofort auszurechnenden Wert, und so kommt:

(23) $$\left|\frac{F(h)}{(1+h)^m}\right|\leqq\frac{|c|\,h^{n+1}}{n+1}$$

oder nach (21):

$$\left|\frac{F(h)}{(1+h)^m}\right|\leqq\left|\frac{mh}{1}\cdot\frac{(m-1)h}{2}\cdot\frac{(m-2)h}{3}\cdots\frac{(m-n)h}{n+1}\right|.$$

Hier sieht man nun leicht ein, daß die rechte Seite nach Null strebt, wenn n über jede Zahl wächst, vorausgesetzt, daß die positive Zahl h kleiner als Eins ist. Mit endlos wachsendem n treten nämlich rechts immer neue Faktoren hinzu, und von einem gewissen n an sind sie sämtlich kleiner als Eins, welchen Wert auch m haben mag.

Nun wollen wir h negativ annehmen und gleich $-k$ setzen, so daß k eine positive Zahl bedeutet. Dann gibt (22):

$$\frac{F(-k)}{(1-k)^m}=\int_0^{-k}\frac{-c\,x^n\,dx}{(1+x)^{m+1}}.$$

Das Integral ist nach Satz 4, S. 228, die Summe aller unendlich kleinen Größen

$$\frac{-c\,x^n\,dx}{(1+x)^{m-1}},$$

die sich ergeben, wenn x Schritt für Schritt um dx von 0 an bis $-k$ abnimmt Wenn man $x = -t$ setzt, bedeutet t eine Veränderliche, die von 0 bis k zunimmt. Da dann $x^n = (-1)^n t^n$, $dx = -dt$ ist, stellt das Integral die Summe aller unendlich kleinen Größen

$$\frac{c(-1)^n t^n dt}{(1-t)^{m+1}}$$

dar, die sich ergeben, wenn t Schritt für Schritt um dt von 0 bis k zunimmt, d. h. es ist die Summe

$$\int_0^k \frac{c(-1)^n t^n dt}{(1-t)^{m+1}},$$

wo die obere Grenze k und nicht $-k$ ist. Also hat man:

$$\frac{F(-k)}{(1-k)^m} = \int_0^k \frac{(-1)^n c t^n dt}{(1-t)^{m+1}}.$$

Ist nun k **kleiner als Eins**, d. h. liegt k zwischen 0 und 1, so ist der kleinste Wert, den $1-t$ im Intervalle von $t=0$ bis k bekommt, nämlich der Wert $1-k$, immer noch positiv, und wir folgern deshalb ähnlich wie im Fall, wo h positiv war:

$$\left|\frac{F(-k)}{(1-k)^m}\right| \leqq \int_0^k \frac{|c| t^n dt}{(1-k)^{m+1}}.$$

Weil $|c|$ und $(1-k)^{m+1}$ Konstanten sind, läßt sich das Integral sofort auswerten. So kommt:

$$\left|\frac{F(-k)}{(1-k)^m}\right| < \frac{|c| k^{n+1}}{(1-k)^{m-1}(n+1)}.$$

Hier gilt nun dasselbe wie für (23): Die rechte Seite strebt, wenn n über jede Zahl wächst, nach Null. Man hat sich jetzt daran zu erinnern, daß $h = -k$ gesetzt worden war und $k < 1$ angenommen wurde, so daß h zwischen 0 und -1 liegt. Folglich ist bewiesen, daß

$$\frac{F(h)}{(1+h)^m}$$

nicht nur für $0 < h < 1$, **sondern auch für** $0 > h > -1$ **nach Null strebt, sobald** n **über jede Zahl wächst.**

Da nun der Nenner $(1+h)^m$ gar nicht von der Zahl n abhängt, also einerlei Wert behält, wenn n über jede Zahl wächst, heißt dies, daß $F(h)$ selbst für $\lim n = \infty$ nach Null strebt. Nach (20) ist $F(h)$ die Differenz zwischen einer Summe von $n+1$ Gliedern und der Potenz $(1+h)^m$. Mithin muß für $\lim n = \infty$ der Minuend nach dem Subtrahenden streben, falls $-1 < h < +1$ ist. Dann aber wird der Minuend, der $n+1$ Glieder hat, eine unendliche Reihe. Also ist bewiesen:

Sobald h **zwischen** -1 **und** $+1$ **liegt, ist** $(1+h)^m$ **als die unendliche Reihe**

(24) $$(1+h)^m = 1 + \frac{m}{1!}h + \frac{m(m-1)}{2!}h^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}h^3 + \dots$$

darstellbar.

Man kann beweisen, daß die Formel (24) nicht mehr für $|h| > 1$ gilt, auch nicht für $h = 1$ und $m \leqq -1$ sowie für $h = -1$ und $m < 0$, während sie für $h = 1$ und $m > 1$ und für $h = -1$ und $m \geqq 0$ richtig ist. Wir brauchen diese Entwicklung aber nur im Fall $|h| < 1$, für den wir ihre Richtigkeit nachgewiesen haben. Am meisten werden die Annahmen $m = -1$, $m = \frac{1}{2}$ und $m = -\frac{1}{2}$ angewandt. Ist $m = -1$, so geht die unendliche Reihe für $1:(1+h)$ hervor, die wir schon kennen, vgl. Satz 2, S. 274. Bei den Annahmen $m = \frac{1}{2}$ und $m = -\frac{1}{2}$ kommt für $|h| < 1$:

$$(25)\quad \begin{cases} \sqrt{1+h} = 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{2.4}h^2 + \frac{1.3}{2.4.6}h^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}h^4 + \ldots, \\ \frac{1}{\sqrt{1+h}} = 1 - \frac{1}{2}h + \frac{1.3}{2.4}h^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}h^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}h^4 - \ldots \end{cases}$$

Bricht man die erste Reihe nach dem n^{ten} Glied ab, das mit h^{n-1} behaftet ist, so fehlt ein Rest R, der augenscheinlich absolut genommen nicht größer als

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots 2n}|h|^n\left[1 + \frac{2n-1}{2n+2}|h| + \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n+2)(2n+4)}|h|^2 + \ldots\right],$$

also erst recht kleiner als

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots 2n}|h|^n(1 + |h| + |h|^2 + \ldots)$$

ist. Dafür kann man nach Satz 2, S. 274, wegen $|h| < 1$ setzen:

$$(26)\qquad |R| < \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots 2n}\,\frac{|h|^n}{1-|h|}.$$

Bei der zweiten Reihe (25) ergibt sich ganz entsprechend:

$$(27)\qquad |R| < \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\,\frac{|h|^n}{1-|h|}.$$

Die zweite Formel (25) gibt, wenn man $h = -x^2$ setzt, für $|x| < 1$, die öfters gebrauchte unendliche Reihe:

$$(28)\qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \cdots$$

Hervorgehoben sei schließlich noch einmal, daß die Formeln (25) und (28) f ü r d i e p o s i t i v e n W e r t e d e r Q u a d r a t w u r z e l n g e l t e n, vgl. das zu Anfang dieses Beispiels Gesagte.

Ist ε so nahe bei Null gelegen, daß ε^2 vernachlässigt werden darf, so gehen aus (25) die öfters gebrauchten Näherungswerte

$$\sqrt{1+\varepsilon} = 1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon, \qquad \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} = 1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

hervor. Ferner ist:

$$\sqrt{a+\varepsilon} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{a}},$$

und deshalb ergeben sich auch die Näherungsformeln:

$$\sqrt{a+\varepsilon} = \sqrt{a}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2a}\right), \qquad \frac{1}{\sqrt{a+\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2a}\right).$$

Statt Satz 11 oder 12 auf die zu berechnende Funktion geradezu anzuwenden, ist es zuweilen bequemer, zunächst den Differentialquotienten der Funktion auf Grund dieser Sätze auszudrücken und dann mittels Integration zur Funktion überzugehen. Hierzu ein Beispiel:

6. Beispiel: Statt $\arcsin x$ zu berechnen, wobei x stets zwischen -1 und $+1$ liegen muß, weil der Sinus nie diese Grenzen überschreitet, stellen wir zuerst die TAYLORsche Formel für den Differentialquotienten von $\arcsin x$ also für $1 : \sqrt{1-x^2}$ mit positiver Wurzel auf. Nach (28) ist für $|x| < 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}x^{2n-2} + R,$$

wobei der Rest R absolut genommen kleiner als eine beliebig klein gewählte positive Zahl ε wird, wenn man nur n hinreichend groß annimmt. Durch Integration von $x = 0$ bis $x = h$ kommt:

$$\arcsin h = \frac{h}{1} + \frac{1}{2}\frac{h^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{h^5}{5} + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}\frac{h^{2n-1}}{2n-1} + \int_0^h R\,dx,$$

und hierbei bedeutet $\arcsin h$ den zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ gelegenen Winkel, dessen Sinus gleich h ist. Wir können hierfür schreiben:

$$(29)\qquad \arcsin h = \frac{h}{1} + \frac{1}{2}\frac{h^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{h^5}{5} + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}\frac{h^{2n-1}}{2n-1} + \mathfrak{R},$$

wobei der Rest

$$\mathfrak{R} = \int_0^h R\,dx$$

ist. Wählen wir h positiv, so wächst x unter dem Integralzeichen von 0 bis h. Im andern Fall setzen wir $x = -t$, um zu erreichen, daß t wächst (wie wir es auch auf S. 550 taten). Deshalb dürfen wir uns auf den Fall $h > 0$ beschränken. Da das Integral eine Summe bedeutet, ist sein absoluter Betrag nach Satz 8, S. 59, nicht größer als

$$\int_0^h |R|\,dx,$$

und wegen $|R| < \varepsilon$ kommt daher um so mehr:

$$|\mathfrak{R}| < \int_0^h \varepsilon\,dx = \varepsilon h,$$

denn ε stellt eine Konstante vor (was von R nicht gilt, denn R ist von x abhängig). Weil $|h| < 1$ ist, wird daher auch $\mathfrak{R}$ absolut genommen kleiner als ε. Durch Annahme eines genügend großen n wird also der absolute Betrag des Restes $\mathfrak{R}$ in (29) so klein, wie man nur will. Deshalb ergibt sich für $\lim n = \infty$ die unendliche Reihe:

$$(30) \qquad \operatorname{arc\,sin} h = \frac{h}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{h^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{h^5}{5} + \cdots,$$

wobei $|h| < 1$ ist. Man kann auch leicht ihren Rest abschätzen, wie es bei den Reihen (25) geschah. Bricht man nämlich die Reihe (30) nach dem Glied mit h^{2n-1} ab, so ist der absolute Betrag des Restes kleiner als

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\;\frac{|h|^{2n+1}}{2n+1}\;\frac{1}{1-|h|}.$$

Unter den Konstanten, die in der Mathematik auftreten, sind besonders zwei Zahlen wichtig, nämlich π und e. Wie man e berechnet, wurde auf S. 325 gezeigt. Für die Ermittelung der Zahl π gibt man im Schulunterricht ein zwar geometrisch anschauliches, aber mühsames Verfahren. Es dürfte deshalb angebracht sein, zu zeigen, wie man schneller zum Ziele kommt. Dazu dient die Berechnung der zyklometrischen Funktionen. Weil $\operatorname{arc\,sin}\frac{1}{2} = \frac{1}{6}\pi$ ist, wie man beim halben gleichseitigen Dreieck sofort sieht, kann $\frac{1}{6}\pi$ aus (30) gefunden werden, wenn man $h = \frac{1}{2}$ setzt. Man kann aber auch die Funktion $\operatorname{arc\,tg} x$ benutzen. Wir beschließen daher die Beispiele mit der Berechnung dieser Funktion und ihrer Anwendung zur Ermittelung des Wertes von π.

7. Beispiel: Die höheren Differentialquotienten von $\operatorname{arc\,tg} x$ wurden im 11. Beispiel, S. 453 u. f., gefunden. Danach gibt die Anwendung des Satzes 12:

$$(31) \qquad \operatorname{arc\,tg} h = \frac{h}{1} - \frac{h^3}{3} + \frac{h^5}{5} - \frac{h^7}{7} + \cdots.$$

Das Restglied der Reihe strebt nach Null, wenn die Entwicklung bis ins Unendliche fortgesetzt wird, und zwar unter der Voraussetzung, daß h zwischen -1 und $+1$ liegt oder auch gleich -1 oder $+1$ ist, denn da sich die Reihe von der für den halben natürlichen Logarithmus von $(1+h):(1-h)$ nur durch die Vorzeichen der Glieder unterscheidet, geschieht die Restabschätzung gerade so wie in Satz 5, S. 281 u. f. Die Formel gibt denjenigen zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ gelegenen Winkel, dessen Tangens gleich h ist. Insbesondere ist $\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{1}{4}\pi$, so daß die nach Leibniz (vgl. S. 69) benannte Reihe entsteht:

$$\tfrac{1}{4}\pi = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \cdots.$$

Ihre Glieder nehmen aber sehr langsam ab. Zur schnelleren Berechnung von π sucht man einen kleinen Winkel, dessen Tangens einen möglichst runden Wert hat und von dem ein ganzes Vielfaches nahe bei $\frac{1}{4}\pi$ liegt. Ist z. B. α der spitze Winkel, dessen Tangens gleich $\frac{1}{5}$ ist, so wird $\operatorname{tg} 2\alpha$ gleich $\frac{5}{12}$, also $\operatorname{tg} 4\alpha$ gleich $\frac{120}{119}$ (nach Satz 17, S. 412). Dieser Wert liegt nahe bei Eins, also 4α nahe bei $\frac{1}{4}\pi$. Nach Satz 16, S. 411, wird $\operatorname{tg}(4\alpha - \frac{1}{4}\pi)$ gleich $\frac{1}{239}$. Deshalb ist

$$\tfrac{1}{4}\pi = 4\operatorname{arc\,tg}\tfrac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg}\tfrac{1}{239},$$

so daß (31) gibt:

$$\tfrac{1}{4}\pi = 4\left[\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{5}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1}{5}\right)^5 - \ldots\right] - \left[\tfrac{1}{239} - \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{239}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1}{239}\right)^5 - \ldots\right].$$

Bricht man die erste Reihe nach der siebenten und die zweite nach der ersten Potenz ab, so wird der absolute Betrag des Fehlers kleiner als 0,000 000 25, wie man leicht findet. Deshalb ergibt der Näherungswert

$$4\left[\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{5}\right)^3+\tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1}{5}\right)^5-\tfrac{1}{7}\left(\tfrac{1}{5}\right)^7\right]-\tfrac{1}{239}$$

bei der Abrundung auf acht Dezimalstellen und unter Berücksichtigung des denkbar größten Fehlers, daß $\frac{1}{4}\pi$ zwischen 0,785 397 66 und 0,785 398 18 liegt so daß π auf fünf Dezimalstellen abgerundet gleich 3,141 59 ist.

§ 5. Verschiedene Anwendungen der TAYLORschen Formel.

In den Beispielen des vierten Paragraphen gelangten wir zu einer Anzahl von unendlichen Reihen. Nun wurde schon gelegentlich (auf S. 314 u. f.) darauf hingewiesen, daß man mit solchen Reihen vorsichtig sein muß, weil sie unter Umständen unendlich große oder gar keine bestimmten Werte haben. Man muß deshalb, wenn eine nach irgendeinem Gesetze gebildete unendliche Reihe

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

vorliegt, untersuchen, ob sie einen bestimmten endlichen Wert hat oder, wie man sagt, konvergiert. Man bricht nämlich die Reihe wie auf S. 316 nach irgend einem Glied, etwa dem n^{ten}, ab:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

und untersucht, ob dieser Ausdruck einen bestimmten endlichen Grenzwert für $\lim n = \infty$ hat. Da man beliebig viele Glieder $a_{n+1}, a_{n+2} \dots a_{n+m}$ addieren kann, heißt dies: man muß untersuchen, ob die Summe

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m},$$

in der die Anzahl m der Glieder beliebig groß sein darf, nach Null strebt, falls n über jede Zahl wächst. Ist dies nicht der Fall, so ist die Reihe sinnlos, sie divergiert alsdann.

Auf Grund des Satzes 12, S. 541 u. f., kamen wir nun zu unendlichen Reihen, für die man den Nachweis der Konvergenz auch anders führen kann. Wenn nämlich eine Funktion $f(x)$ und alle ihre höheren Differentialquotienten im Intervalle von $x = a$ bis $x = a + h$ bestimmte endliche Werte haben, kann man die Formel des Satzes:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\frac{h}{1!} + f''(a)\frac{h^2}{2!} + \dots + f^{(n-1)}(a)\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + R,$$

worin

$$R = f^{(n)}(a + \theta h)\frac{h^n}{n!}$$

ist, für jede beliebig große ganze positive Zahl n bilden. Die Summe der n Glieder

$$f(a) + f'(a)\frac{h}{1!} + f''(a)\frac{h^2}{2!} + \ldots + f^{(n-1)}(a)\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}$$

weicht von $f(a+h)$ um den Rest R ab, worin θ eine gewisse, allerdings unbekannte Zahl zwischen 0 und 1 bedeutet. Wenn man nun imstande ist, zu beweisen, daß R für alle Zahlen θ von 0 bis 1 nach Null strebt, sobald n immer größer wird, weicht die Summe der n ersten Glieder um so weniger von $f(a+h)$ ab, je größer n gewählt wird. Deshalb darf man dann für $f(a+h)$ die unendliche Reihe

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\frac{h}{1!} + f''(a)\frac{h^2}{2!} + \ldots$$

ansetzen, und eine weitere Konvergenzuntersuchung ist nicht nötig. Diese unendliche Reihe heißt die Taylorsche Reihe. Beispiele wurden im vorigen Paragraphen gebracht. Weil die Reihe nach den Potenzen von h fortschreitet, heißt sie eine Potenzreihe. Wir sagen also:

Satz 14: Wenn eine Funktion $f(x)$ und alle ihre Differentialquotienten überall im Intervalle von $x = a$ bis $x = a + h$ bestimmte endliche Werte haben und der Wert von

$$f^{(n)}(a + \theta h)\frac{h^n}{n!}$$

für alle Zahlen θ von 0 bis 1 mit unbegrenzt wachsendem n nach Null strebt, gilt die unendliche Potenzreihe:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\frac{h}{1!} + f''(a)\frac{h^2}{2!} + \ldots .$$

Selbstverständlich gilt die Reihe unter diesen Umständen erst recht für Werte k statt h, die man zwischen 0 und h wählt. Wenn wir nun $a + k$ mit x bezeichnen, haben wir also den

Satz 15: Wenn eine Funktion $f(x)$ und alle ihre Differentialquotienten überall im Intervalle von $x = a$ bis $x = a + h$ bestimmte endliche Werte haben und der Wert von

$$f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!}$$

überall im Intervalle mit unbegrenzt wachsendem n nach Null strebt, gilt überall im Intervalle die unendliche

Potenzreihe:

$$f(x) = f(a) + f'(a)\frac{x-a}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots$$

Bei wirklichen Berechnungen muß man die unendlichen Reihen immer abbrechen; dann braucht man den Satz 12, S. 541 u. f., zur Abschätzung des Restes.

Wir ziehen aus Satz 12 noch einen Schluß: Wenn $f(x)$ und die Differentialquotienten $f'(x), f''(x) \ldots f^{(n)}(x)$ überall im Intervalle von $x = a$ bis $x = a + h$ bestimmte endliche Werte haben, gibt der Satz:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\frac{h}{1!} + f''(a)\frac{h^2}{2!} + \cdots + f^{(n-1)}(a)\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}$$
$$+ f^{(n)}(a + \theta h)\frac{h^n}{n!},$$

wobei θ zwischen 0 und 1 liegt. Die Summe der beiden letzten Glieder ist:

$$\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\left[f^{n-1}(a) + \frac{h}{n} f^{(n)}(a + \theta h)\right].$$

Falls $f^{(n-1)}(a)$ nicht etwa zufällig gerade den Wert Null hat, kann man h so nahe bei Null wählen, daß der zweite Summand in der Klammer ohne Einfluß auf das Vorzeichen der in der Klammer stehenden Summe ist. Denn wenn $f^{(n)}(x)$ im Intervall als größten absoluten Betrag den Wert μ_n hat, genügt es zu diesem Zweck

$$|h| < \frac{n}{\mu_n} |f^{(n-1)}(a)|$$

anzunehmen. Ist dagegen zufällig $f^{(n-1)}(a) = 0$, aber $f^{(n-2)}(a) \neq 0$, so kann man einen entsprechenden Schluß für die beiden letzten wirklich auftretenden Glieder der Entwicklung machen, usw. Deshalb ergibt sich der

Satz 16: Gilt die Taylorsche Formel des Satzes 12, S. 541 u. f., so kann man h so nahe bei Null wählen, daß sich das Vorzeichen desjenigen letzten vor dem Restgliede stehenden Gliedes, das nicht gleich Null ist, dadurch nicht ändert, daß man das Restglied zu ihm addiert.

Mittels dieses Satzes kann man aufs neue zur Aufstellung der Kennzeichen eines Maximums oder Minimums gelangen. Wir wollen annehmen, daß die Taylorsche Formel in der Umgebung von $x = a$ für eine Funktion $f(x)$ gelte, d. h. sowohl für $a + h$ als auch für $a - h$, wenn h eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet. Ein Maximum oder Minimum kann $f(x)$ für $x = a$ nur dann haben, wenn $f(a + h)$ und $f(a - h)$ zugleich beide

kleiner oder zugleich beide größer als $f(a)$ sind. Nun kann es vorkommen, daß an der Stelle $x = a$ mehrere der Werte $f'(x)$, $f''(x), \ldots$ gleich Null werden. Um sogleich den allgemeinsten Fall zu betrachten, nehmen wir an, es sei

$$f'(a) = f''(a) \ldots = f^{(n-2)}(a) = 0, \qquad \text{aber} \qquad f^{(n-1)}(a) \neq 0.$$

Dann gibt die Taylorsche Formel

$$f(a+h) - f(a) = f^{(n-1)}(a)\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n)}(a+\theta h)\frac{h^n}{n!}$$

sowohl für positives als auch für negatives h. Nach dem letzten Satz hat nun die Differenz $f(a+h) - f(a)$ dasselbe Vorzeichen wie

$$f^{(n-1)}(a)\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Dies Vorzeichen wechselt mit dem von h, wenn $n-1$ ungerade ist, ist dagegen immer dasselbe, nämlich das von $f^{(n-1)}(a)$, wenn $n-1$ gerade ist. Folglich tritt nur dann ein Maximum oder Minimum ein, wenn der erste nicht verschwindende Differentialquotient $f^{(n-1)}(a)$ geraden Index $n-1$ hat, und zwar ergibt sich ein Maximum oder Minimum, je nachdem sein Wert negativ oder positiv ist. Hiermit ist Satz 9, S. 465, von neuem bewiesen.

Eine andere Anwendung der Taylorschen Formel ist die zur Ermittlung des Wertes einer sogenannten unbestimmten Form: Handelt es sich darum, den Wert eines Bruches von zwei Funktionen $u(x)$ und $v(x)$, also $u(x):v(x)$, für einen bestimmten Wert $x = a$ zu finden, so kann es vorkommen, daß sowohl $u(a)$ als auch $v(a)$ gleich Null wird. Aber unter $0:0$ kann man jede beliebige Größe verstehen. Denn $0:0$ bedeutet die Anzahl der Nullen, die in Null enthalten sind, und die ist beliebig groß. Wenn jedoch bei Naturerscheinungen oder Versuchen eine Funktion

$$y = \frac{u(x)}{v(x)}$$

vorkommt und x stetig nach a gelangt, wird y für $x = a$ den Grenzwert

$$\lim_{x=a} \frac{u(x)}{v(x)}$$

annehmen. Anders ausgedrückt: Setzen wir $x = a + h$, so nimmt y für $x = a$ denjenigen Grenzwert

$$\lim \frac{u(a+h)}{v(a+h)}$$

an, der für $\lim h = 0$ hervorgeht. Ihn können wir vermöge der Taylorschen Formel ermitteln. Wir setzen voraus daß $u(x)$ und $v(x)$ sowie ihre Differentialquotienten $u'(x)$ und $v'(x)$ in der Umgebung von $x = a$ bestimmte endliche Werte haben. Insbesondere soll außerdem, wie gesagt, noch $u(a) = 0$ und $v(a) = 0$ vorausgesetzt werden. Dann ist nach Satz 13, S. 542:

$$u(a+h) = u'(a+\theta_1 h)\,h, \qquad v(a+h) = v'(a+\theta_2 h)\,h,$$

wo θ_1 und θ_2 zwischen 0 und 1 liegen. Demnach kommt:

$$\lim_{h=0} \frac{u(a+h)}{v(a+h)} = \lim_{h=0} \frac{u'(a+\theta_1 h)}{v'(a+\theta_2 h)}.$$

Da aber $a + \theta_1 h$ und $a + \theta_2 h$ für $\lim h = 0$ in a übergehen, ergibt sich:

$$\lim_{h=0} \frac{u(a+h)}{v(a+h)} = \frac{u'(a)}{v'(a)},$$

vorausgesetzt, daß $u'(x)$ und $v'(x)$ für $x = a$ stetig sind. Somit haben wir den

Satz 17: Sind die Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ für $x = a$ zwar stetig, aber beide gleich Null, so ist der Grenzwert

$$\lim_{h=0} \frac{u(a+h)}{v(a+h)} = \frac{u'(a)}{v'(a)},$$

wenn $u'(x)$ und $v'(x)$ stetig sind, aber nicht zugleich den Wert Null haben.

Man kann dies auch geometrisch einsehen: Da $u(a) = 0$ und $v(a) = 0$ sein soll, haben die Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ Bildkurven, die durch den Punkt A der x-Achse mit der Abszisse a gehen, siehe Fig. 378. Für ein beliebiges $x = OQ$ seien U und V die Punkte der Kurven, also $QU = u(x)$, $QV = v(x)$. Gefragt wird, was aus $QU : QV$ wird, wenn Q nach A strebt, daher auch U und V längs der Kurven nach A streben. Weil

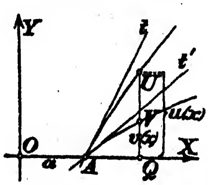


Fig. 378.

$$\frac{QU}{QV} = \frac{QU : AQ}{QV : AQ}$$

ist und $QU : AQ$ und $QV : AQ$ die Steigungen der Geraden von A nach U und von A nach V sind, diese Geraden aber beim Grenzübergange die Tangenten t und t' des Punktes A der beiden Bildkurven werden, muß der Grenzwert in der Tat gleich dem Verhältnisse der Steigungen $u'(a)$ und $v'(a)$ der Tangenten t und t' von A sein.

Die Grenzwerte zunächst unbestimmter Formen $0 : 0$ findet man also, indem man den Zähler $u(x)$ und den Nenner $v(x)$, jeden für

sich, differentiiert und dann in $u'(x):v'(x)$ für x den in Betracht kommenden Wert a einsetzt. Natürlich darf man dies nicht mit der Regel für die Differentiation eines Bruches verwechseln; die hat damit ganz und gar nichts zu tun.

1. Beispiel:

$$\lim_{x=1} \frac{x^2-2x+1}{e^{x-1}-1} = \lim_{x=1} \frac{2x-2}{e^{x-1}} = 0.$$

Es kann vorkommen, daß $u'(a)$ und $v'(a)$ ebenfalls beide gleich Null sind. Dann haben wir noch einmal ebenso zu verfahren, d. h. den Wert von $u''(x):v''(x)$ für $x=a$ zu ermitteln, usw.

2. Beispiel: Auf einem Kreis um M mit dem Radius a sei ein Punkt A gewählt; seine Tangente sei t, siehe Fig. 379. Von A werde ein Bogen AU auf dem Kreis und eine gerade so lange Strecke AV auf der Tangente nach derselben Richtung hin abgetragen. Die Gerade VU schneidet die Gerade AM an einer Stelle W. Wo liegt W, wenn der Bogen AU und die gleichlange Strecke AV nach Null streben? Zeichnerisch läßt sich W dann nicht mehr ermitteln, wohl aber rechnerisch: Zunächst sei $\sphericalangle AMU$ von beliebiger Größe x zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, so daß der Bogen AU und die Strecke AV gleich ax sind. Aus der Figur ergibt sich $AV:AW = QU:QW$ oder, wenn $MW = y$ gesetzt wird:

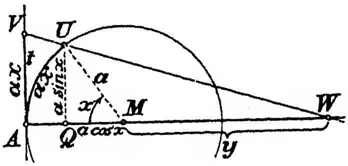


Fig. 379.

$$ax:(a+y) = a\sin x:(a\cos x + y),$$

woraus

$$y = a\,\frac{\sin x - x\cos x}{x - \sin x}$$

folgt. Wird $x=0$ gesetzt, so erscheint y in der unbestimmten Form $0:0$. Also ist nach Satz 17 zu rechnen:

$$\lim_{x=0} y = a \lim_{x=0} \frac{x\sin x}{1-\cos x}.$$

Aber der letzte Bruch hat für $x=0$ wieder die Form $0:0$. Abermalige Anwendung des Satzes gibt:

$$\lim_{x=0} y = a \lim_{x=0} \frac{\sin x + x\cos x}{\sin x},$$

und der letzte Bruch hat für $x=0$ wieder die Form $0:0$. Nochmalige Anwendung des Satzes liefert:

$$\lim_{x=0} y = a \lim_{x=0} \frac{2\cos x - x\sin x}{\cos x} = 2a.$$

Demnach strebt der Punkt W nach derjenigen Lage, die durch $MW = 2a$ oder $AW = 3a$ bestimmt wird.

Dies Ergebnis führt zu einem bequemen Näherungsverfahren für die Rektifikation von Kreisbogen, d. h. für die Darstellung von

Kreisbogen durch gleichlange Strecken.[1] Zieht man nämlich von dem soeben gefundenen Punkt W aus, für den $AW = 3a$ ist, eine beliebige Gerade, die mit WA keinen allzu großen Winkel bildet, und trifft diese Grade den Kreis und die Tangente von A in der Nähe von A in U und V, so darf man vermuten, daß der Bogen AU nahezu gleich der Strecke AV sei. In der Tat: Wird wieder $\sphericalangle AMU = x$ gesetzt, so ist auch jetzt $AV : AW = QU : QW$, also $AV : 3a$ gleich $\sin x : (2 + \cos x)$ und daher AV gleich $3a \sin x$, dividiert mit $2 + \cos x$. Anderseits ist der Bogen AU gleich ax, mithin der absolute Fehler die Differenz

$$\text{Bogen } AU - \text{Strecke } AV = a\frac{2x + x\cos x - 3\sin x}{2 + \cos x}.$$

Der relative Fehler geht hieraus nach S. 7 durch Division mit der wahren Bogenlänge ax hervor und ist daher gleich

$$\frac{2x + x\cos x - 3\sin x}{2x + x\cos x}.$$

Die folgende Tafel gibt diesen relativen Fehler, abgerundet auf vier Dezimalstellen, für verschiedene Winkel an. Bei der Berechnung sind die Winkel natürlich im Bogenmaß x auszudrücken. In der Tafel haben wir dagegen ihre Gradmaße angegeben:

10^0	0,0000	40^0	0,0014	70^0	0,0148
20^0	0,0001	50^0	0,0035	80^0	0,0265
30^0	0,0004	60^0	0,0076	90^0	0,0451

Bis zu Winkeln AMU von 60^0 also ist der Fehler kleiner als 1 %. Da man

[1] Über diese Aufgabe und die damit zusammenhängende Aufgabe der Quadratur des Kreises, d. h. der Darstellung der Kreisfläche durch ein gleich großes Quadrat, herrscht die irrige Meinung, daß die Mathematiker sie nicht lösen könnten. Man kann aber leicht jeden Kreisbogen und jeden Kreisausschnitt so genau berechnen, wie man nur will. Beispielsweise kann man die Zahl π mit jedem Grade der Genauigkeit ermitteln (vgl. das 7. Beispiel, S. 553 u. f.). Wer trotzdem davon spricht, daß die Quadratur des Kreises unlösbar sei, sollte wenigstens wissen, was damit gemeint ist, und nicht wie ein Blinder von der Farbe reden. Die Mathematiker des Altertums hatten sich bei dieser Aufgabe die erschwerende Beschränkung auferlegt, daß die Aufgabe nur mit Hilfe des Zirkels und Lineals gelöst werden sollte. Dies bedeutet rechnerisch, daß man den Kreisinhalt oder -umfang genau durch eine beschränkte Anzahl von Operationen finden soll, bei denen nur Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Divisionen sowie außerdem noch Quadratwurzeln vorkommen. Das können die Mathematiker allerdings nicht, aber man darf ihnen daraus gar keinen Vorwurf machen, denn — und das ist der springende Punkt in der Sache — man kann beweisen, daß diese Aufgabe unlösbar ist (etwa gerade so unlösbar, wie die sinnlose Aufgabe, $\sqrt{2}$ durch einen abgeschlossenen Dezimalbruch darzustellen). Dies wurde von Lindemann 1882 bewiesen. Noch eine Bemerkung: Verfahren zur angenäherten Rektifikation des ganzen Kreisumfanges haben wenig Nutzen, da man ja π genau genug berechnen kann. Viel nützlicher sind Verfahren zur angenäherten Rektifikation eines beliebigen Bogenstückes eines Kreises, und dazu gehört das auf der nächsten Seite.

den Winkel auch nach unten ansetzen kann, wie es Fig. 380 zeigt, ist das Verfahren für solche Kreisbogen, die ein Drittel des Kreisumfanges nicht übersteigen, mit einem Fehler von weniger als 1 % behaftet. Dieses sehr bequeme Verfahren steckt in einer Formel des in Cues an der Mosel geborenen Kardinals NICOLAUS VON CUSA (CUSANUS, 1401—1464). Man kann daraus ein Verfahren ableiten, um einen Bogen eines Kreises vom Radius r_1 auf einen Kreis von einem anderen Radius r_2 angenähert zu übertragen, siehe Fig. 381, worin $W_1 A = 3 r_1$ und $W_2 A = 3 r_2$ ist. Hierbei heben sich sogar die Fehler gegenseitig zum Teil wieder auf.

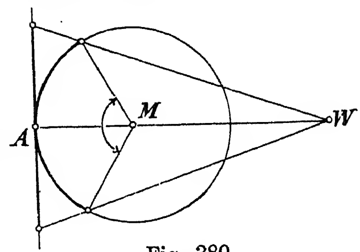


Fig. 380.

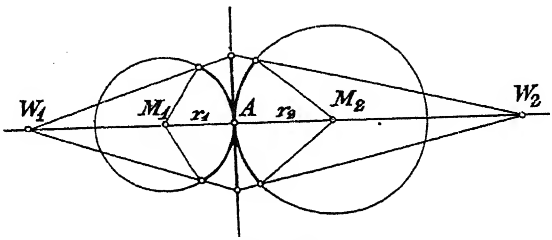


Fig. 381.

Ein Bruch $u(x):v(x)$ kann für einen gewissen Wert $x = a$ in der Form $\infty : \infty$ erscheinen. Diese Form ist auch unbestimmt. Denn man kann schreiben:

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{\frac{1}{v(x)}}{\frac{1}{u(x)}},$$

und hieraus erkennt man, daß der Bruch für $x = a$ die unbestimmte Form $0:0$ bekommt. Wir wenden daher auf die neue Gestalt des Bruches den Satz 17 an, so daß jetzt $1:v$ und $1:u$ die Stelle von u und v vertreten. Dann kommt mit Rücksicht auf Satz 10, S. 65:

$$\lim_{x=a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim \frac{-v' : v^2}{-u' : u^2} = \lim_{x=a} \frac{v'(x)}{u'(x)} \cdot \left(\lim_{x=a} \frac{u(x)}{v(x)}\right)^2$$

oder:

$$\lim_{x=a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x=a} \frac{u'(x)}{v'(x)}.$$

Mithin gilt dieselbe Regel wie in Satz 17. Da wir diesen Satz auf $1:u$ und $1:v$ angewandt haben, müssen wir das Ergebnis so aussprechen:

Satz 18: Streben zwei Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ für $x=a$ nach ∞ und sind $1:u(x)$ und $1:v(x)$ und ihre Differentialquotienten für $x=a$ stetig, so ist:

$$\lim_{x=a}\frac{u(x)}{v(x)}=\lim_{x=a}\frac{u'(x)}{v'(x)}.$$

3. Beispiel: Nach diesem Satz ist:

$$\lim_{x=\frac{1}{2}\pi}\frac{\operatorname{tg} x}{\ln\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)}=\lim_{x=\frac{1}{2}\pi}\frac{1:\cos^2 x}{1:\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)}.$$

Der letzte Bruch läßt sich bequemer schreiben. Dann kommt:

$$\lim_{x=\frac{1}{2}\pi}\frac{\operatorname{tg} x}{\ln\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)}=\lim_{x=\frac{1}{2}\pi}\frac{x-\frac{1}{2}\pi}{\cos^2 x}.$$

Jetzt erscheint für $x=\frac{1}{2}\pi$ die unbestimmte Form $0:0$, so daß wir den Satz 17 anzuwenden haben, der den Grenzwert $1:0$ oder ∞ liefert.

Soll insbesondere der Grenzwert einer gebrochenen Funktion

$$\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1 x+b_0}$$

für $\lim x=\pm\infty$ ermittelt werden, so ziehe man im Zähler x^n und im Nenner x^m heraus. Dann erscheinen alle Glieder außer den Anfangsgliedern im Zähler und Nenner mit Potenzen von $1:x$ behaftet, die für $\lim x=\infty$ nach Null streben. Daher kommt

$$\lim_{x=\infty}\frac{u(x)}{v(x)}=\lim_{x=\infty}\frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$$

Dieser Wert wird für $n>m$ unendlich groß, für $n=m$ gleich $a_n:b_m$ und für $n<m$ gleich Null, d. h.:

Satz 19: Bei der Bestimmung des Grenzwertes einer gebrochenen Funktion von x für $\lim x=+\infty$ und $\lim x=-\infty$ kommen nur die Glieder mit den höchsten Potenzen von x im Zähler und Nenner in Betracht.

Durch diesen Satz wird das auf S. 137 Gesagte vervollständigt.

Auch $0.\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0 und 1^∞ sind unbestimmte Formen. Denn wenn zunächst im Produkt $u(x).v(x)$ für $x=a$ der erste Faktor gleich Null und der zweite unendlich groß wird, treten in den folgenden Schreibweisen des Produktes:

$$u(x).v(x)=\frac{u(x)}{1:v(x)}=\frac{v(x)}{1:u(x)}$$

für $x=a$ die unbestimmten Formen $0:0$ und $\infty:\infty$ zutage, so daß man Satz 17 oder Satz 18 anwenden kann.

4. Beispiel:

$$\lim_{x=0}(x\ln x) = \lim_{x=0}\frac{\ln x}{1:x} = \lim_{x=0}\frac{1:x}{-1:x^2} = \lim_{x=0}(-x) = 0.$$

Wenn in der Differenz $u(x) - v(x)$ Minuend und Subtrahend für $x = a$ unendlich groß werden, liefert die Schreibweise

$$u(x) - v(x) = \frac{\frac{1}{v(x)} - \frac{1}{u(x)}}{\frac{1}{u(x)\,v(x)}}$$

wieder die unbestimmte Form $0:0$.

5. Beispiel:

$$\lim_{x=1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x=1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \lim_{x=1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x=1}\frac{x-1}{x\ln x + x - 1}.$$

Da hier wieder $0:0$ für $x = 1$ kommt, wenden wir Satz 17 abermals an. Dann ergibt sich der Wert $\frac{1}{2}$.

Was schließlich Exponentialfunktionen

$$y = u(x)^{v(x)}$$

angeht, so folgt aus

$$\ln y = v(x)\ln u(x)$$

sofort: Werden $u(x)$ und $v(x)$ für $x = a$ gleich Null, so hat $\ln y$ für $x = a$ die schon behandelte unbestimmte Form $0 \,.\, \infty$. Wird $u(x)$ für $x = a$ gleich ∞ und $v(x)$ gleich Null, so hat $\ln y$ für $x = a$ ebenfalls die unbestimmte Form $0 \,.\, \infty$. Wird $u(x)$ für $x = a$ gleich 1 und $v(x)$ gleich ∞, so hat $\ln y$ für $x = a$ die unbestimmte Form $\infty \,.\, 0$.

6. Beispiel: Der Grenzwert von $y = x^x$ für $x = 0$ soll gefunden werden. Da $\ln y = x\ln x$ ist, gibt das 4. Beispiel $\lim \ln y = 0$, also $\lim y = 1$. Dasselbe ging im zweiten Beispiel, S. 327 u. f., hervor.

7. Beispiel: Der Grenzwert von $y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ für $x = \frac{1}{2}\pi$ soll gefunden werden. Es kommt:

$$\lim_{x=\frac{1}{2}\pi}\ln y = \lim_{x=\frac{1}{2}\pi}(\operatorname{tg} x \ln\sin x) = \lim_{x=\frac{1}{2}\pi}\frac{\ln\sin x}{\operatorname{ctg} x}.$$

Der letzte Bruch hat für $x = \frac{1}{2}\pi$ die Form $0:0$; folglich gibt Satz 17:

$$\lim_{x=\frac{1}{2}\pi}\ln y = \lim_{x=\frac{1}{2}\pi}\frac{\operatorname{ctg} x}{-1:\sin^2 x} = \lim_{x=\frac{1}{2}\pi}(-\sin x\cos x) = 0.$$

Mithin hat y selbst den Grenzwert 1.

8. **Beispiel:** Der Grenzwert von $y = \sqrt[x-1]{x}$ oder $x^{\frac{1}{x-1}}$ für $x = 1$ soll berechnet werden:

$$\lim_{x=1} \ln y = \lim_{x=1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x=1} \frac{1:x}{1} = 1, \qquad \text{daher } \lim_{x=1} y = e.$$

Grenzwerte wie die soeben betrachteten kommen vor, wenn man untersuchen will, wie die Bildkurve einer Funktion $f(x)$ ins Unendliche läuft. In Fig. 382 sei P ein Punkt $(x; y)$ der Bildkurve c einer Funktion $f(x)$ und t seine Tangente. Ist $\mathfrak{P}$ irgendein Punkt auf der Tangente t und sind $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ seine Koordinaten, so ist $(\mathfrak{y} - y) : (\mathfrak{x} - x)$ die Steigung von t, daher:

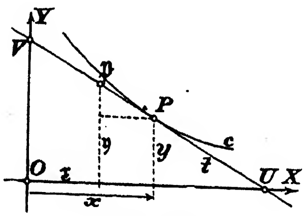


Fig. 382.

$$\frac{\mathfrak{y} - y}{\mathfrak{x} - x} = f'(x),$$

woraus die Gleichung der Tangente in den sogenannten laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ hervorgeht:

$$f'(x)\,\mathfrak{x} - \mathfrak{y} = x f'(x) - y.$$

Sie lautet nach Division mit der rechten Seite so:

$$\frac{f'(x)}{x f'(x) - y}\,\mathfrak{x} + \frac{1}{y - x f'(x)}\,\mathfrak{y} = 1.$$

Nach Satz 3, S. 175, ergibt sich also, da y gleich $f(x)$ ist, daß die Tangente t eines Punktes $(x; y)$ der Bildkurve einer Funktion $f(x)$ auf den Achsen die Strecken abschneidet:

(1) $$OU = \frac{x f'(x) - f(x)}{f'(x)}, \qquad OV = f(x) - x f'(x).$$

Dabei sind OU und OV positiv oder negativ, je nachdem die Schnittpunkte U und V auf den positiven oder negativen Achsen liegen.

Nun werde angenommen, die Funktion $f(x)$ sei auch für beliebig groß werdende x vorhanden; dann wird sich ihre Bildkurve ins Unendliche erstrecken. Die Frage nach dem Verhalten der Tangente t des Kurvenpunktes P oder $(x; y)$ für unendlich großes x wird nach (1) durch die Bestimmung der Werte

(2) $$\lim OU = \lim_{x=\infty} \frac{x f'(x) - f(x)}{f'(x)}, \qquad \lim OV = \lim_{x=\infty} [f(x) - x f'(x)]$$

beantwortet, da dies die Abschnitte sind, die von der Tangente des unendlich fernen Punktes auf den Achsen bestimmt werden. Dabei

können sich für $\lim x = +\infty$ sehr wohl andere Grenzwerte als für $\lim x = -\infty$ ergeben. Geht eine bestimmte Grenzlage der Tangente für $\lim x = +\infty$ oder für $\lim x = -\infty$ hervor, so heißt sie eine Asymptote, vgl. S. 193.

Die Bestimmung der Asymptote durch ihre Abschnitte auf den Achsen wird unbrauchbar, wenn sowohl OU als auch OV nach Null strebt. Dann geht die Asymptote durch den Anfangspunkt mit der Steigung $\lim f'(x)$ für $\lim x = \infty$.

Übrigens können auch gar keine bestimmten Grenzwerte hervorgehen. Dann wird die Asymptote unbestimmt. Ferner können $\lim OU$ und $\lim OV$ beide unendlich groß werden. Dann liegt die Asymptote unendlich fern. Dies tritt z. B. bei der Parabel $y = ax^2 + bx + c$ (vgl. S. 95) ein. Wenn im Endlichen verlaufende Asymptoten hervorgehen, geben sie einen guten Anhalt zum richtigen Zeichnen der Kurve, da die Kurvenäste danach streben, sich den Asymptoten mehr und mehr anzuschmiegen. In vielen früheren Fällen haben wir schon das Vorhandensein von Asymptoten erkannt. Wir fügen deshalb nur noch zwei Beispiele hinzu:

9. Beispiel: Ist $f(x) = x - 1 : (x^2 + 1)$, so gibt (2) mit Rücksicht auf Satz 19 sofort $\lim OU = 0$, $\lim OV = 0$ für $\lim x = \pm\infty$. Danach geht die Asymptote durch den Anfangspunkt. Da nach demselben Satz

$$\lim_{x=\infty} f'(x) = \lim_{x=\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 2x + 1}{x^4 + 2x^2 + 1} = 1$$

ist, hat die in Fig. 90, S. 137, gegebene Bildkurve die Gerade $y = x$ als Asymptote.

10. Beispiel: Wird $f(x) = 2 + \sqrt{x^2 - 1}$ angenommen, so kommt:

$$\lim OU = \lim_{x=\infty} \frac{1 - 2\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x=\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x=\infty} \frac{-2}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \mp 2,$$

je nachdem die Wurzel positiv oder negativ ist. Ferner:

$$\lim OV = \lim_{x=\infty} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) = 2.$$

Die Bildkurve, siehe Fig. 383, hat daher zwei Asymptoten, die auf der x-Achse die Strecken ± 2, dagegen auf der y-Achse dieselbe Strecke 2 abschneiden. Wählt man die Parallele zur x-Achse mit der Ordinate 2 als neue x-Achse, so wird die Kurve das Bild der Funktion $\sqrt{x^2 - 1}$, woraus erhellt, daß sie eine Hyperbel ist, vgl. (2), S. 191.

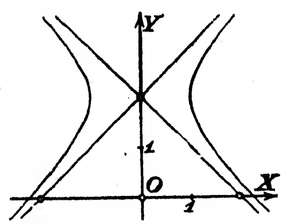


Fig. 383.

Hinsichtlich der Anwendung der Taylorschen Formel machen wir schließlich noch folgende Bemerkungen:

Bei strengen Untersuchungen wird man immer die Schranke des Fehlers, d. h. das mögliche Maximum des absoluten Betrages des Fehlers (des Restgliedes) abschätzen. Aber bei manchen Anwendungen weiß man nichts darüber, ob die zu berechnende Funktion $f(x)$ und ihre Differentialquotienten $f'(x)$, $f''(x)$, ... im Intervalle von $x = a$ bis $x = a + h$ wirklich überall bestimmte endliche Werte haben. Man macht dann aus der Not eine Tugend und benutzt die Taylorsche Formel als eine Näherungsformel, von der man hofft, daß sie gut genug sei. Man läßt also einfach das Restglied beiseite. So entstehen Näherungsformeln für $f(a + h)$, von denen man annimmt, daß sie für nicht zu große Werte von $|h|$ genügend genau seien. Bedeutet ε eine Größe, die so wenig von Null abweicht, daß ε^2 vernachlässigt werden darf, so wendet der Physiker und Techniker dementsprechend für $f(a + \varepsilon)$ die einfachste Taylorsche Formel

$$f(a) + f'(a)\,\varepsilon$$

an, was nach S. 543 bedeutet, daß man die Bildkurve von $f(x)$ in der Nähe von $x = a$ durch eine Gerade (die Tangente der Stelle) ersetzt. In den Beispielen des vorigen Paragraphen haben wir eine Reihe von derartigen Näherungsformeln angegeben. Für den Gebrauch sind sie im Anhang in der Tafel VI zusammengestellt. Dabei haben wir noch einige leicht zu berechnende hinzugefügt, z. B.:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \varepsilon) = \operatorname{tg}\alpha + \frac{\varepsilon}{\cos^2\alpha}, \tag{3}$$

da $\operatorname{tg}\alpha$ nach α differentiiert $1 : \cos^2\alpha$ gibt. Hier bedeutet ε das Bogenmaß eines kleinen Winkels.

11. Beispiel: Durch die Tangentenbussole ermittelt man die Stromstärke J mit Hilfe der Formel $J = c\operatorname{tg}\varphi$, wo c eine Konstante ist und φ die beobachtete Ablenkung der Magnetnadel bedeutet. Weil die Ablesung von φ stets mit einem Fehler ε behaftet ist, ergibt sich statt J ein Wert $c\operatorname{tg}(\varphi + \varepsilon)$ der nach (3) angenähert gleich $c\operatorname{tg}\varphi + c\,\varepsilon : \cos^2\varphi$ oder $J + c\,\varepsilon : \cos^2\varphi$ ist. Somit ist der Fehler $c\,\varepsilon : \cos^2\varphi$, d. h. nach S. 7 der relative Fehler $\varepsilon : \sin\varphi\cos\varphi$. Er hat nach Satz 17, S. 412, den Wert $2\,\varepsilon : \sin 2\varphi$. Wir wollen annehmen, daß φ ein spitzer Winkel sei. Soll der Fehler nicht mehr als 1% betragen, so muß $\varepsilon < 0{,}005 \sin 2\varphi$ sein. Da $\sin 2\varphi$ nie größer als Eins ist, wird dies erreicht, wenn der Beobachtungsfehler $\varepsilon < 0{,}005$, d. h. kleiner als 17 Minuten ist. Man ermittele, für welchen Winkel φ der relative Fehler $2\,\varepsilon : \sin 2\varphi$ am kleinsten wird.

12. Beispiel: Pendelt ein Körper mit kleinen Ausschlagwinkeln ε hin und her, so wird die Zeitdauer t einer Schwingung eine Funktion $f(\varepsilon)$ sein. Die einfachste Taylorsche Formel gibt angenähert:

$$t = f(0) + f'(0)\,\varepsilon,$$

d. h. wenn ε nach Null strebt, noch einfacher $\lim t = f(0)$. Dies aber ist eine Konstante. Tatsächlich fällt sie bei den Pendelschwingungen von Null ver-

schieden aus. Das Ergebnis bedeutet: Sehr kleine Pendelschwingungen sind isochron, d. h. beständig von derselben Dauer. Der von Galilei (vgl. S. 365) zuerst beobachtete Isochronismus der Pendelschwingungen bei kleinen Ausschlägen erscheint also als bloße Folge des Taylorschen Satzes. Dies gilt überhaupt für kleine Vibrationen von Körpern, z. B. für elastische Schwingungen: Sobald die Zeitdauer einer Schwingung, deren Ausschlagwinkel sehr klein wird, dabei nicht auch nach Null strebt (d. h. wenn $f(0) \neq 0$ ist), wird sie nach einem konstanten Wert $f(0)$ streben.

13. Beispiel: Mißt man eine geradlinige Strecke AB mittels eines zusammenlegbaren Gliedermaßstabes, so werden die Glieder des Stabes nicht genau die Gerade AB, sondern eine gebrochene Linie ausmachen, deren Glieder mit der Geraden AB sehr kleine Winkel $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ bilden. Nach Satz 11 S. 408, ist AB gleich der Summe der Projektionen aller Glieder auf die Gerade AB. Haben die Glieder die Länge l, so wird also AB gleich $l(\cos\varepsilon_1 + \cos\varepsilon_2 + \cdots)$. Da nun $\cos\varepsilon$ nach (11), S. 546, angenähert durch Eins zu ersetzen ist, folgt: Praktisch ist es ohne Belang, wenn ein zusammenlegbarer Maßstab beim Gebrauche nicht ganz genau in eine Gerade ausgestreckt wird.

Wenn auch ε^2 noch zu berücksichtigen ist, aber ε^3 nicht mehr, ersetzt man $f(a+\varepsilon)$ durch den Taylorschen Näherungswert:

$$f(a) + f'(a)\,\varepsilon + f''(a)\,\frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Daß er in ε quadratisch ist, bedeutet nach S. 543, daß die Bildkurve von $f(x)$ in der Umgebung der Stelle $x = a$ durch eine Parabel ersetzt wird. Dies ist der mathematische Grund dafür, daß man so häufig in den Anwendungen statt einer Kurve angenähert eine Parabel benutzt. Man kann nach Satz 12, S. 541, sagen, wenn man darin $a + h = x$ setzt:

Satz 20: Eine Kurve $y = f(x)$ darf in der Umgebung einer Stelle $x = a$ durch die Parabel

$$y = f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{1}{2} f''(a)(x-a)^2$$

ersetzt werden, falls der absolute Betrag von

$$\tfrac{1}{6} f'''(u)(x-a)^3$$

für alle Werte u von a bis x gegenüber den Ordinaten hinreichend klein bleibt.

Man kann die Taylorsche Formel auch zur angenäherten Berechnung von bestimmten Integralen benutzen. Wird nämlich der Satz 12, S. 541, auf die Funktion

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx \tag{4}$$

angewandt, die für $x = a$ verschwindet und deren erster Differentialquotient gleich $f(x)$ ist, so ergibt sich, wenn man noch n durch $n+1$ und $a+h$ durch x, also h durch $x-a$ ersetzt:

$$(5)\quad F(x) = f(a)\frac{x-a}{1!} + f'(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots + f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + \Re,$$

wobei man den Rest $\Re$ nach jenem Satz ausdrücken könnte. Wir ziehen es vor, ihn anders zu gewinnen: Die letzte Gleichung gibt differentiiert, da $F'(x)$ nach (4) gleich $f(x)$ ist:

$$(6)\quad f(x) = f(a) + f'(a)\frac{x-a}{1!} + \ldots + f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{d\Re}{dx}.$$

Nach Satz 12 ist aber auch

$$(7)\quad f(x) = f(a) + f'(a)\frac{x-a}{1!} + \ldots + f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + R,$$

wobei der Rest R die Form hat:

$$R = f^{(n)}(u)\frac{(x-a)^n}{n!},$$

indem u eine gewisse allerdings unbekannte Größe zwischen a und x bedeutet. Die Vergleichung von (6) und (7) ergibt:

$$(8)\quad \frac{d\Re}{dx} = R.$$

Wie gesagt, ist $F(x)$ gleich Null für $x = a$. Setzt man $x = a$, so werden also alle Glieder der Gleichung (5) außer dem letzten gleich Null. Mithin muß auch $\Re$ für $x = a$ verschwinden. Deshalb gibt die Integration von (8):

$$(9)\quad \Re = \int_a^x R\,dx.$$

Aus (4) und (5) folgt nun, wenn man die obere Integralgrenze gleich $a+h$ wählt:

$$(10)\quad \int_a^{a+h} f(x)\,dx = f(a)\frac{h}{1!} + f'(a)\frac{h^2}{2!} + \ldots + f^{(n-1)}(a)\frac{h^n}{n!} + \Re,$$

und dabei ist nach (9):

$$(11)\quad \Re = \int_a^{a+h} R\,dx.$$

Man bemerkt, daß sämtliche Glieder auf der rechten Seite von (10) aus denen auf der rechten Seite von (7) dadurch hervorgehen, daß

man jedes Glied von (7) von der unteren Grenze $x = a$ bis zur oberen Grenze $x = a + h$ integriert. Denn nach (11) gilt dies zunächst vom Restglied. Ferner lautet das über das $(k+1)^{\text{te}}$ Glied der Entwicklung (7) von $x = a$ bis $x = a + h$ erstreckte Integral so:

$$(12) \qquad \int_a^{a+h} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} \, dx.$$

Hierin bedeutet $f^{(k)}(a)$ eine Konstante. Der Integrand ist daher der Differentialquotient von

$$f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!},$$

und da diese Funktion für $x = a$ verschwindet, stellt sie das Integral (12) dar, sobald man x durch die obere Integralgrenze $a + h$ ersetzt. Demnach ist:

$$\int_a^{a+h} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} \, dx = f^{(k)}(a) \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Dies zeigt, daß in der Tat das allgemeine Glied von (7), integriert von a bis $a + h$, das allgemeine Glied von (10) liefert. Man sieht also: Die Entwicklung (10) wird Glied für Glied durch Integration der Entwicklung (7) gewonnen.

Nun wollen wir annehmen, daß der Rest R in (7) für $\lim n = \infty$ nach Null strebe. Nach (11) gilt dann dasselbe vom Rest $\mathfrak{R}$ von (10), d. h. dann geht nicht nur aus (7), sondern auch aus (10) eine konvergente unendliche Reihe hervor. Somit gilt der

Satz 21: Wenn eine Funktion $f(x)$ und alle ihre Differentialquotienten im Intervalle von $x = a$ bis $x = a + h$ bestimmte endliche Werte haben und für jedes x im Intervalle die unendliche Reihe

$$f(x) = f(a) + f'(a) \frac{x-a}{1!} + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots$$

gilt, geht hieraus der Wert des Integrals

$$\int_a^{a+h} f(x) dx$$

dadurch hervor, daß man die unendliche Reihe Glied für Glied von a bis $a + h$ integriert.

14. **Beispiel:** Nach Satz 6, S. 318, ist für jedes x:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

also, wenn man x durch $-x^2$ ersetzt:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots$$

Demnach geht durch Integration von 0 bis x hervor:

$$\int_0^x e^{-x^2}\,dx = \int_0^x dx - \int_0^x \frac{x^2}{1!}\,dx + \int_0^x \frac{x^4}{2!}\,dx - \int_0^x \frac{x^6}{3!}\,dx + \dots$$

oder, da die Integrale rechterhand leicht auszurechnen sind:

$$\int_0^x e^{-x^2}\,dx = \frac{x}{1} - \frac{1}{1!}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!}\,\frac{x^5}{5} - \frac{1}{3!}\,\frac{x^7}{7} + \dots,$$

und zwar gilt dies für jedes x. Dies Integral spielt eine wichtige Rolle in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Wird die Reihe nach dem Glied mit der $(2m-1)^{\text{ten}}$ Potenz von x abgebrochen, so ist der vernachlässigte Rest für positives x kleiner als:

$$\frac{1}{m!}\,\frac{x^{2m+1}}{2m+1} + \frac{1}{(m+1)!}\,\frac{x^{2m+3}}{2m+3} + \dots,$$

da hier überall das Pluszeichen gesetzt worden ist. Wenn man $m+2$, $m+3\dots$ in den Nennern durch die kleinere Zahl $m+1$ sowie $2m+3$, $2m+5\dots$ durch die kleinere Zahl $2m+1$ ersetzt, folgt, daß der Rest erst recht kleiner als

$$\frac{1}{m!}\,\frac{x^{2m+1}}{2m+1}\left[1 + \frac{x^2}{m+1} + \left(\frac{x^2}{m+1}\right)^2 + \dots\right]$$

ist. Wird m so groß gewählt, daß $x^2 < m+1$ ist, so kann man auf den Klammerinhalt den Satz 2, S. 274, anwenden, wenn man darin x durch $-x^2:(m+1)$ ersetzt. Danach ist der absolute Betrag des Restes kleiner als

$$\frac{1}{m!}\,\frac{x^{2m+1}}{2m+1}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{x^2}{m+1}}.$$

Will man das Integral für positive Werte von x kleiner als $\frac{1}{2}$ berechnen und nimmt man $m = 3$ an, so wird der positive Rest kleiner als 0,0002, so daß das Integral durch $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5$ ersetzt werden kann, wenn ein positiver Fehler kleiner als 0,0002 gestattet ist. Man braucht in der Wahrscheinlichkeitsrechnung insbesondere denjenigen Wert von x, für den das Integral gleich $\frac{1}{4}\sqrt{\pi}$ oder rund 0,443 wird. Diesen Wert kann man angenähert nach der Regula falsi (S. 118) berechnen, wobei man die Fehlerfunktion

$$y = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{10}x^5 - 0{,}443$$

benutzt. Zunächst ergibt sich das Wertepaar:

x	y
0,50	0,018
0,45	— 0,022,

woraus nach (10), S. 117, der bessere Näherungswert $x = 0{,}4775$ hervorgeht. Der genaue Wert ist, auf drei Dezimalstellen abgerundet, in der Tat gleich 0,477. — In Fig. 352, S. 490, ist die Bildkurve der Funktion e^{-x^2} dargestellt. Das soeben betrachtete Integral ist nach Satz 5, S. 229, die Fläche zwischen dieser Kurve, der x-Achse, der Ordinatenachse und der zu einem beliebigen x gehörigen Ordinate. Die Fläche muß sich also bis $x = 0{,}477$ erstrecken, wenn sie gleich $\frac{1}{4}\sqrt{\pi}$ sein soll. Dies wird später benutzt werden.

Elftes Kapitel.

Auswertung von Integralen.

§ 1. Allgemeine Integrationsverfahren.

Als Grundaufgabe der Integralrechnung ist nach S. 227 u. f. die Aufgabe zu bezeichnen, diejenige Funktion y von x zu finden, die für einen gegebenen Anfangswert a von x den Wert Null hat und deren Differentialquotient eine gegebene Funktion $f(x)$ ist. Die gesuchte Funktion wird durch das Integral ausgedrückt:

$$y = \int_a^x f(x)\,dx\,.$$

Um sie zu ermitteln, muß man zunächst irgend eine Funktion $F(x)$ ausfindig machen, deren Differentialquotient gleich $f(x)$ ist. Dann hat das Integral nach Satz 2, S. 213, die Form $F(x) +$ konst. Die Konstante muß, da das Integral für $x = a$ gleich Null sein soll, der Bedingung $F(a) +$ konst. $= 0$ genügen. Demnach ist sie gleich $-F(a)$, so daß sich ergibt:

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a)\,,$$

wofür wir die kürzere Schreibweise einführen:

$$\int_a^x f(x)\,dx = [F(x)]_a^x\,. \tag{1}$$

Wir wollen nämlich festsetzen, daß unter einer Funktion $F(x)$ in eckigen Klammern mit rechts unten und oben angesetzten Werten a und b allemal die Differenz

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

verstanden werden soll.

Da alle Funktionen, die $f(x)$ als Differentialquotienten haben, in der Form $F(x) + \text{konst.}$ darstellbar sind, und da die Konstante erst nach der Ermittelung von $F(x)$ näher bestimmt wird, sagt man, daß das sogenannte **unbestimmte** Integral $\int f(x)\,dx$ — ohne alle Grenzenbezeichnungen — überhaupt alle diejenigen Funktionen vorstellen soll, die $f(x)$ als Differentialquotienten haben. Bei der Berechnung eines unbestimmten Integrals muß man daher eigentlich zum Ergebnis eine beliebige Konstante als Summanden hinzufügen. Diese additive Konstante immer wirklich hinzuschreiben, ist lästig. Sie wird deshalb häufig fortgelassen und ist hinzuzudenken.

Die Formel (1) kann man nun auch so schreiben:

$$\int_a^x f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^x. \tag{2}$$

Die Aufgabe, ein unbestimmtes Integral $\int f(x)\,dx$ zu berechnen, ist die Umkehrung der Grundaufgabe der Differentialrechnung, nämlich des Differentiierens selbst. Man überlege sich nämlich, was die beiden Ausdrücke

$$\frac{d\int f(x)\,dx}{dx} \quad \text{und} \quad \int \frac{d\,f(x)}{dx}\,dx$$

bedeuten. Der erste Ausdruck ist der Differentialquotient eines unbestimmten Integrals; dies Integral selbst ist aber irgend eine Funktion, die $f(x)$ als Differentialquotienten hat; also ist der erste Ausdruck $f(x)$ selbst. Der zweite Ausdruck ist ein unbestimmtes Integral, dessen Integrand ein Differentialquotient ist. Dies unbestimmte Integral bedeutet irgendeine Funktion, deren Differentialquotient gleich dem Differentialquotienten von $f(x)$ ist, und hat daher nach Satz 2, S. 213, irgendeinen der Werte $f(x) + \text{konst.}$ Demnach ist:

$$\frac{d\int f(x)\,dx}{dx} = f(x), \quad \int \frac{d\,f(x)}{dx}\,dx = f(x) + \text{konst.} \tag{3}$$

Das Integrieren und das Differentiieren sind also Operationen, die sich gegenseitig aufheben, sobald sie nacheinander ausgeübt werden, wobei jedoch hinzuzufügen ist, daß beim Integrieren noch eine additive Konstante hinzutritt. Die erste Formel (3) sagt außerdem aus: Um die Probe zu machen, ob der berechnete Wert eines unbestimmten Integrals wirklich richtig ist, differentiiere man das Ergebnis. Geht dadurch wieder $f(x)$ hervor, so stimmt die Berechnung.

1. Beispiel: Man beweise auf diese Art, daß

$$\int \frac{2}{x^2-1}\, d\,x = \ln \frac{x-1}{x+1} + \text{konst.}$$

ist.

Die zweite Formel (3) lehrt, daß **sich aus jeder Differentiationsformel sofort eine Integralformel ableiten läßt.**

2. Beispiel: Wird in der zweiten Formel (3) für $f(x)$ die Funktion $x^{n+1}:(n+1)$ gesetzt, wo n konstant sei, so kommt:

$$\int x^n\, d\,x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \text{konst.}$$

Hier muß n von -1 verschieden angenommen werden. Wird $f(x) = \ln x$ gesetzt, so ergibt sich die für $n = -1$ geltende Formel:

$$\int \frac{1}{x}\, d\,x = \ln x + \text{konst.} \quad \text{oder} \quad = \ln(-x) + \text{konst.},$$

je nachdem die Veränderliche x ein positives oder negatives Intervall durchläuft. Die erste Formel zeigt, daß das Integrieren einer Potenz, deren Exponent nicht gleich -1 ist, darin besteht, daß man den Exponenten um Eins vergrößert und die Potenz noch mit diesem vergrößerten Exponenten dividiert. Dies ist die Umkehrung der Regel für die Differentiation einer Potenz, der 5. Regel auf S. 85. Für $n = -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ kommt insbesondere:

$$\int \frac{d\,x}{x^2} = -\frac{1}{x}, \qquad \int \sqrt{x}\, d\,x = \tfrac{2}{3}\, x \sqrt{x}, \qquad \int \frac{d\,x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x},$$

wo überall eine beliebige Konstante addiert werden kann.

3. Beispiel: Wird in der zweiten Formel (3) für $f(x)$ eine der Funktionen e^x, $\sin x$, $-\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $-\operatorname{ctg} x$, $\arcsin x$ oder $\operatorname{arc\,tg} x$ gesetzt, so gibt sie die Integrale:

$$\int e^x\, d\,x = e^x,$$

$$\int \cos x\, d\,x = \sin x, \qquad \int \sin x\, d\,x = -\cos x,$$

$$\int \frac{d\,x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x, \qquad \int \frac{d\,x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x,$$

$$\int \frac{d\,x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x, \qquad \int \frac{d\,x}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x,$$

wo überall eine beliebige Konstante addiert werden darf.

Für die Differentiation sind auf S. 84, 85 mehrere Regeln aufgestellt worden. Sie liefern durch Umkehrung Regeln für das Integrieren.

Wir betrachten zunächst das Integral einer Summe:

$$\int [u(x) + v(x)]\, d\,x,$$

also eine Funktion mit dem Differentialquotienten $u + v$. Da

$$\int u(x)\,dx, \qquad \int v(x)\,dx$$

Funktionen mit den Differentialquotienten $u(x)$ und $v(x)$ sind, hat ihre Summe nach der Summenregel den Differentialquotienten $u(x) + v(x)$, also denselben wie das erste Integral. Daher ist:

$$\int [u(x) + v(x)]\,dx = \int u(x)\,dx + \int v(x)\,dx + \text{konst.} \tag{4}$$

Satz 1: Das Integral einer Summe ist gleich der Summe der Integrale der Summanden.

Nach (2) gilt dieser Satz auch für bestimmte Integrale:

$$\int_a^x [u(x) + v(x)]\,dx = \int_a^x u(x)\,dx + \int_a^x v(x)\,dx,$$

wenn man nur, was ja selbstverständlich ist, überall dieselben Grenzen setzt. Offenbar gilt auch der entsprechende Satz für die Integrale von Differenzen. Er wurde schon gelegentlich für bestimmte Integrale als Satz 6 auf S. 237 bemerkt.

4. Beispiel:

$$\int (1 + x + x^2 + x^3)\,dx = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \text{konst.}$$

5. Beispiel: Zuweilen kann man den Integranden, obwohl er nicht von vornherein als Summe gegeben ist, in eine Summe von Funktionen zerlegen, die sich einzeln integrieren lassen. So ist, wenn a und b konstant sind:

$$\frac{a-b}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}.$$

Daraus folgt:

$$\int \frac{a-b}{(x-a)(x-b)}\,dx = \int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x-b}.$$

Nun ist $1:(x-a)$ der Differentialquotient von $\ln(x-a)$ und $1:(x-b)$ der von $\ln(x-b)$, also:

$$\int \frac{a-b}{(x-a)(x-b)}\,dx = \ln(x-a) - \ln(x-b) + \text{konst.} = \ln\frac{x-a}{x-b} + \text{konst.}$$

Wir betrachten jetzt ein Integral $\int k f(x)\,dx$, worin k ein konstanter Faktor sei. Es ist eine Funktion mit dem Differentialquotienten $k f(x)$. Andererseits ist $\int f(x)dx$ eine Funktion mit dem Differentialquotienten $f(x)$. Nach der Faktorregel ist also $k\int f(x)\,dx$ eine Funktion mit dem vorgeschriebenen Differentialquotienten $k f(x)$.

Somit folgt:

$$\int k f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx + \text{konst.} \tag{5}$$

Satz 2: Ein **konstanter Faktor** des Integranden darf vor das Integralzeichen gesetzt werden. Umgekehrt: Ein vor dem Integralzeichen stehender **konstanter Faktor** darf zum Faktor des Integranden gemacht werden.

Offenbar gilt dies auch für bestimmte Integrale. Das leuchtet übrigens auch deshalb ein, weil das Integral nach Satz 4, S. 228, eine Summe bedeutet. Denn bei einer Summe kann ein konstanter Faktor aller Glieder herausgezogen werden.

6. Beispiel: Nach Satz 1 ist:

$$\int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n)\,dx =$$
$$= \int a_0\,dx + \int a_1 x\,dx + \int a_2 x^2\,dx + \ldots + \int a_n x^n\,dx,$$

also nach Satz 2:

$$\int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n)\,dx =$$
$$= a_0\int dx + a_1\int x\,dx + a_2\int x^2\,dx + \ldots + a_n\int x^n\,dx.$$

Nach dem 2. Beispiel ist somit das Integral einer ganzen Funktion n^{ten} Grades:

$$\int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n)\,dx =$$
$$= \text{konst.} + a_0\frac{x}{1} + a_1\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3} + \ldots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

eine ganze Funktion $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades.

7. Beispiel: Nach Satz 2 läßt sich die Schlußformel im 5. Beispiel anders schreiben, indem man den konstanten Faktor $a - b$ aus dem Integral herauszieht und dann mit $a - b$ dividiert:

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\ln\frac{x-a}{x-b} + \text{konst.}$$

Die Produktregel läßt nach dem 9. Beispiel, S. 452, am kürzesten so ausdrücken:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Hieraus folgt:

$$\int (uv)'\,dx = \int (u'v + uv')\,dx.$$

Nach Satz 1 ist daher:

$$\int (u\,v)'\,d\,x = \int u'\,v\,d\,x + \int u\,v'\,d\,x\,,$$

woraus folgt:

$$\int u'\,v\,d\,x = \int (u\,v)'\,d\,x - \int u\,v'\,d\,x\,.$$

Nun ist $\int (u\,v)'\,d\,x$ eine Funktion mit dem Differentialquotienten $(u\,v)'$, d. h. mit dem von $u\,v$, demnach der Wert dieses Integrals gleich $u\,v +$ konst., so daß wir erhalten:

$$\int u'\,v\,d\,x = u\,v + \text{konst.} - \int u\,v'\,d\,x\,.$$

Da das letzte Integral rechts auch noch eine beliebige additive Konstante hat, können wir das zweite Glied rechts fortlassen. Also kommt:

(6) $$\int u'\,v\,d\,x = u\,v - \int u\,v'\,d\,x\,.$$

Diese Formel liefert den

Satz 3: Ist der Integrand ein Produkt aus dem Differentialquotienten einer bekannten Funktion $u(x)$ und aus einer anderen Funktion $v(x)$, so ist das Integral gleich dem Produkt beider Funktionen $u(x)$ und $v(x)$, vermindert um dasjenige Integral, dessen Integrand gleich dem Produkt der Funktion $u(x)$ mit dem Differentialquotienten der Funktion $v(x)$ ist.

Übersichtlicher als dieser schwerfällige Satz ist die Formel (6). Sie dient dazu, ein schwieriges Integral auf ein anderes Integral zurückzuführen, das unter Umständen leichter auszuwerten ist. Dies wird am besten an Beispielen klar.

8. Beispiel: Um $\int \ln x\,d\,x$ zu berechnen, stellen wir uns den Integranden $\ln x$ als ein Produkt $u'v$ vor. Wir können den Integranden als das Produkt $1 . \ln x$ schreiben, so daß es nahe liegt, $u' = 1$ und $v = \ln x$ zu wählen, d. h. unter u eine Funktion zu verstehen, deren Differentialquotient gleich Eins ist. Eine derartige Funktion ist x. Wir setzen demnach $u = x$, $v = \ln x$, also $v' = 1 : x$, so daß die Formel (6) gibt:

$$\int 1 . \ln x . d\,x = x . \ln x - \int x . \frac{1}{x} . d\,x = x \ln x - \int d\,x = x \ln x - x + \text{konst.}$$

9. Beispiel: Um $\int x \sin x\,d\,x$ zu berechnen, stellt man sich den Integranden $x \sin x$ als ein Produkt $u'v$ vor. Am nächsten liegt es, entweder $u' = x$, $v = \sin x$ oder $u' = \sin x$, $v = x$ zu wählen. Versuchen wir es zuerst mit der Annahme $u' = x$, $v = \sin x$. Dann muß u eine Funktion sein, die

differentiiert x gibt, z. B. $\frac{1}{2}x^2$. Wenn wir also $u = \frac{1}{2}x^2$, $v = \sin x$ und daher $v' = \cos x$ setzen, gibt (6):

$$\int x \sin x\, d\,x = \tfrac{1}{2}x^2 \sin x - \int \tfrac{1}{2}x^2 \cos x\, d\,x\,.$$

Das letzte Integral sieht aber schwieriger als das ursprünglich vorgelegte aus. Deshalb versuchen wir es jetzt mit der Annahme $u' = \sin x$, $v = x$, so daß u eine Funktion bedeutet, deren Differentialquotient gleich $\sin x$ ist. Eine derartige Funktion ist $-\cos x$. Mithin setzen wir $u = -\cos x$, $v = x$, d. h. $v' = 1$ in (6) ein und erhalten:

$$\int \sin x\,.\,x\,.\,d\,x = -\cos x\,.\,x - \int (-\cos x)\,.\,1\,.\,d\,x\,.$$

oder nach Satz 2

$$\int x \sin x\, d\,x = -x\cos x + \int \cos x\, d\,x\,.$$

Das letzte Integral ist nach dem 3. Beispiel gleich $\sin x +$ konst. Folglich haben wir gefunden:

$$\int x \sin x\, d\,x = -x\cos x + \sin x + \text{konst.}$$

Wir raten dem Leser dringend, ganz entsprechend zu berechnen:

$$\int x \cos x\, d\,x = x \sin x + \cos x + \text{konst.}$$

Aus diesen beiden Beispielen wird man das Wesen der in der Formel (6) oder dem Satz 3 ausgedrückten Integrationsregel erkennen: Das Integral, das berechnet werden soll, sucht man zunächst so zu schreiben, daß der Integrand $f(x)$ die Form eines Produktes $u'v$ annimmt, dessen erster Faktor u' der Differentialquotient einer leicht zu ermittelnden Funktion u ist. Dies geht zwar auf unendlich viele Arten, denn es ist z. B.

$$f(x) = \cos x \cdot \frac{f(x)}{\cos x}, \qquad f(x) = e^x \cdot \frac{f(x)}{e^x}, \qquad f(x) = \frac{1}{x} \cdot x\, f(x) \text{ usw.},$$

wo der erste Faktor $\cos x$, e^x, $1 : x$ jedesmal der Differentialquotient einer bekannten Funktion, nämlich von $\sin x$, e^x, $\ln x$ ist. Aber der zweite Faktor v wird dann im allgemeinen zu umständlich, daher auch sein Differentialquotient v'. Nun lehrt aber (6), daß das vorgelegte Integral auf das Integral $\int u\, v'\, d\, x$ zurückgeführt wird, worin v' auftritt. Man wird also die Zerlegung so auszuführen haben, daß $u\,v'$ eine möglichst einfache Form annimmt. Wie man dies zu tun hat, dafür lassen sich keine allgemeinen Regeln angeben; es muß in jedem Fall ausgeprobt werden.

Die Formel (6) zerlegt das Integral $\int u'\, v\, d\, x$ in zwei Glieder, von denen das erste, nämlich $u\,v$, ohne Integralzeichen ist, so daß

sie die Aufgabe der Berechnung von $\int u'\, v\, d\, x$ nur zum Teil erledigt; es bleibt übrig, noch $\int u\, v'\, d\, x$ auszuwerten. Man nennt das Verfahren deshalb die Teil-Integration. Daß bei ihrer Anwendung einiges zu beachten ist, zeigen die folgenden Beispiele. Aus ihnen sieht man, daß die Teil-Integration auch dann noch zum Ziel führen kann, wenn man schon geneigt ist, sie als aussichtslos aufzugeben.

10. Beispiel: Das Unbequeme in dem Integral

$$\int \frac{\ln x}{x} d\, x$$

ist die Funktion $\ln x$. Sie wird im Integral rechts in (6) nicht vorkommen, wenn wir $v = \ln x$ wählen, da ja dort nur v' auftritt und für $v = \ln x$ sehr einfach $v' = 1 : x$ ist. Dies zieht aber die Annahme $u = \ln x$ nach sich. Der Logarithmus kommt also doch wieder zum Vorschein, indem sich nach (6) ergibt:

$$\int \frac{\ln x}{x} d\, x = (\ln x)^2 - \int \frac{\ln x}{x} d\, x,$$

also das alte Integral auch rechts steht; es kann noch eine additive willkürliche Konstante haben. Bringen wir das Integral auf die linke Seite und dividieren wir nachher mit 2, so folgt:

$$\int \frac{\ln x}{x} d\, x = \tfrac{1}{2} (\ln x)^2 + \text{konst.} \tag{7}$$

11. Beispiel: Um

$$\int e^x \sin c\, x\, d\, x$$

zu berechnen, worin c eine Konstante bedeute, setzen wir $u' = e^x$, $v = \sin c\, x$. Als u wählen wir daher e^x. Nach (6) kommt mithin:

$$\int e^x \sin c\, x\, d\, x = e^x \sin c\, x - \int e^x\, c \cos c\, x\, d\, x$$

oder nach Satz 2:

$$\int e^x \sin c\, x\, d\, x = e^x \sin c\, x - c \int e^x \cos c\, x\, d\, x. \tag{8}$$

Das neue Integral rechts behandeln wir in derselben Art, indem wir $u = e^x$, $v = \cos c\, x$ setzen, wodurch sich ergibt:

$$\int e^x \cos c\, x\, d\, x = e^x \cos c\, x + c \int e^x \sin c\, x\, d\, x + \text{konst.} \tag{9}$$

Hier tritt rechts wieder das ursprünglich vorgelegte Integral auf. Setzen wir diesen Wert (9) für das Integral rechts in (8) ein, so kommt:

$$\int e^x \sin c\, x\, d\, x = e^x (\sin c\, x - c \cos c\, x) - c^2 \int e^x \sin c\, x\, d\, x + \text{konst.}$$

oder

$$(1 + c^2) \int e^x \sin c\, x\, d\, x = e^x (\sin c\, x - c \cos c\, x) + \text{konst.}$$

Also ist:

$$\int e^x \sin c x\, d x = \frac{e^x (\sin c x - c \cos c x)}{1 + c^2} + \text{konst.} \tag{10}$$

Setzen wir diesen Wert in (9) ein, so ergibt sich noch:

$$\int e^x \cos c x\, d x = \frac{e^x (\cos c x + c \sin c x)}{1 + c^2} + \text{konst.} \tag{11}$$

Die Bruchregel liefert kein besonderes Integrationsverfahren, wohl aber die Kettenregel, S. 127. Sie gibt die sogenannte Integration durch Substitution, d. h. durch Einführung einer Hilfsveränderlichen. Man faßt nämlich die unter dem Integralzeichen

$$\int f(x)\, d x \tag{12}$$

vorkommende Veränderliche x als eine Funktion einer anderen Veränderlichen z auf:

$$x = F(z). \tag{13}$$

Dann ist $f(x)$ eine Funktion von z, nämlich $f(F(z))$, die dadurch entsteht, daß in $f(x)$ überall statt x der Ausdruck $F(z)$ eingesetzt wird. Ferner ist der Zuwachs $d x$ von x durch den von z ausdrückbar. Denn nach (13) haben wir, wenn $F(z)$ differentiierbar ist:

$$\frac{d x}{d z} = F'(z), \tag{14}$$

woraus sich ergibt:

$$d x = F'(z)\, d z. \tag{15}$$

Wenn wir nun alles, was unter dem Integralzeichen steht, durch z ausdrücken, kommt:

$$\int f(x)\, d x = \int f(F(z))\, F'(z)\, d z. \tag{16}$$

Hiermit ist das Integral auf eine neue Form gebracht, in der es zwar umständlicher aussieht, weil wir uns allgemeiner Zeichen bedient haben, jedoch einfacher sein kann. Man muß nämlich die Funktion $F(z)$ in einer für die gerade vorliegende Aufgabe besonders geeigneten Weise wählen. Dafür lassen sich freilich keine allgemeinen Regeln aufstellen. Hat man das in z dargestellte Integral ausgewertet, so entfernt man schließlich die Hilfsveränderliche z wieder, indem man aus der angenommenen Gleichung (13) umgekehrt z als Funktion von x berechnet und dann diesen Wert für z einsetzt.

12. Beispiel: Im Integral

$$\int \text{arc sin}\, x\, d x$$

ist die Funktion $\arcsin x$ unbequem; man setzt deshalb:

$$\arcsin x = z, \quad \text{d. h.} \quad x = \sin z.$$

Dann ist

$$\frac{dx}{dz} = \cos z, \quad \text{d. h.} \quad dx = \cos z\, dz,$$

so daß kommt:

$$\int \arcsin x\, dx = \int z \cos z\, dz.$$

Der Wert des neuen Integrals ist im 9. Beispiel angegeben, allerdings geschrieben in x statt z. Danach geht hervor

$$\int \arcsin x\, dx = z \sin z + \cos z + \text{konst.}$$

Nun setzt man wieder $z = \arcsin x$, d. h. $\sin z = x$ und $\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z} = \sqrt{1 - x^2}$ ein, so daß sich ergibt:

$$\int \arcsin x\, dx = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + \text{konst.}$$

13. **Beispiel:** Soll

$$\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\, dx$$

berechnet werden, so wird man die im Zähler auftretende Funktion durch Einführung einer neuen Veränderlichen z zu vereinfachen suchen, indem man

$$\operatorname{tg} x = z, \quad \text{d. h.} \quad x = \operatorname{arc\,tg} z$$

setzt. Dann ist

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{1+z^2}, \quad \text{d. h.} \quad dx = \frac{dz}{1+z^2}.$$

Da ferner $\cos^2 x = 1 : (1 + \operatorname{tg}^2 x)$ nach (5), S. 378, ist, wird $\cos^2 x = 1 : (1 + z^2)$, so daß sich ergibt:

$$\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\, dx = \int e^z (1 + z^2) \frac{dz}{1+z^2} = \int e^z\, dz = e^z + \text{konst.}$$

Wird wieder $z = \operatorname{tg} x$ eingesetzt, so kommt schließlich:

$$\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\, dx = e^{\operatorname{tg} x} + \text{konst.}$$

Die Integration durch Substitution haben wir übrigens schon gelegentlich benutzt, so im 4. Beispiel, S. 248. Wie es dort geschah, ist allgemein auf einen wichtigen Umstand hinzuweisen, der bei der Anwendung der Substitution auf bestimmte Integrale zu beachten ist: Das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

ist eine Summe, bei der x alle Werte von a bis b durchläuft. Wenn wir nun vermöge (13) für x eine Funktion $F(z)$ einer neuen Veränderlichen z setzen, müssen wir z die zugehörigen Werte durchlaufen lassen, d. h. bei dem in z ausgedrückten Integral sind als Grenzen statt a und b diejenigen Werte zu setzen, die z für $x = a$ und $x = b$ annimmt. Dies ist ja ganz selbstverständlich, wird aber selbst von geübten Rechnern in der Hitze des Gefechts leicht übersehen, weshalb eine Warnung vor falschen Grenzen durchaus am Platz ist.

14. Beispiel: Zur Auswertung des bestimmten Integrals

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}\, d\,x$$

setzt man natürlich $\ln x = z$, also:

$$x = e^z, \quad \frac{d\,x}{d\,z} = e^z, \quad d\,x = e^z\, d\,z.$$

Da die neue Veränderliche $z = \ln x$ für $x = 1$ und $x = e$ die Werte $\ln 1$ und $\ln e$ oder 0 und 1 hat, kommt:

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}\, d\,x = \int_0^1 \frac{z^2}{e^z}\cdot e^z\, d\,z = \int_0^1 z^2\, d\,z = \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Noch ein wichtiger Umstand ist bei der Substitution zu beachten: Man darf nur solche Substitutionen $x = F(z)$ machen, bei denen z einwertig und stetig ist, wenn x das durch die Integralgrenzen vorgeschriebene Intervall von $x = a$ bis $x = b$ durchläuft. Wenn man also z. B. $x = z^2$, d. h. $z = \sqrt{x}$, setzt, muß man sich entscheiden, ob man die Wurzel positiv oder negativ wählen will. Wenn ferner die Integralgrenzen z. B. $x = -1$ und $x = +1$ sind, darf man nicht $x = e^z$ setzen, da e^z ja nur positive Werte hat. In demselben Fall darf man auch nicht $x = \operatorname{arc\,ctg} z$ setzen, da dann $z = \operatorname{ctg} x$ wäre und z einmal im Intervalle von $x = -1$ bis $x = +1$, nämlich für $x = 0$, unendlich groß wird.

Da man bei der Anwendung einer Substitution $x = F(z)$ immer wie in (15) das Differential $d\,x$ berechnen muß, tut man gut, sich anzugewöhnen,

$$\text{statt } \frac{d\,x}{d\,z} = F'(z) \quad \text{sofort} \quad d\,x = F'(z)\, d\,z$$

zu schreiben.

Eine wichtige Anwendung des Substitutionsverfahrens betrifft den Fall, wo die Funktion $f(z)$ unter dem Integralzeichen als ein Bruch

vorliegt, dessen Zähler gleich dem Differentialquotienten des Nenners ist:

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\, d x.$$

Setzt man nämlich $u(x) = z$, so wird $d z = u'(x)\, d x$, so daß kommt:

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\, d x = \int \frac{d z}{z} = \ln z + \text{konst.} = \ln u(x) + \text{konst.}$$

Satz 4: Ist der Integrand ein Bruch, dessen Zähler gleich dem Differentialquotienten des Nenners ist, so ist das Integral gleich dem natürlichen Logarithmus des Nenners, vermehrt um eine Konstante; in Formel:

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\, d x = \ln u(x) + \text{konst.}$$

Dies Verfahren der logarithmischen Integration ist das Gegenstück der logarithmischen Differentiation, S. 309.

15. Beispiel:

$$\int \frac{2 a x + b}{a x^2 + b x + c}\, d x = \ln (a x^2 + b x + c) + \text{konst.}$$

16. Beispiel:

$$\int \frac{d x}{x \ln x} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\, d x = \ln \ln x + \text{konst.}$$

17. Beispiel: Auch in

$$\int \frac{d x}{\sin x \cos x}$$

kann man den Integranden auf die Form $u'(x) : u(x)$ bringen, denn es ist

$$\frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{\cos x}{\sin x \cos^2 x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x \cos^2 x} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x},$$

also $u(x) = \operatorname{tg} x$ und $u'(x) = 1 : \cos^2 x$. Daher kommt:

$$\int \frac{d x}{\sin x \cos x} = \ln \operatorname{tg} x + \text{konst.}$$

Durch Substitution lassen sich hieraus andere wichtige Integrale ableiten. Denn nach Satz 17, S. 412, ist $2 \sin x \cos x = \sin 2 x$. Setzt man also $2 x = z$, d. h. $2 d x = d z$, so kommt:

$$\int \frac{d z}{\sin z} = \ln \operatorname{tg} \frac{z}{2} + \text{konst.}$$

Da ferner $\sin z = \cos(z - \frac{1}{2}\pi)$ ist, gibt die Einführung der neuen Veränderlichen $t = z - \frac{1}{2}\pi$, da dann $dz = dt$ wird:

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \text{konst.}$$

§ 2. Übersicht und Anwendungen.

Die Ergebnisse des vorigen Paragraphen stellen wir noch einmal übersichtlich zusammen:

1. Regel: Differentiation und Integration heben sich gegenseitig auf; bei der unbestimmten Integration tritt jedoch eine additive Konstante hinzu:

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + \text{konst.}$$

2. Regel: Eine Summe wird Glied für Glied integriert:

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx.$$

Bei bestimmten Integralen treten dabei überall dieselben Grenzen auf.

3. Regel: Konstante Faktoren des Integranden können vor das Integralzeichen gesetzt werden:

$$\int k f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx \quad (k = \text{konst.}),$$

woraus auch folgt: Soll ein Integral mit einer Konstante multipliziert werden, so darf statt dessen der Integrand damit multipliziert werden.

4. Regel oder Regel der Teil-Integration, die wir nicht in Worten, sondern nur in der Formel ausdrücken:

$$\int u' v\,dx = uv - \int uv'\,dx.$$

Sie aus dem Gedächtnis hinzuschreiben, ist leicht, wenn man die Produktregel $(uv)' = u'v + uv'$ umstellt: $u'v = (uv)' - uv'$ und dann die Regeln 1 und 2 anwendet.

5. Regel oder Regel der Substitution, wonach eine der Aufgabe anzupassende Funktion der Veränderlichen x als neue Veränderliche z benutzt wird. Dabei ist zu beachten, daß auch dx durch z und dz ausgedrückt werden muß und daß bei bestimmten Integralen die auf x bezüglichen Grenzen durch die auf die neue Veränderliche z bezüglichen zugehörigen Werte zu ersetzen sind.

6. Regel oder Regel der logarithmischen Integration: Ist der Integrand ein Bruch, dessen Zähler der Differential-

quotient des Nenners ist, so ist das Integral, abgesehen von einer additiven Konstanten, gleich dem natürlichen Logarithmus des Nenners:

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln u(x) + \text{konst.}$$

Zu diesen Regeln tritt noch eine hinzu; sie sagt aus, wie man ein bestimmtes Integral auswertet:

7. Regel: Das bestimmte Integral von $f(x)$, erstreckt von $x = a$ bis $x = b$, wird berechnet, indem man zunächst das unbestimmte Integral $\int f(x)\,dx$ auswertet; ist dies gleich $F(x) +$ konst., so wird:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b,$$

wo die rechte Seite die Differenz der Werte bedeuten soll, die $F(x)$ für die Grenzen b und a annimmt.

Man darf nicht glauben, daß sich jedes Integral, dessen Integrand $f(x)$ aus den uns bekannten Funktionen (Potenzen, Logarithmen, Exponential-, goniometrischen und zyklometrischen Funktionen) zusammengesetzt ist, durch diese Funktionen ausdrücken lasse. Das Integrieren ist überhaupt schwieriger als das Differentiieren. Das Differentiieren läßt sich als ein Handwerk bezeichnen, das Integrieren demgegenüber als eine Kunst, bei der das Probieren oft über das Studieren geht. Man muß sich Gewandtheit im Integrieren durch Übung an Beispielen erwerben.

Will man eine Fläche berechnen (vgl. §§ 2 u. 3 des 5. Kap.), so wird man bekanntlich zu einem Integral geführt. Wir wollen jetzt annehmen, die zu berechnende Fläche F sei durch eine Kurve begrenzt, die in Polarkoordinaten (vgl. S. 344) die Gleichung

(1) $$r = f(\varphi)$$

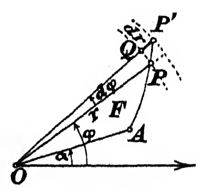


Fig. 384.

habe. Sie beginne bei dem zur Amplitude α gehörigen Radiusvektor OA in Fig. 384 und erstrecke sich bis zu dem zu einer veränderlichen Amplitude φ gehörigen Radiusvektor OP. Dann ist die Fläche F oder OAP eine Funktion von φ. Wächst φ um $d\varphi$, so nimmt r um $dr = QP'$ und F um ein Stück dF oder OPP' zu, das zwischen den Flächen zweier Kreisausschnitte mit dem Zentriwinkel $d\varphi$ und den Radien r und $r + dr$ liegt, also zwischen $\frac{1}{2}r^2\,d\varphi$ und $\frac{1}{2}(r + dr)^2\,d\varphi$, so daß $dF : d\varphi$ zwischen

$\frac{1}{2} r^2$ und $\frac{1}{2}(r + dr)^2$ liegt. Da dr nach Null strebt, folgt:

(2) $$\frac{dF}{d\varphi} = \frac{1}{2} r^2, \quad \text{d. h.} \quad F = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\varphi} r^2 \, d\varphi,$$

wo r die durch (1) gegebene Funktion von φ ist. Die Fläche wird positiv gerechnet, wenn die Amplitude von α bis zum Endwerte φ zunimmt. Die Formel $dF = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$ besagt, daß die unendlich kleine Fläche OPP' durch den Kreisausschnitt OPQ ersetzt werden darf, ähnlich wie auf S. 227 u. f. durch ein Rechteck. Die Kurve wird also durch eine Treppe ersetzt, deren Stufen aus unendlich kurzen Kreisbogen und unendlich kurzen Stücken der Radienvektoren gebildet werden. Die Amplitude φ ist im Bogenmaß auszudrücken.

1. Beispiel: Bei der logarithmischen Spirale $r = ae^{c\varphi}$, vgl. S. 350 u. f., ist nach (2):

$$F = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\varphi} a^2 e^{2c\varphi} \, d\varphi = \frac{a^2}{2}\int\limits_{\alpha}^{\varphi} e^{2c\varphi} \, d\varphi .$$

Macht man die Substitution $2c\varphi = z$, wobei $d\varphi = dz : 2c$ ist und die Grenzen durch $2c\alpha$ und $2c\varphi$ zu ersetzen sind, so kommt:

$$F = \frac{a^2}{4c}\int\limits_{2c\alpha}^{2c\varphi} e^z \, dz = \frac{a^2}{4c}\left(e^{2c\varphi} - e^{2c\alpha}\right).$$

Bedeutet τ den konstanten Winkel in Fig. 239, S. 350, so ist $\operatorname{tg} \tau = 1 : c$. Sind r_0 und r_1 der Anfangs- und Endradiusvektor, so kommt: $F = \frac{1}{4}(r_1^2 - r_0^2) \operatorname{tg} \tau$.

Legt ein Mobil in der Zeit t den Weg s zurück, so daß $ds : dt$ seine augenblickliche Geschwindigkeit v ist, so ist seine durchschnittliche oder mittlere Geschwindigkeit im Intervalle von t_0 bis t_1 nach S. 70 gleich dem in dieser Zeit zurückgelegten Weg $s_1 - s_0$, dividiert mit der verflossenen Zeit $t_1 - t_0$. Der Begriff dieses Mittelwertes hängt nach S. 244 wesentlich davon ab, daß die Zeit als unabhängige Veränderliche gewählt worden ist. Nimmt man dagegen den Weg als unabhängige Veränderliche, so hat man sich vorzustellen, der Weg sei in unendlich kleine gleichlange Teile zerlegt, und es werde das Mittel aus den Geschwindigkeiten in den Teilpunkten gesucht. Dann ergibt sich nach Satz 8, S. 244, der Wert:

(3) $$\frac{1}{s_1 - s_0}\int\limits_{s_0}^{s_1} v \, ds \quad \text{oder} \quad \frac{1}{s_1 - s_0}\int\limits_{t_0}^{t_1} v^2 \, dt .$$

Denn wenn man die Zeit t als neue Veränderliche einführt, muß man wegen $v = ds : dt$ das Differential ds durch $v\,dt$ ersetzen.

2. **Beispiel:** Beim freien Fall im luftleeren Raum ist nach dem 15. Beispiel, S. 259, der Weg $s = \frac{1}{2} g t^2$ und die Geschwindigkeit $v = g t$. Hier ergibt sich für die mittlere Geschwindigkeit auf der Fallstrecke von $s = 0$ bis $s = a$ nach der früheren Auffassung, da $t_0 = 0$, $t_1 = \sqrt{2a : g}$ ist, der Wert $\frac{1}{2}\sqrt{2ga}$, während (3) den größeren Mittelwert $\frac{2}{3}\sqrt{2ga}$ liefert.

Wir bringen nun noch ein Beispiel zur Ermittelung des **Schwerpunktes einer Fläche** (vgl. S. 253).

3. **Beispiel:** Der Schwerpunkt der Fläche eines Halbkreises vom Radius Eins liegt auf dem mittleren Radius. Also braucht nur seine Höhe über dem begrenzenden Durchmesser berechnet zu werden. Dieser diene als x-Achse. Zerlegt man die Fläche in unendlich schmale Streifen parallel zur x-Achse, so gibt Fig. 385 als statisches Moment M_x in bezug auf diese Achse nach (6), S. 246:

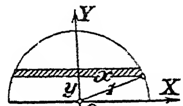


Fig. 385.

$$M_x = \int_0^1 y \cdot 2\sqrt{1 - y^2}\, dy\,.$$

Weil hier y^2 und $2y\,dy$ vorkommt, setzt man $y^2 = z$ und erhält:

$$M_x = \int_0^1 \sqrt{1 - z}\, dz\,.$$

Der Radikand wird einfacher, wenn $1 - z = t$ gesetzt wird. Dann aber ist die untere Grenze Eins und die obere Null:

$$M_x = \int_1^0 (-\sqrt{t})\, dt = -\int_1^0 \sqrt{t}\, dt = \left[\tfrac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \tfrac{2}{3}\,.$$

Da die Halbkreisfläche F gleich $\frac{1}{2}\pi$ ist, ergibt sich hieraus nach (18), S. 253, die Ordinate des Schwerpunktes gleich $4 : 3\pi$ oder rund 0,424. Wir können diese Ordinate aber auch nach (14), S. 251, wegen $y^2 = 1 - x^2$ so finden:

$$\mathfrak{y} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}\pi} \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)\, dx = \frac{1}{\pi}\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{+1} = \frac{4}{3\pi}\,.$$

Wir wenden uns zur Bestimmung der Volumina von Körpern, zunächst **der Volumina von Rotationskörpern:**

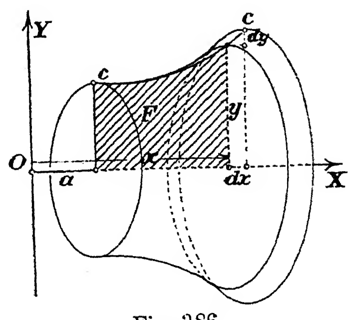


Fig. 386.

Die Bildkurve c einer Funktion $y = f(x)$ liege vor, begrenzt durch die zu $x = a$ und die zu irgendeinem x gehörige Ordinate, siehe Fig. 386. Die von der Kurve, den beiden Ordinaten und der x-Achse eingeschlossene Fläche habe den Inhalt F. Durch

Drehung um die x-Achse entsteht aus c eine Rotationsfläche und aus F ein von dieser Rotationsfläche und zwei Kreisen eingeschlossener Rotationskörper oder Drehungskörper. Sein Volumen V ist eine Funktion der Endabszisse x. Diese wachse um das Differential dx; dabei wachse V um dV. Dann ist dV das Volumen einer unendlich dünnen Scheibe von der Stärke dx. Sie wird von zwei Kreisflächen mit den Radien y und $y+dy$ und außerdem von einem Streifen einer Kegelfläche begrenzt. Das Volumen dV liegt also zwischen den Volumina zweier Rotationszylinder, die beide die Höhe dx haben, während der eine den Radius y, der andere den Radius $y+dy$ hat. Wird y mit derselben Einheit wie x gemessen, so liegt also dV zwischen $\pi y^2 dx$ und $\pi(y+dy)^2 dx$, d. h. $dV:dx$ zwischen πy^2 und $\pi(y+dy)^2$. Da dy nach Null strebt, folgt

$$\frac{dV}{dx} = \pi y^2, \quad \text{d. h.} \quad V = \int_a^x \pi y^2\, dx, \tag{4}$$

wo y die gegebene Funktion $f(x)$ ist. Wählt man die Endabszisse ebenfalls bestimmt, gleich b, so kommt:

$$V = \pi \int_{x=a}^{x=b} y^2\, dx = 2\pi M_x, \tag{5}$$

wo M_x das statische Moment der Fläche F in bezug auf die x-Achse bedeutet; man beachte nämlich die Formel (14), S. 251. Bezeichnet $\mathfrak{y}$ die Ordinate des Schwerpunktes der Fläche F, so ist $M_x = \mathfrak{y}F$, vgl. (18), S. 253. Demnach kommt schließlich:

$$V = 2\pi\mathfrak{y}\,.\,F. \tag{6}$$

Nun ist aber $2\pi\mathfrak{y}$ der Umfang des Kreises, den der Schwerpunkt bei der Drehung um die x-Achse beschreibt. Also folgt:

Satz 5: Das Volumen eines Drehungskörpers ist gleich dem Produkt der Fläche seines Profils (d. i. seines halben Axialschnittes) mit dem Umfange desjenigen Kreises, den der Schwerpunkt dieser Fläche bei der Drehung beschreibt; mit anderen Worten: es ist gleich dem Volumen desjenigen Zylinders, dessen Grundfläche die Fläche des Profils und dessen Höhe der Umfang jenes Kreises ist.

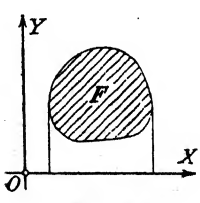


Fig. 387.

Dies ist die Guldinsche Regel, benannt nach ihrem Wiederentdecker Guldin (1640); sie findet sich schon bei Pappus (um 300 n. Chr.). Wenn die Fläche F nicht wie in Fig. 386, sondern etwa wie

in Fig. 387 begrenzt ist, kann man sie als die Differenz von zwei Flächen auffassen, die wie die Fläche in Fig. 386 durch die x-Achse, zwei Ordinaten und je einen Kurvenbogen begrenzt sind. Daraus folgt leicht, daß Satz 5 auch für Rotationskörper gilt, die durch irgendwelche die Drehachse nicht überschreitende ebene Flächenstücke F erzeugt werden.

4. **Beispiel:** Dreht sich der im 3. Beispiel betrachtete Halbkreis von der Fläche $F = \frac{1}{2}\pi$ um die x-Achse, so entsteht die Kugel vom Volumen $V = \frac{4}{3}\pi$. Also ergibt sich für die Schwerpunktsordinate $\mathfrak{y}$ die Bedingung $\frac{4}{3}\pi = 2\pi\mathfrak{y}\cdot\frac{1}{2}\pi$, daher $\mathfrak{y} = 4 : 3\pi$ wie im 3. Beispiel.

5. **Beispiel:** Ein Kreisring oder Wulst entsteht durch Drehung eines Kreises um die x-Achse, siehe Fig. 388. Ist r der Radius des Kreises und a die Entfernung der Mitte von der Achse, so sei $a > r$ angenommen, so daß der Kreis die Achse nicht schneide. Hier ist $F = \pi r^2$, $\mathfrak{y} = a$, also das Volumen des Kreisringes $V = 2\pi^2 a r^2$.

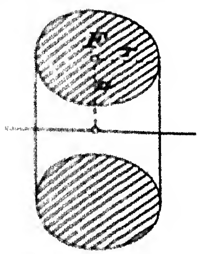


Fig. 388.

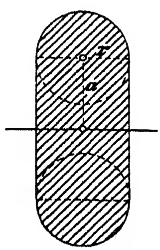


Fig. 389.

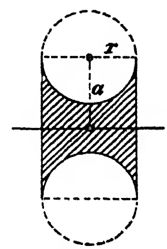


Fig. 390.

6. **Beispiel:** Der Querschnitt eines Rades sei von der in Fig. 389 angegebenen Form, begrenzt durch zwei zur x-Achse senkrechte Geraden und zwei gleich große Halbkreise vom Radius r. Die Mitten der Kreise mögen von der x-Achse die Entfernung $a > r$ haben. Die zur x-Achse parallelen Durchmesser beschreiben bei der Drehung einen Zylinder. Der Körper läßt sich in diesen Zylinder und einen Ring zerlegen, dessen Profil der Halbkreis ist. Der Zylinder hat das Volumen $z = 2\pi a^2 r$. Der Schwerpunkt des Halbkreises hat nach dem 3. Beispiel die Ordinate $\mathfrak{y} = a + \frac{4}{3}r : \pi$. Da $\frac{1}{2}\pi r^2$ die Halbkreisfläche ist, gibt die Guldinsche Regel das Volumen des Ringes gleich $\pi r^2 (a\pi + \frac{4}{3}r)$. Folglich ist das Volumen des Rades:

$$V = 2\pi a^2 r + \pi r^2 (a\pi + \tfrac{4}{3}r) = 2\pi a^2 r + \pi^2 a r^2 + \tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

7. **Beispiel:** Ebenso kann man die Rolle, deren Querschnitt in Fig. 390 angegeben ist, als Differenz eines Zylinders und eines Ringes betrachten. Dabei muß jetzt also $\mathfrak{y} = a - \frac{4}{3}r : \pi$ gesetzt werden. Demnach ergibt sich das Volumen der Rolle:

$$V = 2\pi a^2 r - \pi r^2 (a\pi - \tfrac{4}{3}r) = 2\pi a^2 r - \pi^2 a r^2 + \tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

8. **Beispiel:** Die Parabel $y = \sqrt{x}$, die wie in Fig. 199, S. 247, begrenzt sei, erzeugt bei der Drehung um die x-Achse einen Rotationskörper vom Volumen $\frac{1}{2}\pi h^2$.

9. **Beispiel:** Die gleichseitige Hyperbel $y = 1 : x$ (vgl. S. 197) sei durch die zu positiven Abszissen $x = a$ und $b > a$ gehörigen Ordinaten begrenzt. Das

Volumen des durch die Drehung um die x-Achse entstehenden Rotationskörpers ist nach (5):

$$V = \pi \int_a^b \frac{dx}{x^2} = \pi \left[-\frac{1}{x} \right]_a^b = \pi \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

Strebt b nach ∞, so geht $\pi : a$ als **endlicher** Wert für das Volumen eines sich **ins Unendliche** erstreckenden Rotationskörpers hervor.

10. **Beispiel:** Durch Drehung eines Berges der **Sinuslinie** $y = \sin x$, siehe Fig. 274, S. 388, entsteht nach (5) ein Körper vom Volumen $\frac{1}{2}\pi^2$, vgl. das 12. Beispiel, S. 415.

11. **Beispiel:** Durch Drehung des von $x = 0$ bis zu einem positiven $x < \frac{1}{2}\pi$ gehenden Stückes der **Tangenslinie** $y = \operatorname{tg} x$ um die x-Achse, siehe Fig. 281, S. 398, ergibt sich ein Rotationskörper, dessen Volumen nach (5) gleich dem π-fachen des Integrals von $\operatorname{tg}^2 x$, erstreckt von $x = 0$ an, ist. Durch die naheliegende Substitution $\operatorname{tg} x = z$, wobei $x = \operatorname{arc\,tg} z$, also $dx = dz : (1 + z^2)$ wird, kommt:

$$V = \pi \int_0^z \frac{z^2}{1+z^2}\, dz = \pi \int_0^z \left(1 - \frac{1}{1+z^2}\right) dz,$$

daher nach der 2. Regel:

$$V = \pi \left[\int_0^z dz - \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} \right] = \pi\,(z - \operatorname{arc\,tg} z).$$

Da $z = \operatorname{tg} x$ ist, kommt schließlich $V = \pi(\operatorname{tg} x - x)$.

Eine Volumenformel für beliebig gestaltete Körper gibt folgende Betrachtung: Einen Körper kann man zwischen zwei parallele Ebenen E_0 und E_1 setzen, siehe Fig. 391. Irgendeine zwischen E_0 und E_1 gelegene und zu E_0 und E_1 parallele Ebene E schneidet den Körper in einem Querschnitte, dessen Flächeninhalt F von der Lage der Ebene E abhängt. Nun werde eine x-Achse senkrecht zu E_0 und E_1 angenommen. Zu E_0 und E_1 mögen die Abszissen $x = a$ und $x = b$ gehören, während der Ebene E eine beliebige Abszisse x zwischen a und b zukommt. Der Flächeninhalt F wird dann eine Funktion $F(x)$ von x sein. **Ist diese Funktion bekannt**, so ergibt sich das Volumen V des Körpers durch Integration: Wir lassen x von a bis b Schritt für Schritt um das Differential dx wachsen, zerlegen

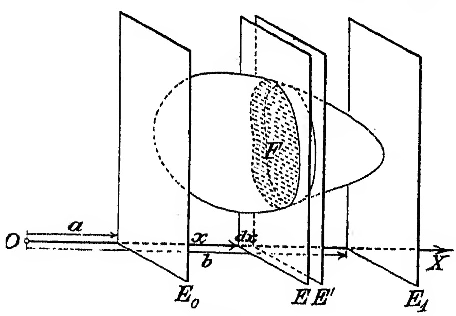


Fig. 391.

also den Körper durch unendlich viele parallele Ebenen in lauter unendlich dünne Scheiben. Diejenige Scheibe, die von den zu x und $x + dx$ gehörigen Ebenen E und E' begrenzt wird, können wir als einen Zylinder mit der Grundfläche $F(x)$ und Höhe dx, betrachten, dessen Volumen gleich $F(x)\,dx$ ist (nach S. 588). Addition aller Scheibenvolumina ergibt als Volumen des Körpers:

$$V = \int_a^b F(x)\,dx.$$

Satz 6: Liegt ein Körper zwischen zwei zu $x = a$ und $x = b$ gehörigen zur x-Achse senkrechten Ebenen derart, daß der Querschnitt, der aus dem Körper durch eine zur Achse senkrechte Ebene mit beliebiger Abszisse x ausgeschnitten wird, den Flächeninhalt $F(x)$ hat, so ist das Volumen des Körpers das bestimmte Integral

$$V = \int_a^b F(x)\,dx.$$

Dieser Satz findet sich im wesentlichen (ohne das Integralzeichen) bei dem italienischen Mathematiker Cavalieri (etwa 1598—1647).

Die Berechnung der Volumina heißt Kubatur, weil man die Volumina als Vielfache der Volumeneinheit, des Würfels oder Kubus, darstellt.

12. Beispiel: Ein elliptischer Kübel, siehe Fig. 392, entsteht aus einem geraden elliptischen Kegel und zwei zu seiner Achse senkrechten Ebenen. Die obere Ellipse habe die Halbachsen a und b. Ferner sei h die Kübelhöhe und k die Entfernung der Kegelspitze O von der Bodenfläche des Kübels. Ist E die Fläche der oberen Ellipse, so ergibt sich die Fläche F derjenigen Ellipse, die in der Höhe x über die Bodenfläche liegt, aus der Proportion:

$$\frac{F}{E} = \frac{(k+x)^2}{(k+h)^2}, \quad \text{d. h. es ist:} \quad F = \frac{(k+x)^2}{(k+h)^2}E.$$

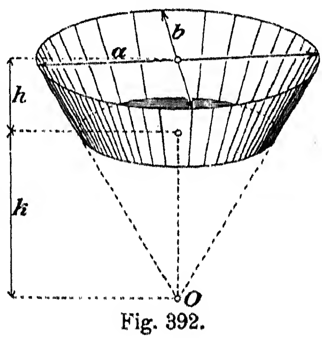


Fig. 392.

Folglich liefert Satz 6 als Volumen des Kübels:

$$V = \int_0^h \frac{(k+x)^2}{(k+h)^2}E\,dx = \frac{E}{(k+h)^2}\int_0^h (k+x)^2\,dx$$

oder

$$V = \frac{E}{(k+h)^2}\left[\tfrac{1}{3}(k+x)^3\right]_0^h = \frac{E}{3(k+h)^2}\left[(k+h)^3 - k^3\right]. \tag{7}$$

Demnach braucht man nur noch die Fläche E der Ellipse mit den Halbachsen a und b zu ermitteln. Diese Ellipse ist nach (2), S. 188, das Bild von

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Nach Satz 5, S. 229, hat daher das Ellipsenviertel die Fläche

$$\tfrac{1}{4}E = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx,$$

wobei die Wurzel positiv ist. Die nach dem 1. Beispiel, S. 511, naheliegende Substitution $x = a\cos t$ gibt, da t von $\frac{1}{2}\pi$ bis 0 abnimmt, wenn x von 0 bis a wächst:

$$\tfrac{1}{4}E = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{0} - b\sin t\,.\,a\sin t\,.\,dt = -ab\int_{\frac{1}{2}\pi}^{0}\sin^2 t\,dt$$

oder, wenn man nicht von $\frac{1}{2}\pi$ bis 0, sondern von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ integriert, wobei sich nach S. 229 nur das Vorzeichen ändert:

$$\tfrac{1}{4}E = ab\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^2 t\,dt = ab\left[\tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{1}{2}\pi},$$

vgl. das 12. Beispiel, S. 415. Daher wird $\frac{1}{4}E$ gleich $\frac{1}{4}\pi ab$. Die Ellipse mit den Halbachsen a und b hat also die Fläche πab. Demnach gibt (7) als Volumen des elliptischen Kübels:

$$V = \frac{\pi ab}{3(k+h)^2}\left[(k+h)^3 - k^3\right].$$

Bedeutet B die Bodenfläche des Kübels, so ist

$$B : E = k^2 : (k+h)^2,$$

also:

$$V = \tfrac{1}{3}\left[(k+h)E - kB\right].$$

Für die Berechnung der Bogenlänge einer Kurve, die sogenannte Rektifikation, kommt Satz 15, S. 361, in Betracht.

13. Beispiel: Die logarithmische Linie $y = \ln x$, siehe Fig. 213, S. 284, hat von der Stelle $x = 1$ bis zu einer beliebigen Stelle $x > 1$ die Bogenlänge

$$s = \int_1^x \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx,$$

wo die Wurzel positiv ist. Um die Wurzel zu beseitigen, ist es zweckmäßig, goniometrische Funktionen einzuführen, da zwischen diesen nach (5), S. 378, Beziehungen bestehen, die Quadratwurzeln enthalten. Weil der Radikand eine Summe ist, legt es die Vergleichung mit jenen Formeln nahe, $x = \operatorname{tg} z$ zu setzen. Da x positiv ist, bedeute $z = \operatorname{arc\,tg} x$ einen Winkel im ersten Quadranten. Berechnen wir zunächst das unbestimmte Integral, so kommt, weil $dx = dz : \cos^2 z$ wird:

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx = \int \frac{dz}{\sin z\cos^2 z}.$$

Im Zähler können wir statt Eins die Summe $\sin^2 z + \cos^2 z$ setzen. Dann liefert die 2. Regel:

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,d\,x = \int \frac{\sin^2 z}{\sin z \cos^2 z}\,d\,z + \int \frac{\cos^2 z}{\sin z \cos^2 z}\,d\,z$$

$$= \int \frac{\sin z}{\cos^2 z}\,d\,z + \int \frac{d\,z}{\sin z}.$$

Im ersten Integranden steht ein Bruch, dessen Nenner ein Quadrat ist. Dies erinnert an die Regel für die Differentiation eines Bruches, wo im Nenner das Quadrat des alten Nenners auftritt. Also werden wir einen Bruch suchen, dessen Nenner $\cos z$ ist und der differentiiert $\sin z : \cos^2 z$ gibt. Der einfachste derartige Bruch ist $1 : \cos z$ Er gibt nun differentiiert gerade $\sin z : \cos^2 z$. Das erste Integral liefert also $1 : \cos z$. Das zweite ist im 17. Beispiel, S. 583, ermittelt worden. Somit kommt:

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,d\,x = \frac{1}{\cos z} + \ln \operatorname{tg} \frac{z}{2} + \text{konst.}$$

Nun ist $x = \operatorname{tg} z$, also $\sin z = x : \sqrt{1+x^2}$, $\cos z = 1 : \sqrt{1+x^2}$, daher nach Satz 19, S. 413:

$$\operatorname{tg} \frac{z}{2} = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x},$$

folglich:

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,d\,x = \sqrt{1+x^2} + \ln \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} + \text{konst.}$$

Erstreckt man das Integral von $x = 1$ bis zu einem beliebigen $x > 1$, so ergibt sich als die gesuchte Bogenlänge:

$$s = \sqrt{1+x^3} - \sqrt{2} + \ln \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} - \ln(\sqrt{2}-1).$$

Ist eine Kurve in Polarkoordinaten φ, r gegeben (vgl. S. 345), also das Bild einer Funktion $r = f(\varphi)$, so tritt an die Stelle des Satzes 15, S. 361, für die Berechnung ihrer Bogenlänge ein anderer: Mißt man den Bogen s von einer bestimmten Amplitude α an bis zu einer beliebigen Amplitude φ und rechnet man s positiv, wenn die Amplitude zunimmt, so wird s eine gewisse Funktion von φ, deren Zuwachs $d\,s$ aus Fig. 384, S. 585, leicht zu finden ist. Da nämlich in dieser Figur $P\,Q = r\,d\,\varphi$, $Q\,P' = d\,r$, $P\,P' = d\,s$ ist, kommt:

$$d\,s = \sqrt{d\,r^2 + r^2\,d\varphi^2} = \sqrt{\left(\frac{d\,r}{d\,\varphi}\right)^2 + r^2}\,d\,\varphi,$$

wo die Wurzel positiv sein muß, weil $d\,s$ dasselbe Vorzeichen wie $d\varphi$ haben soll. Hiernach ergibt sich:

$$(8) \qquad s = \int_\alpha^\varphi \sqrt{\left(\frac{d\,r}{d\,\varphi}\right)^2 + r^2}\,d\,\varphi.$$

14. Beispiel: Die logarithmische Spirale $r = a e^{c\varphi}$, vgl. S. 350 u. f., hat die Bogenlänge:

$$s = \int_{\alpha}^{\varphi} \sqrt{c^2+1}\, a\, e^{c\varphi}\, d\varphi = a\sqrt{c^2+1}\int_{\alpha}^{\varphi} e^{c\varphi}\, d\varphi = \frac{a}{c}\sqrt{c^2+1}\,(e^{c\varphi} - e^{c\alpha}).$$

Haben r_0, r_1 und τ dieselbe Bedeutung wie im 1. Beispiel, S. 586, so folgt für s der Wert $(r_1 - r_0) : \cos\tau$, woraus man leicht eine Konstruktion von s als Strecke ableitet.

Schließlich noch einige Beispiele aus verschiedenen Anwendungsgebieten.

15. Beispiel: Eine unbewegliche punktförmige Masse M ziehe eine zur Zeit $t = 0$ in Ruhe befindliche, dann aber bewegliche punktförmige Masse m, die zuerst von M die Entfernung a habe, nach dem Gravitationsgesetz an. Nach dem 1. Beispiel, S. 500, wird die Geschwindigkeit v von m zur Zeit t gegeben durch die Formel:

$$\tfrac{1}{2}v^2 = k\,M\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{a}\right),$$

wenn s die Entfernung des Mobils m von M zur Zeit t und k die Konstante des Gravitationsgesetzes ist. Also wird, da s mit der Zeit abnimmt:

$$v = \frac{ds}{dt} = -\sqrt{2kM\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{a}\right)}.$$

Hieraus folgt:

$$dt = -\frac{ds}{\sqrt{2kM\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{a}\right)}},$$

so daß

$$t = \int_a^s \frac{-ds}{\sqrt{2kM\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{a}\right)}} = \frac{-1}{\sqrt{2kM}}\int_a^s \frac{ds}{\sqrt{\frac{1}{s} - \frac{1}{a}}}$$

ist, wo die Wurzeln positiv sind. Um zunächst das unbestimmte Integral

$$J = \int \frac{ds}{\sqrt{\frac{1}{s} - \frac{1}{a}}}$$

auszuwerten, vereinfacht man den Nenner, indem man die Wurzel gleich einer neuen positiven Veränderlichen z setzt. Dann ist:

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{a} = z^2, \qquad s = \frac{a}{az^2+1}, \qquad ds = -\frac{2a^2 z}{(az^2+1)^2}\,dz,$$

also:

$$J = -2a^2\int \frac{dz}{(az^2+1)^2}.$$

Da $1 + az^2$ an $1 + \mathrm{tg}^2 x$ erinnert, versucht man wie im 13. Beispiele die Substitution einer neuen Veränderlichen x vermöge:

$$az^2 = \mathrm{tg}^2 x, \quad \text{wobei} \quad z = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\mathrm{tg}\, x, \qquad dz = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\frac{dx}{\cos^2 x} \quad \text{ist.}$$

Wenn man $\sqrt{a}$ positiv annimmt, muß auch $\operatorname{tg} x$ positiv sein, weil z positiv ist. Wir setzen daher voraus, daß z zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liege. Nun kommt (vgl. dabei das 13. Beispiel, S. 415):

$$J = -2a\sqrt{a}\int \cos^2 x\,dx = -a\sqrt{a}\,(x + \tfrac{1}{2}\sin 2x) + \text{konst.}$$

Wegen $\operatorname{tg} x = \sqrt{a}\,z$ und $z^2 = 1 : s - 1 : a$ ist:

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{a-s}{s}}, \qquad \sin x = \sqrt{\frac{a-s}{a}}, \qquad \cos x = \sqrt{\frac{s}{a}},$$

wo alle Wurzeln positiv sind. Nach Satz 17, S. 412, wird also $\sin 2x$ gleich $\sqrt{s(a-s)} : a$, so daß kommt:

$$J = -a\sqrt{a}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a-s}{s}} - \sqrt{a\,s\,(a-s)} + \text{konst.}$$

Die Arkusfunktion liegt zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$. Also wird:

(9) $$t = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2kM}}\left[a \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a-s}{s}} + \sqrt{s\,(a-s)}\right].$$

Bedeutet M die in der Erdmitte vereinigt gedachte Masse der Erde, so liegt in (9) das **Gesetz des freien Falles auf die Erde** vor, wobei s die Entfernung des Mobils von der Erdmitte vorstellt. Im 15. Beispiele, S. 259, ergab sich ein einfacheres Gesetz, aber damals nahmen wir die Anziehungskraft der Erde während des Falles als **konstant** an. Das ist eine Annahme, die für irdische Körper völlig ausreicht. Dagegen gilt für Körper, die aus beträchtlicher Ferne auf die Erdoberfläche fallen, die Formel (9). Da die Erde einem Mobil auf der Oberfläche, d. h. in der Entfernung gleich dem Erdradius r, die Beschleunigung $-g = -9{,}81$ erteilt, wenn die Zeit in Sekunden, der Weg in Metern gemessen wird, und da diese Beschleunigung nach dem 1. Beispiele, S. 500, gleich $-kM : r^2$ ist, muß man kM durch gr^2 ersetzen. Dann kommt statt (9):

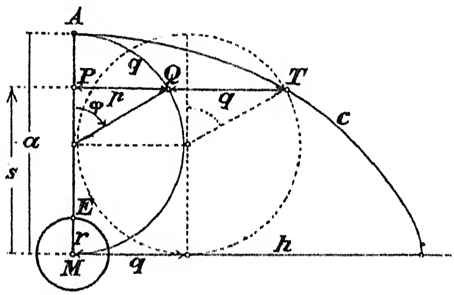


Fig. 393.

(10) $$t = \frac{\sqrt{a}}{r\sqrt{2g}}\left[a \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a-s}{s}} + \sqrt{s\,(a-s)}\right].$$

Den zu einem bestimmten s gehörigen Wert des Inhalts der eckigen Klammer kann man zeichnerisch ermitteln: In Fig. 393 sei der Punkt A die Anfangslage des Mobils, M die Erdmitte, also $MA = a$. Fällt das Mobil bis P, so ist $MP = s$, $PA = a - s$, daher $\sqrt{s\,(a-s)}$ die Strecke $p = PQ$, die mittels des Halbkreises über a gefunden wird. Der zum Bogen $q = AQ$ gehörige Zentriwinkel φ ist das Doppelte des Arkus in (10). Daher ist der Bogen q gleich dem ersten Summanden in der Klammer. **Also ist die zum Fallen von A bis P nötige Zeit proportional zur Summe $p + q$ der Strecke PQ und des Kreisbogens AQ.** Man bildet $p + q$, indem man PQ um die Länge des Bogens q über Q hinaus bis T verlängert. Dadurch ergibt

14. Beispiel: Die logarithmische Spirale $r = a e^{c\varphi}$, vgl. S. 350 u. f., hat die Bogenlänge:

$$s = \int_{\alpha}^{\varphi} \sqrt{c^2+1}\, a e^{c\varphi}\, d\varphi = a\sqrt{c^2+1}\int_{\alpha}^{\varphi} e^{c\varphi}\, d\varphi = \frac{a}{c}\sqrt{c^2+1}\,(e^{c\varphi} - e^{c\alpha}).$$

Haben r_0, r_1 und τ dieselbe Bedeutung wie im 1. Beispiel, S. 586, so folgt für s der Wert $(r_1 - r_0) : \cos\tau$, woraus man leicht eine Konstruktion von s als Strecke ableitet.

Schließlich noch einige Beispiele aus verschiedenen Anwendungsgebieten.

15. Beispiel: Eine unbewegliche punktförmige Masse M ziehe eine zur Zeit $t = 0$ in Ruhe befindliche, dann aber bewegliche punktförmige Masse m, die zuerst von M die Entfernung a habe, nach dem Gravitationsgesetz an. Nach dem 1. Beispiel, S. 500, wird die Geschwindigkeit v von m zur Zeit t gegeben durch die Formel:

$$\tfrac{1}{2} v^2 = k M\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{a}\right),$$

wenn s die Entfernung des Mobils m von M zur Zeit t und k die Konstante des Gravitationsgesetzes ist. Also wird, da s mit der Zeit abnimmt:

$$v = \frac{ds}{dt} = -\sqrt{2kM\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{a}\right)}.$$

Hieraus folgt:

$$dt = -\frac{ds}{\sqrt{2kM\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{a}\right)}},$$

so daß

$$t = \int_{a}^{s} \frac{-ds}{\sqrt{2kM\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{a}\right)}} = \frac{-1}{\sqrt{2kM}}\int_{a}^{s} \frac{ds}{\sqrt{\frac{1}{s} - \frac{1}{a}}}$$

ist, wo die Wurzeln positiv sind. Um zunächst das unbestimmte Integral

$$J = \int \frac{ds}{\sqrt{\frac{1}{s} - \frac{1}{a}}}$$

auszuwerten, vereinfacht man den Nenner, indem man die Wurzel gleich einer neuen positiven Veränderlichen z setzt. Dann ist:

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{a} = z^2, \qquad s = \frac{a}{a z^2 + 1}, \qquad ds = -\frac{2a^2 z}{(a z^2+1)^2}\, dz,$$

also:

$$J = -2a^2 \int \frac{dz}{(a z^2 + 1)^2}.$$

Da $1 + a z^2$ an $1 + \operatorname{tg}^2 x$ erinnert, versucht man wie im 13. Beispiele die Substitution einer neuen Veränderlichen x vermöge:

$$a z^2 = \operatorname{tg}^2 x, \quad \text{wobei} \quad z = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{tg} x, \qquad dz = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{dx}{\cos^2 x} \quad \text{ist.}$$

sich eine Kurve c für die Punkte T. Diese Kurve kann, wie man leicht beweist (vgl. das Punktierte in der Figur), auch durch Abrollen eines Kreises vom Durchmesser a auf der durch M gehenden, zu MA senkrechten Geraden h erzeugt werden und ist also eine gewöhnliche Zykloide (vgl. das 3. Beispiel, S. 513). — Die Zeit, die das Mobil braucht, um auf die Erdoberfläche bis E zu fallen, ergibt sich aus (10) für $s = r$. Man berechne, daß der Mond in fast fünf Tagen auf die Erde fallen würde, wenn er aus der Ruhelage heraus bloß der Anziehung der Erde unterworfen wäre. Bei dieser Annahme ist $r = 6\,370\,000$ m, und $a = 384\,000\,000$ m zu setzen.

16. Beispiel: Ein Gas vom Volumen v und Druck p ändere sich polytropisch, vgl. das 6. Beispiel, S. 367 u. f., insbesondere S. 370, so daß es einem Gesetze $p\,v^n =$ konst. gehorcht. Die Anfangs- und Endwerte bei der Ausdehnung des Gases seien v_0, p_0 und v_1, p_1. Wie groß ist die dabei geleistete Arbeit A? Nach S. 374 kommt wegen $p\,v^n = p_0 v_0^n = p_1 v_1^n$:

$$A = p_0 v_0^n \int_{v_0}^{v_1} v^{-n}\,dv = p_0 v_0^n \frac{v_1^{-n+1} - v_0^{-n+1}}{-n+1} = \frac{p_0 v_0 - p_1 v_1}{n-1}.$$

Man deute dies geometrisch. Im Fall einer isothermischen Zustandsänderung, vgl. S. 370, ist $n = 1$. Dann wird die Formel unbrauchbar, vgl. dazu das 8. Beispiel, S. 293 u. f.

17. Beispiel: Wie im 15. Beispiel, S. 259, ziehe ein homogener materieller Rundstab AB eine in einem Punkt M vereinigte Masse m nach dem Gravitationsgesetz an, doch liege jetzt M irgendwo (nicht wie damals auf der Mittellinie des Stabes). Wie groß ist die Anziehungskraft? Die Stablänge AB sei l, die Längeneinheit des Stabes habe die Masse μ. Die Lage von M gegenüber dem Stab wird festgelegt durch $AN = a$, $NM = b$, siehe Fig. 394. Wir denken uns den Stab in unendlich kleine Stücke dx zerlegt, indem wir x von 0 (in A) bis l (in B) wachsen lassen. Das in der Entfernung $AP = x$ von A gelegene Stück dx zieht m mit der Kraft $k\,.\,\mu\,dx\,.\,m : r^2$ an, wobei k eine von der Wahl der Einheiten abhängige Konstante und $r = MP$ ist. Diese Kraft hat die Richtung von M nach P. Ist $\sphericalangle NPM = \varphi$, so gibt Multiplikation mit $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ die Komponenten der Kraft parallel zum Stab und senkrecht dazu. Die Komponenten p und q der Gesamtanziehung des Stabes sind demnach die Integrale:

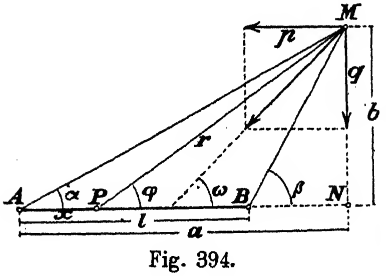


Fig. 394.

$$p = \int_0^l \frac{k\,\mu\,m\cos\varphi}{r^2}\,dx, \qquad q = \int_0^l \frac{k\,\mu\,m\sin\varphi}{r^2}\,dx.$$

Hierin ist:

$$r = \sqrt{(a-x)^2 + b^2}, \qquad \cos\varphi = \frac{a-x}{r}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{r}.$$

Also kommt, da k, μ und m konstant sind:

$$p = k\,\mu\,m\int\limits_0^l \frac{(a-x)\,d\,x}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}^3}, \qquad q = k\,\mu\,m\int\limits_0^l \frac{b\,d\,x}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}^3}.$$

Zur Beseitigung der Quadratwurzel wird φ als neue Veränderliche eingeführt. Da $\operatorname{ctg}\varphi = (a-x):b$ ist, wird $d\,x = b\,d\,\varphi : \sin^2\varphi$, so daß die unbestimmten Integrale diese werden:

$$\frac{1}{b}\int \cos\varphi\;d\,\varphi = \frac{\sin\varphi}{b} \quad \text{und} \quad \frac{1}{b}\int \sin\varphi\;d\varphi = -\frac{\cos\varphi}{b}.$$

Ist $\sphericalangle NAM = \alpha$ und $\sphericalangle NBM = \beta$, d. h. $\varphi = \alpha$ für $x = 0$ und $\varphi = \beta$ für $x = l$, so kommt schließlich:

$$p = \frac{k\,\mu\,m}{b}(\sin\beta - \sin\alpha), \qquad q = \frac{k\,\mu\,m}{b}(\cos\alpha - \cos\beta).$$

Bildet die Mittelkraft mit AB den Winkel ω, so ist:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{q}{p} = -\frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\sin\alpha - \sin\beta}.$$

Berechnet man $\operatorname{tg}(\omega - \alpha)$ und $\operatorname{tg}(\beta - \omega)$ nach Satz 16, S. 411, so ergibt sich für beide derselbe Wert:

$$\operatorname{tg}(\omega - \alpha) = \operatorname{tg}(\beta - \omega) = \frac{\cos(\alpha - \beta) - 1}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Folglich hat die Mittelkraft die F chtung der Mittellinie des Winkels *AMB*.

18. Beispiel[1]: Wir wollen zeigen, daß man unter Umständen den Wert eines bestimmten Integrals ermitteln kann, ohne vorher das unbestimmte Integral berechnet zu haben. Wir stellen uns nämlich die Aufgabe, den Wert des bestimmten Integrals

$$J_n = \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^n x\,d\,x \tag{11}$$

für ganze positive Zahlen n zu ermitteln. Teil-Integration gibt, wenn man $u' = \sin x$, d. h. $u = -\cos x$ und $v = \sin^{n-1} x$ setzt:

$$J_n = \left[-\cos x \sin^{n-1} x\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} + \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x\,.\,(n-1)\sin^{n-2} x \cos x\,d\,x.$$

Für $n > 1$ wird das erste Glied rechts gleich Null. Also kommt, wenn man noch im zweiten $\cos^2 x$ durch $1 - \sin^2 x$ ersetzt:

$$J_n = (n-1)\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{n-2} x\,d\,x - (n-1)\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^n x\,d\,x.$$

Das letzte Integral rechts ist wieder J_n, während man das erste Integral rechts nach (11) mit J_{n-2} bezeichnen kann; also kommt:

[1] Dies Beispiel kann überschlagen werden.

$$(12) \qquad n J_n = (n-1) J_{n-2}\,.$$

Dies ist eine sogenannte **Rekursionsformel** (vom lateinischen recurrere, zurückkommen), d. h. eine Formel, aus der man eine Reihe von Formeln gewinnt, wenn man n nach und nach durch $n-2$, $n-4$ usw. ersetzt:

$$(n-2) J_{n-2} = (n-3) J_{n-4}, \qquad (n-4) J_{n-4} = (n-5) J_{n-6} \quad \text{usw.}$$

Je nachdem n gerade oder ungerade ist, stößt man schließlich auf eine Gleichung zwischen J_2 und J_0 oder J_3 und J_1. Da nun nach (11)

$$J_0 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^0 x\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} dx = \tfrac{1}{2}\pi, \qquad J_1 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x\, dx = [-\cos x]_0^{\frac{1}{2}\pi} = 1$$

ist, ergibt sich also für $n = 2m$ und für $n = 2m-1$ (wo m eine ganze positive Zahl sei) eine Reihe von Gleichungen:

$$\begin{array}{rl|rl} 2m J_{2m} = & (2m-1) J_{2m-2}, & (2m-1) J_{2m-1} = & (2m-2) J_{2m-3}, \\ (2m-2) J_{2m-2} = & (2m-3) J_{2m-4}, & (2m-3) J_{2m-3} = & (2m-4) J_{2m-5}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2 J_2 = & 1 \,.\, \tfrac{1}{2}\pi, & 3 J_3 = & 2 \,.\, 1\,. \end{array}$$

Multipliziert man alle miteinander, so gehen als Werte von J_{2m} und J_{2m-1} hervor:

$$(13) \quad J_{2m} = \frac{(2m-1)(2m-3)\ldots 3\,.\,1}{2m(2m-2)\ldots 4\,.\,2} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad J_{2m-1} = \frac{(2m-2)(2m-4)\ldots 4\,.\,2}{(2m-1)(2m-3)\ldots 5\,.\,3}.$$

Hiervon machen wir noch eine Anwendung: Nach (11) ist:

$$J_{2m-1} - J_{2m} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin^{2m-1} x - \sin^{2m} x)\, dx\,,$$

und da $\sin x$ im ersten Quadranten stets zwischen 0 und 1 liegt, ist der Integrand und also auch das Integral positiv. Somit ist $J_{2m-1} > J_{2m}$, und ebenso kommt $J_{2m-2} > J_{2m-1}$, so daß J_{2m-1} zwischen J_{2m} und J_{2m-2} liegt. Weil aber nach (12)

$$J_{2m-2} = \frac{2m}{2m-1} J_{2m}$$

ist, folgt:

$$\frac{2m}{2m-1} > \frac{J_{2m-1}}{J_{2m}} > 1\,.$$

Für $\lim m = \infty$ wird die linke Seite auch gleich Eins, d. h. es ist:

$$\lim_{m=\infty} \frac{J_{2m-1}}{J_{2m}} = 1$$

oder, wenn die Werte (13) eingesetzt werden:

$$(14) \qquad \lim_{m=\infty} \frac{2m(2m-2)^2(2m-4)^2\ldots 4^2\,.\,2^2}{(2m-1)^2(2m-3)^2\ldots 5^2\,.\,3^2} \cdot \frac{2}{\pi} = 1\,.$$

Bringt man schließlich $\frac{1}{2}\pi$ auf die andere Seite, so kommt:

$$\tfrac{1}{2}\pi = \lim_{m=\infty}\left[\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m-1}\right].$$

Daher geht für $\frac{1}{2}\pi$ die folgende Darstellung durch ein unendliches Produkt hervor:

$$\tfrac{1}{2}\pi = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots.$$

Dies ist die Formel von Wallis, einem englischen Mathematiker (1616 bis 1703).

19. Beispiel[1]: Bei der experimentellen Bestimmung einer Größe geben die stets unvermeidlichen Fehlerquellen Anlaß zu einzelnen kleinen Fehlern, sogenannten Elementarfehlern, deren Summe der Gesamtfehler der Bestimmung ist. Da die Anzahl aller Fehlerquellen meistens recht groß ist, können wir die Voraussetzungen durch die Annahme vereinfachen, daß die Fehlerquellen zu lauter absolut genommen gleich großen Elementarfehlern Anlaß geben, indem wir eben alle Elementarfehler durch ihre durchschnittliche absolute Größe λ ersetzen. Versuche soll man stets so einrichten, daß die Fehlerquellen mit gleich großer Wahrscheinlichkeit zu einem positiven oder negativen Fehler Anlaß geben können. Jede Fehlerquelle verursache also einen Elementarfehler $+\lambda$ oder $-\lambda$. Wenn die Zahl der Fehlerquellen beträchtlich ist, macht es nichts aus, wenn wir sie uns als eine gerade Zahl $2m$ vorstellen, weil sich eine große Zahl $2m$ verhältnismäßig nur geringfügig von $2m+1$ unterscheidet.

Der größte mögliche Gesamtfehler ist nun $2m\lambda$, und er kann nur dann vorkommen, wenn alle $2m$ Elementarfehler λ positiv sind. Dagegen kann es $2m$-mal vorkommen, daß alle bis auf einen positiv sind, also der Gesamtfehler $2(m-1)\lambda$ wird. Alle bis auf zwei sind positiv in $2m(2m-1):2$ Fällen, und dann ist der Gesamtfehler $2(m-2)\lambda$ usw. Man erkennt allgemein: Der Gesamtfehler $2(m-k)\lambda$ kann in so vielen Fällen vorkommen, wie es der Binomialkoeffizient (vgl. das 5. Beispiel, S. 547 u. f.)

$$\binom{2m}{k} = \frac{2m(2m-1)\ldots(2m-k+1)}{1.2\ldots k}$$

angibt. Die Gesamtheit aller Fälle überhaupt ist die Summe aller Binomialkoeffizienten für $k = 0, 1, 2, \ldots 2m$, d. h. nach der binomischen Formel (19), S. 548, die Summe $(1+1)^{2m}$ oder 2^{2m}. Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers wird erklärt als das Verhältnis aus der Anzahl der Fälle, in denen er vorkommen kann, und aus der Gesamtheit aller möglichen Fälle überhaupt. Demnach hat ein Gesamtfehler von der Größe $2(m-k)\lambda$ die Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{1}{2^{2m}}\binom{2m}{k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots 2m).$$

Er kann positiv oder negativ ausfallen. Wird $m-k$ mit l und der Gesamtfehler mit x_l bezeichnet, so folgt: Der Gesamtfehler

$$x_l = 2l\lambda \tag{15}$$

hat die Wahrscheinlichkeit:

$$w_l = \frac{1}{2^{2m}}\binom{2m}{m-l}. \tag{16}$$

[1] Dies Beispiel, das etwas schwierig ist, kann überschlagen werden.

Hierbei bedeutet l irgendeine der $2m+1$ ganzen Zahlen von $-m$ bis $+m$. Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten w_l überhaupt ist Eins (die Gewißheit).

Die Gesamtfehler x_l stellen wir nun als Abszissen dar. Das Stück $\varDelta x_l$ der Abszissenachse von x_l bis x_{l+1} hat nach (15) die Länge:

(17) $$\varDelta x_l = x_{l+1} - x = 2\lambda .$$

Ferner wollen wir zu den Abszissen x_l Ordinaten y_l derart herstellen, daß die Wahrscheinlichkeit w_l des Gesamtfehlers x_l gerade durch die Fläche $y_l \varDelta x_l$ desjenigen Rechtecks veranschaulicht wird, dessen Grundlinie die Differenz $\varDelta x_l$ und dessen Höhe die Ordinate y_l ist, d. h. nach (17) und (16) wählen wir

(18) $$y_l = \frac{w_l}{\varDelta x_l} = \frac{1}{\lambda \cdot 2^{2m+1}} \binom{2m}{m-l} .$$

Die Einheiten auf den Achsen können wir nach Belieben wählen.

Nehmen wir für m z. B. die allerdings viel zu kleine Zahl 5 an, so zeichnen wir auf der x-Achse insgesamt $2m+1 = 11$ Punkte in gleichen Abständen 2λ voneinander; zu ihnen gehört als mittelster der Anfangspunkt O, weil $x_0 = 0$ ist. In den elf Punkten errichten wir als Ordinaten nach (18) Lote, die sich zueinander wie die zu $2m = 10$ gehörigen Binomialkoeffizienten 1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1 verhalten. So geht die Fig. 395 hervor. Die Rechteckflächen stellen die Wahrscheinlichkeiten derjenigen Fehler dar, die durch die (negativen oder positiven) Abszissen x_{-5}, x_{-4}, ... x_{-1}, 0, x_1, ... x_4, x_5, angegeben werden. Denken wir uns für m statt 5 eine recht große Zahl und für 2λ eine recht kleine Zahl gewählt, so werden die $2m+1$ Punkte $(x_l; y_l)$ einander näher rücken, und wir können versuchen, für $\lim m = \infty$ statt der Punktfolge eine Kurve zu bekommen.

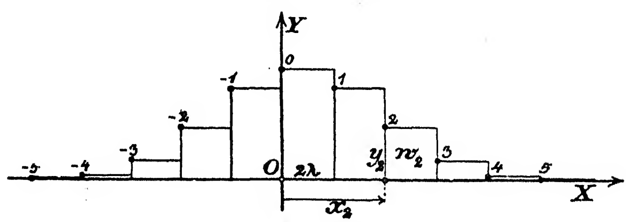


Fig. 395.

Dies geschieht so: Die Differenz $\varDelta y_l$ der Ordinaten y_{l+1} und y_l ist nach (18), wie man leicht ausrechnet:

$$\varDelta y_l = - \frac{2l+1}{\lambda \cdot 2^{2m+1}(m+l+1)} \binom{2m}{m-l}$$

oder, wenn man den hierin auftretenden Binomialkoeffizienten nach (18) durch y_l selbst ausdrückt sowie für l nach (15) den Wert $x_l : 2\lambda$ setzt:

(19) $$\varDelta y_l = - \frac{x_l y_l + \lambda y_l}{m\lambda + \frac{1}{2} x_l + \lambda} .$$

Aus (19) und (17) ergibt sich der Differenzenquotient

(20) $$\frac{\varDelta y_l}{\varDelta x_l} = - \frac{x_l y_l + \lambda y_l}{2m\lambda^2 + \lambda x_l + 2\lambda^2} .$$

Für $\lim m = \infty$ und $\lim \lambda = 0$ strebt die Differenz Δx_l, wie (17) zeigt, nach Null. Damit sich eine stetige Kurve ergebe, werden wir es so einrichten, daß dann auch die Differenz Δy_l nach Null, dagegen der Differenzenquotient $\Delta y_l : \Delta x_l$ nach einem endlichen Wert strebt, also nach einem Differentialquotienten. Die Form (19) von Δy_l zeigt, daß der Zähler nach $x_l y_l$ und der Nenner nach $\frac{1}{2} x_l + \lim m \lambda$ strebt. Also nehmen wir $\lim m \lambda = \infty$ an, da nur dann $\lim \Delta y_l = 0$ wird. Ferner strebt der Zähler in (20) nach $x_l y_l$ und der Nenner nach $2 \lim m \lambda^2$. Also nehmen wir zweitens an, daß $\lim m \lambda^2$ eine von Null verschiedene endliche Zahl sei. Beides erreichen wir, wenn wir m nach $+\infty$ und zugleich λ so nach Null streben lassen, daß

(21) $$\lim m \lambda^2 = \frac{1}{4h^2}$$

wird, wo h eine bestimmt gewählte, von Null verschiedene Zahl sei. Wir schreiben h^2 statt h, weil ja $m\lambda^2$ stets positiv ist, und setzen h^2 in den Nenner sowie außerdem den Faktor 4, weil dadurch die späteren Formeln bequemer werden. Nach (21) ist $\lim m \lambda = 1 : (4h^2 \lim \lambda) = +\infty$ wegen $\lim \lambda = 0$, und dies wünschten wir zu erreichen. Jetzt können wir Δx_l und Δy_l beim Grenzübergange durch Differentiale ersetzen, und da das Ergebnis für alle Punkte der gesuchten Kurve gilt, dürfen wir den Index l fortlassen. Somit folgt nach (21) aus (20):

$$\frac{dy}{dx} = -2h^2 x y, \quad \text{d. h.} \quad \frac{d \ln y}{dx} = -2h^2 x \quad \text{oder} \quad \ln y = -h^2 x^2 + \text{konst.},$$

so daß sich ergibt: Die gesuchte Kurve ist das Bild der Funktion:

(22) $$y = c e^{-h^2 x^2}.$$

Darin bedeutet die Konstante c den Wert von y für $x = 0$, d. h. nach (15) für $l = 0$, also nach (18) den Wert:

$$c = \lim \frac{1}{\lambda \cdot 2^{2m+1}} \binom{2m}{m}.$$

Da

$$\binom{2m}{m} = \frac{2m(2m-1)\ldots(m+1)}{1 \cdot 2 \ldots m}$$

ist, ergibt sich durch Erweitern mit $1 \cdot 2 \ldots m$:

$$\binom{2m}{m} = \frac{2m(2m-1)\ldots 2 \cdot 1}{m^2(m-1)^2 \ldots 2^2 \cdot 1^2}.$$

Mithin ist

$$\frac{c^2}{h^2} = \lim \frac{1}{\lambda^2 h^2 2^{4m+2}} \cdot \frac{(2m)^2(2m-1)^2 \ldots 2^2 \cdot 1^2}{m^4(m-1)^4 \ldots 2^4 \cdot 1^4}.$$

Nach (21) ist $1 : \lambda^2 h^2$ durch $4m$ zu ersetzen. Also kommt:

$$\frac{c^2}{h^2} = \lim \frac{4m \cdot (2m)^2(2m-1)^2 \ldots 2^2 \cdot 1^2}{2^{4m+2} \cdot m^4(m-1)^4 \ldots 2^4 \cdot 1^4}.$$

Im Zähler ziehen wir die Faktoren $(2m)^2(2m-2)^2 \ldots 2^2$ mit geraden Grundzahlen heraus. Ihre Anzahl ist gleich m, so daß sie den Faktor 2 insgesamt $2m$ mal enthalten. Wird er herausgezogen, so kommt:

$$\frac{c^2}{h^2} = \lim \frac{2^{2m+2} m \cdot (2m-1)^2(2m-3)^2 \ldots 5^2 \cdot 3^2 \cdot m^2(m-1)^2 \ldots 2^2 \cdot 1^2}{2^{4m+2} \cdot m^4(m-1)^4 \ldots 2^4 \cdot 1^4}.$$

Nun heben sich im Zähler und Nenner die Faktoren $2^{2m+2} m^3 (m-1)^2 (m-2)^2 \ldots 2^2 . 1^2$ fort, und es bleibt:

$$\frac{c^2}{h^2} = \lim \frac{(2m-1)^2 (2m-3)^2 \ldots 5^2 . 3^2}{2^{2m} . m . (m-1)^2 (m-2)^2 \ldots 2^2 . 1^2}.$$

Wenn man im Nenner $2m-2$ Faktoren 2 auf die $m-1$ Quadrate $(m-1)^2 (m-2)^2 \ldots 2^2 . 1^2$ verteilt, bekommt man schließlich:

$$\frac{c^2}{h^2} = \lim \frac{(2m-1)^2 (2m-3)^2 \ldots 5^2 . 3^2}{4m (2m-2)^2 (2m-4)^2 \ldots 4^2 . 2^2}.$$

Dieser Grenzwert ist nach (14) im vorigen Beispiele gleich $1 : \pi$. Mithin ist $c = h : \sqrt{\pi}$, daher die Funktion (22) diese:

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}. \tag{23}$$

Die Quadratwurzel ist positiv, wenn wir h positiv wählen, weil die Kurve positive Ordinaten haben muß.

Die Voraussetzung $\lim m = \infty$ bedeutet die Annahme, daß es unendlich viele unendlich kleine Elementarfehler gebe. Jede Abszisse x stellt irgend einen möglichen Gesamtfehler dar. Ferner ist $y\,dx$ (statt des früheren Rechteckinhaltes $y_l \Delta x_l$) die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des Fehlers x. Demnach ist die Summe

$$W_a = \int_{-a}^{+a} y\,dx$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der eintretende Fehler absolut genommen einen bestimmt gewählten positiven Wert a nicht übersteigt. Geometrisch wird diese Wahrscheinlichkeit durch die Fläche zwischen der Bildkurve der Funktion (23), der Abszissenachse und den zu den Abszissen $-a$ und $+a$ gehörigen Ordinaten dargestellt. Die Kurve ist gegenüber der Ordinatenachse symmetrisch, weil sich y nach (23) nicht ändert, wenn x durch $-x$ ersetzt wird. Deshalb ist die Fläche das Doppelte der Fläche von $x = 0$ bis $x = a$:

$$W_a = 2\int_0^a y\,dx = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-h^2 x^2}\,dx. \tag{24}$$

Entweder ist der absolute Betrag des wirklich gemachten Fehlers x kleiner als a oder größer als a. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten für beide Fälle muß gleich Eins sein (nämlich die Gewißheit). Folglich ist $1 - W_a$ die Wahrscheinlichkeit, daß der absolute Betrag des Fehlers größer als a ausfällt. Wenn also $W_a = 1 - W_a$ und mithin $W_a = \frac{1}{2}$ wird, ist es gleich wahrscheinlich, daß der absolute Fehlerbetrag mehr oder weniger als a ausmacht. Dann spricht man vom wahrscheinlichen Fehler. Der absolute Betrag des wahrscheinlichen Fehlers, der mit ξ bezeichnet werde, genügt demnach der Bedingung:

$$\int_0^{\xi} e^{-h^2 x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4h}.$$

Macht man die Substitution $x = t : h$, d. h. $dx = dt : h$, so tritt an die Stelle von ξ die obere Grenze $h\xi$. Also kommt:

$$\int\limits_0^{h\xi} e^{-t^2}\,dt = \tfrac{1}{4}\sqrt{\pi}\,.$$

Nach der letzten Bemerkung auf S. 571 muß daher die obere Grenze gleich rund 0,477 sein. Demnach kommt $h\xi = 0{,}477$. Mit Rücksicht auf (21) ergibt sich mithin: Wenn die Elementarfehler λ nach Null streben und ihre Anzahl m nach ∞ strebt, während $1 : 2\lambda\sqrt{m}$ nach h strebt, ist $\xi = 0{,}477 : h$ der wahrscheinliche Fehler.

Die Bildkurve der Funktion (23), die Wahrscheinlichkeitskurve, haben wir schon im 10. Beispiel, S. 490, betrachtet. Denn die dort in Fig. 352 dargestellte Bildkurve von

$$y = e^{-x^2}$$

wird zur Bildkurve von (23), wenn man die Einheiten passend wählt, nämlich die dort benutzte x-Einheit jetzt gleich h neuen x-Einheiten und die dort benutzte y-Einheit jetzt gleich $\sqrt{\pi} : h$ neuen y-Einheiten annimmt. (Die 11 Punkte der Figur 395 auf S. 600 liegen übrigens mit großer Annäherung auf der Kurve der Fig. 352 auf S. 490. Dies wurde dadurch erreicht, daß wir $h = 1$, ferner entsprechend (21) für $m = 5$ außerdem $\lambda^2 = 1 : 4m = 1 : 20$ annahmen und die Maximalordinate, nämlich y_0, in Fig. 395 gerade so lang wie in Fig. 352 wählten.)

§ 3. Besondere Integrationsverfahren[1].

Zunächst besprechen wir die Integrale gebrochener Funktionen. Nach Satz 12, S. 135, kann man eine gebrochene Funktion von x immer auf eine Form

$$w(x) + \frac{u(x)}{v(x)}$$

bringen, wo $u(x)$, $v(x)$ und $w(x)$ ganze Funktionen sind, ferner der Bruch nicht weiter zu kürzen ist und außerdem der Zähler $u(x)$ einen geringeren Grad als der Nenner $v(x)$ hat. Das Integral der ganzen Funktion $w(x)$ läßt sich nach dem 6. Beispiel, S. 576, ermitteln. Wir betrachten also nur noch Integrale von der Form:

(1)
$$\int \frac{u(x)}{v(x)}\,dx\,.$$

Wir nehmen an, daß $v(x)$ eine ganze Funktion n^{ten} Grades, also $u(x)$ eine ganze Funktion vom höchstens $(n-1)^{\text{ten}}$ Grad sei. Die Voraussetzung, daß sich die gebrochene Funktion $u(x) : v(x)$ nicht weiter kürzen lasse, kann man nach Satz 5, S. 102, auch so ausdrücken: Für diejenigen Werte von x, für die $v(x)$ gleich Null wird, d. h. für die Lösungen der Gleichung n^{ten} Grades $v(x) = 0$, soll $u(x)$ nicht gleich Null werden.

[1] Diesen zum Teil nicht leichten Paragraphen kann man vorläufig überschlagen, ohne das Verstehen des Späteren zu beeinträchtigen.

Die folgende Überlegung[1] wird nun zeigen, daß sich das vorgelegte Integral (1) auf ein einfacheres Integral von derselben Art zurückführen läßt, sobald ein Wert $x = h$ bekannt ist, für den $v(x)$ gleich Null wird. In diesem Fall haben wir $v(h) = 0$, dagegen $u(h) \neq 0$. Nach Satz 5, S. 102, geht die Partialdivision von $v(x)$ mit $x - h$ auf. Ihr Ergebnis ist eine ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades. Nun ist es möglich, daß auch sie mit $x - h$ ohne Rest teilbar sei, usw. Um sogleich die allgemeinste Möglichkeit ins Auge zu fassen, wollen wir daher voraussetzen, die fortgesetzte Partialdivision mit $x - h$ gehe gerade r-mal auf, d. h. $v(x)$ enthalte den Faktor $(x-h)^r$, aber nicht den Faktor $(x-h)^{r+1}$. Die Zahl r ist dann irgendeine der ganzen Zahlen von 1 bis n. Die Partialdivision von $v(x)$ mit $(x-h)^r$ möge die ganze Funktion $\varphi(x)$ liefern, die vom Grad $n - r$ ist:

$$\frac{v(x)}{(x-h)^r} = \varphi(x). \tag{2}$$

Dann ist $\varphi(h) \neq 0$, da nochmalige restlose Division mit $x - h$ nicht möglich sein soll. Weil ferner $u(h) \neq 0$ ist, bedeutet der Bruch

$$k = \frac{u(h)}{\varphi(h)} \tag{3}$$

eine endliche und von Null verschiedene Größe, und zwar eine Konstante. Nun fassen wir die Funktion $u(x) - k\varphi(x)$ ins Auge. Sie ist eine ganze Funktion vom höchstens $(n-1)^{\text{ten}}$ Grad. Für $x = h$ nimmt sie den Wert $u(h) - k\varphi(h)$ an, der nach (3) gleich Null ist. Mithin muß sie mit $x - h$ ohne Rest teilbar sein. Die Partialdivision liefert also eine ganze Funktion $\psi(x)$:

$$\frac{u(x) - k\varphi(x)}{x-h} = \psi(x), \tag{4}$$

und diese Funktion $\psi(x)$ ist vom höchstens $(n-2)^{\text{ten}}$ Grad. Aus (4) und (2) folgt:

$$u(x) = k\varphi(x) + (x-h)\psi(x), \qquad v(x) = (x-h)^r \varphi(x),$$

daher:

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{k}{(x-h)^r} + \frac{\psi(x)}{(x-h)^{r-1}\varphi(x)}. \tag{5}$$

Der letzte Summand ist eine gebrochene Funktion, deren Nenner vom Grad $n - 1$ und deren Zähler $\psi(x)$ von niedrigerem Grad ist. Da der Nenner den Faktor $x - h$ noch $(r-1)$-mal enthält und es

[1] Man versteht das Folgende vielleicht besser, wenn man zugleich das 1. Beispiel auf S. 606 mit durcharbeitet.

wohl möglich ist, daß auch der Zähler $\psi(x)$ diesen Faktor einige Male aufweist, wollen wir annehmen, die dem Zähler und Nenner gemeinsamen Faktoren $x-h$ seien fortgehoben worden. Dann ergibt sich eine Darstellung von der Form

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{k}{(x-h)^r} + \frac{u_1(x)}{v_1(x)}, \tag{6}$$

worin der letzte Summand eine nicht kürzbare gebrochene Funktion ist, deren Nenner von niedrigerem Grad als n und deren Zähler von noch geringerem Grad ist.

Da nun

$$\int \frac{k}{(x-h)^r}\,dx = -\frac{1}{r-1} \cdot \frac{k}{(x-h)^{r-1}} + \text{konst.} \tag{7}$$

ist, falls $r \neq 1$ ist, und da im Fall $r = 1$ die Formel gilt:

$$\int \frac{k}{x-h}\,dx = k \ln(x-h) + \text{konst.}, \tag{8}$$

liefert (6) eine sogenannte Reduktionsformel (vom lateinischen reducere, zurückführen):

$$\int \frac{u(x)}{v(x)}\,dx = \int \frac{k}{(x-h)^r}\,dx + \int \frac{u_1(x)}{v_1(x)}\,dx. \tag{9}$$

Sie führt nämlich die Auswertung des Integrals (1) auf die des Integrals

$$\int \frac{u_1(x)}{v_1(x)}\,dx \tag{10}$$

zurück, dessen Integrand ebenso wie der des Integrals (1) eine nicht kürzbare gebrochene Funktion ist, die ebenso wie jener Integrand im Zähler einen geringeren Grad als im Nenner hat, während der Nenner $v_1(x)$ des neuen Integranden einen geringeren Grad als der Nenner $v(x)$ des alten Integranden hat. Die Berechnung des Integrals (1) wird also durch die Reduktionsformel (9) auf die eines einfacheren Integrals (10) von derselben Art zurückgeführt.

Was nun dies neue Integral (10) betrifft, so kann man es auf dieselbe Art weiter vereinfachen, sobald man einen Wert von x kennt, für den der Nenner $v_1(x)$ gleich Null wird. Man beachte, wie $v_1(x)$ aus $(x-h)^{r-1}\varphi(x)$ entstanden ist und daß $v(x)$ nach (2) gleich $(x-h)^r\varphi(x)$ ist. Daraus erkennt man, daß der neue Nenner $v_1(x)$ im alten Nenner $v(x)$ als Faktor enthalten ist, und daß alle Werte von x, für die $v_1(x)$ gleich Null wird, zusammen mit dem Werte $x = h$ die Gesamtheit aller derjenigen Werte von x ausmacht, für die überhaupt der alte Nenner $v(x)$ gleich Null wird. Man kann

deshalb durch wiederholte Anwendung der Reduktionsformel das vorgelegte Integral (1) vollständig berechnen, sobald man alle Werte von x kennt, für die der Nenner $v(x)$ des Integranden gleich Null wird.

1. Beispiel: Als Integral (1) sei dieses vorgelegt:

$$\int \frac{x^3 - 5x^2 + 13x + 1}{x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8}\, dx .$$

Hier ist $v(x)$, der Nenner des Integranden, gleich Null für $x = 2$, wovon man sich zunächst überzeugen möge. Daher können wir 2 als die Zahl h benutzen. Die Partialdivision von $v(x)$ mit $x - 2$ liefert $x^3 - 3x^2 + 4$. Man bemerkt nun, daß sich diese Funktion abermals mit $x - 2$ ohne Rest teilen läßt. Das Ergebnis ist $x^2 - x - 2$. Nun ist wieder die Partialdivision mit $x - 2$ ohne Rest möglich, wodurch $x + 1$ hervorgeht. Demnach ist

$$v(x) = (x-2)^3 (x+1),$$

so daß der Nenner $v(x)$ nur für $x = 2$ und $x = -1$ gleich Null wird. Folglich muß es möglich sein, das vorgelegte Integral nach dem auseinandergesetzten Verfahren vollständig zu berechnen. Da $h = 2$ ist, zeigt die Vergleichung der letzten Formel mit (2), daß $r = 3$ und $\varphi(x) = x + 1$ ist. Der Zähler $u(x)$ des Integranden ist, wovon man sich überzeugen möge, weder für $x = 2$ noch für $x = -1$ gleich Null, also die gebrochene Funktion $u(x) : v(x)$ in der Tat nicht weiter zu kürzen. Wir berechnen nun $\varphi(h) = \varphi(2) = 3$ und $u(h) = u(2) = 15$, so daß (3) den Wert $k = 5$ liefert. Weiterhin kommt daher:

$$u(x) - k\,\varphi(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 .$$

Diese Funktion muß, vgl. (4), ohne Rest mit $x - 2$ teilbar sein. Die Partialdivision liefert in der Tat die ganze Funktion $\psi(x) = x^2 - 3x + 2$. Demnach lautet die Gleichung (5) jetzt so:

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{5}{(x-2)^3} + \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-2)^2 (x+1)} .$$

Der letzte Summand ist eine gebrochene Funktion, die sich noch einmal mit $x - 2$ kürzen läßt, weil $x^2 - 3x + 2$ dividiert mit $x - 2$ den Wert $x - 1$ liefert. Man bekommt also einfacher:

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{5}{(x-2)^3} + \frac{x-1}{(x-2)(x+1)} .$$

Dies ist im vorliegenden Fall die Gleichung (6), und die Reduktionsformel (9) liefert mit Rücksicht auf (7) für $r = 3$:

$$(11)\qquad \int \frac{x^3 - 5x^2 + 13x + 1}{x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8}\, dx = -\frac{1}{2}\,\frac{5}{(x-2)^2} + \int \frac{x-1}{(x-2)(x+1)}\, dx .$$

Demnach handelt es sich weiterhin nur noch um die Auswertung des Integrals:

$$\int \frac{x-1}{(x-2)(x+1)}\, dx .$$

Von neuem ist also jetzt das oben auseinandergesetzte Verfahren anzuwenden. Unter $u(x)$ wird daher nunmehr $x - 1$ und unter $v(x)$ das Produkt $(x-2)(x+1)$ verstanden. Wieder ist $h = 2$, da $v(x)$ den Faktor $x - 2$ hat.

Weil aber dieser Faktor nur einmal auftritt, ist jetzt $r = 1$, und (2) gibt $\varphi(x) = x + 1$, also $\varphi(h) = \varphi(2) = 3$. Da ferner $u(h) = u(2) = 1$ ist, gibt (3) die Konstante $k = \frac{1}{3}$. Weiterhin wird $u(x) - k\varphi(x)$ gleich $\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$; nach (4) ist daher $\psi(x) = \frac{2}{3}$. Mithin liefert (5) jetzt:

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{\frac{1}{3}}{x-2} + \frac{\frac{2}{3}}{x+1}.$$

Also ist:

$$\int \frac{x-1}{(x-2)(x+1)}\,dx = \frac{1}{3}\ln(x-2) + \frac{2}{3}\ln(x+1) + \text{konst.}$$

Einsetzen dieses Wertes in (11) gibt schließlich:

$$\int \frac{x^3 - 5x^2 + 13x + 1}{x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8}\,dx = -\frac{5}{2(x-2)^2} + \frac{1}{3}\ln(x-2) + \frac{2}{3}\ln(x+1) + \text{konst.}$$

Das auf der Reduktionsformel (9) beruhende Integrationsverfahren hat aber noch einen Mangel. Dies zeigt die Anwendung auf das folgende Beispiel.

2. **Beispiel:** In

$$\int \frac{\alpha x + \beta}{a x^2 + b x + c}\,dx$$

seien α, β, a, b, c Konstanten. Insbesondere sei $a \neq 0$. Hier ist $v(x)$ die quadratische Funktion $ax^2 + bx + c$, die nach (2), S. 110, gleich Null wird für die Werte

$$\frac{1}{2a}(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})$$

von x. Bezeichnen wir diese Werte mit h_1 und h_2, so hat also $v(x)$ die Form:

$$v(x) = a(x - h_1)(x - h_2).$$

Zunächst wollen wir annehmen, daß h_1 von h_2 verschieden sei, d. h. daß $b^2 - 4ac \neq 0$ sei. Wird dann h_1 als die beim allgemeinen Verfahren mit h bezeichnete Größe benutzt, so ist $r = 1$, da der Faktor $x = h_1$ in $v(x)$ nur einmal vorkommt. Aus (2) ergibt sich $\varphi(x) = a(x - h_2)$. Demnach ist jetzt $\varphi(h)$ der Wert $a(h_1 - h_2)$, so daß (3) wegen $u(x) = \alpha x + \beta$ liefert:

$$k = \frac{\alpha h_1 + \beta}{a(h_1 - h_2)}.$$

Die Funktion $u(x) - k\varphi(x)$ ist jetzt:

$$\alpha x + \beta - k a(x - h_2) \qquad \text{oder} \qquad -\frac{\alpha h_2 + \beta}{h_1 - h_2}(x - h_1).$$

Demnach gibt (4) als Wert von $\psi(x)$ jetzt die Konstante:

$$\psi(x) = -\frac{\alpha h_2 + \beta}{h_1 - h_2},$$

so daß (5) so lautet:

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{\alpha h_1 + \beta}{a(h_1 - h_2)} \cdot \frac{1}{x - h_1} - \frac{\alpha h_2 + \beta}{a(h_1 - h_2)} \cdot \frac{1}{x - h_2}.$$

Demnach kommt:

$$\int \frac{\alpha x + \beta}{a x^2 + b x + c}\, d x = \frac{\alpha h_1 + \beta}{a(h_1 - h_2)} \ln (x - h_1) - \frac{\alpha h_2 + \beta}{a(h_1 - h_2)} \ln (x - h_2) + \text{konst.}$$

Setzt man hierin die oben angegebenen Werte von h_1 und h_2 ein, so ergibt sich:

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \int \frac{\alpha x + \beta}{a x^2 + b x + c}\, d x = & \left(\frac{\alpha}{2a} + \frac{2\beta a - \alpha b}{2a\sqrt{b^2 - 4ac}}\right) \ln (2 a x + b - \sqrt{b^2 - 4 a c}) \\ & + \left(\frac{\alpha}{2a} - \frac{2\beta a - \alpha b}{2a\sqrt{b^2 - 4ac}}\right) \ln (2 a x + b + \sqrt{b^2 - 4 a c}) + \text{konst.} \end{aligned} \right.$$

Allerdings erscheinen die Numeri der Logarithmen eigentlich zunächst noch mit dem Nenner $2a$. Da aber

$$\ln \frac{2 a x + b - \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2a} = \ln (2 a x + b - \sqrt{b^2 - 4 a c}) - \ln (2a)$$

ist, leuchtet ein, daß dies nur auf die Addition von Konstanten hinauskommt, die zur willkürlichen Integrationskonstante geschlagen werden können.

Wie gesagt, gilt das Ergebnis nur im Fall $b^2 - 4ac \neq 0$. Aber auch, wenn die Lösungen h_1 und h_2 der quadratischen Gleichung $a x^2 + b x + c = 0$ nicht reell sind, d. h. wenn $b^2 - 4ac < 0$ ist, kann man (12) in dieser Form nicht gebrauchen, da dann die Numeri der Logarithmen die Form $p + iq$ haben, wo p und q zwar reell sind, aber i die imaginäre Quadratwurzel aus -1 ist. Derartige Größen $p + iq$ heißen bekanntlich komplex oder auch, weniger genau, imaginär. Man nennt sie rein imaginär, wenn $p = 0$ ist, d. h. wenn sie die Form iq haben, wo q reell ist. Wir haben gar nicht erörtert, was unter dem natürlichen Logarithmus einer komplexen Größe zu verstehen ist; dies zu tun, würde uns auch zu weit führen. Deshalb schlagen wir im Fall $b^2 - 4ac < 0$ oder also $4ac - b^2 > 0$ einen anderen Weg zur Integration ein: Indem man die bekannte Ergänzung von $a x^2 + b x$ zum Quadrat (S. 107) ausführt, kann man den Nenner des Integranden so umformen:

$$\begin{aligned} a x^2 + b x + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a} x\right) + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Man beachte, daß die hier auftretende Quadratwurzel wegen $4ac - b^2 > 0$ reell ist. Nun führen wir

$$z = \left(x + \frac{b}{2a}\right) : \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{2 a x + b}{\sqrt{4ac - b^2}},$$

als neue Veränderliche ein. Dann geht der Nenner des Integranden offenbar in $(4ac - b^2)(z^2 + 1) : 4a$ über. Außerdem ist

$$x = \frac{z\sqrt{4ac - b^2} - b}{2a}, \qquad \text{also} \qquad d x = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\, d z,$$

so daß kommt:

$$\int \frac{\alpha x + \beta}{a x^2 + b x + c}\, d x = \int \left(\frac{\alpha}{a} \frac{z}{z^2 + 1} + \frac{2\beta a - \alpha b}{a\sqrt{4ac - b^2}} \frac{1}{z^2 + 1}\right) d z.$$

hts stehende Integral läßt sich zerlegen in

$$\frac{\alpha}{2a}\int\frac{2z}{z^2+1}\,dz+\frac{2\beta a-\alpha b}{a\sqrt{4ac-b^2}}\int\frac{dz}{z^2+1}$$

her sofort auswerten:

$$\frac{\alpha}{2a}\ln(z^2+1)+\frac{2\beta a-\alpha b}{a\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arc\,tg} z+\text{konst.}$$

wir bedenken, daß der Numerus z^2+1 des Logarithmus bis auf einen ten Faktor gleich ax^2+bx+c ist, der konstante Faktor aber nur konstanten Summanden im Ergebnisse liefert und dieser Summand zur ichen Integrationskonstante geschlagen werden kann, erhalten wir schließ- rch Einführung von x statt z:

$$\left\{\begin{aligned}\int\frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}\,dx&=\frac{\alpha}{2a}\ln(ax^2+bx+c)\\&\quad+\frac{2\beta a-\alpha b}{a\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+\text{konst.},\end{aligned}\right.$$

war gilt diese Formel im Fall $4ac-b^2>0$.

chließlich ist noch der Fall $4ac-b^2=0$ zu erledigen, d. h. die Annahme zu , daß die quadratische Gleichung ax^2+bx+c zwei gleiche Lösungen habe, mit h bezeichnen, nämlich $h=-b:2a$. In diesem Fall wird der Nenner $v(x)$ $a(x-h)^2$, so daß die in der allgemeinen Betrachtung auf S. 604 mit r nete Zahl gleich 2 ist. Aus (2) folgt $\varphi(x)=a$, aus (3) folgt $k=(\alpha h+\beta):a$, $u(x)-k\varphi(x)$ gleich $\alpha(x-h)$ wird. Aus (4) geht mithin $\psi(x)=\alpha$ Somit gibt (5):

$$\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{\alpha h+\beta}{a}\,\frac{1}{(x-h)^2}+\frac{\alpha}{a}\,\frac{1}{x-h}.$$

kommt:

$$\int\frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}\,dx=-\frac{\alpha h+\beta}{a}\,\frac{1}{x-h}+\frac{\alpha}{a}\ln(x-h)+\text{konst.}$$

lich wird $h=-b:2a$ eingesetzt. Der dann im Numerus vorkommende $2a$ gibt nur zu einem konstanten Summanden Anlaß, der zur willkürlichen tionskonstante geschlagen werden kann, so daß hervorgeht:

$$\int\frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}\,dx=-\frac{2\beta a-\alpha b}{a}\,\frac{1}{2ax+b}+\frac{\alpha}{a}\ln(2ax+b)+\text{konst.},$$

war gilt diese Formel im Fall $4ac-b^2=0$.

n diesem Beispiele konnten wir die Schwierigkeit überwinden, sich durch nicht reelle Lösungen h der Gleichung $=0$ einstellen. Ehe wir zeigen, daß man diese Schwierigkeit überwinden kann, soll jedoch noch dargetan werden, wie sich ndergebnis der Integration einer gebrochenen Funktion $u(x):v(x)$ tet, wenn man das zu Anfang dieses Paragraphen auseinander- te Reduktionsverfahren wiederholt anwendet, bis man alle Lö- n der Gleichung n^{ten} Grades $v(x)=0$ aufgebraucht hat.

Dabei ist einiges über die Lösungen einer Gleichung n^{ten} Grades vorauszuschicken: Auf die Frage, ob irgendeine vorgelegte Gleichung n^{ten} Grades

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

überhaupt Lösungen x hat, sind wir bisher garnicht eingegangen. Wie auf S. 109 bemerkt wurde, kann man diese Frage bejahen, wenn der Grad n der Gleichung nicht größer als 4 ist. Was dagegen Gleichungen von höherem als viertem Grad betrifft, so ist die Beantwortung der Frage keineswegs leicht. Der große deutsche Mathematiker GAUSS (1777—1855) hat im Jahre 1799 den ersten Beweis dafür gegeben, daß in der Tat jede Gleichung n^{ten} Grades mindestens eine Lösung hat, aber diese Lösung braucht nicht reell zu sein. Auf den Beweis können wir nicht eingehen, da er zu schwierig ist. Wir müssen den Satz aber trotzdem benutzen. Ausnahmsweise stützen wir uns also hier auf eine Tatsache, deren Beweis außerhalb der Grenzen liegt, die wir uns ziehen müssen.

Unter $v(x)$ war oben eine ganze Funktion n^{ten} Grades verstanden. Wir nehmen jetzt also an, daß h eine Lösung der Gleichung n^{ten} Grades $v(x) = 0$ sei, d. h. daß die Funktion $v(x)$ nach Satz 5, S. 102, in das Produkt aus $x - h_1$ und einer ganzen Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades zerlegbar sei. Nach dem Satz von GAUSS hat nun aber auch die Gleichung, die durch Nullsetzen dieser ganzen Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades entsteht, eine Lösung h_2, d. h. von der ganzen Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades kann nach Satz 5, S. 102, der Faktor $x - h_2$ abgesondert werden. Demnach hat $v(x)$ selbst die Form des Produktes aus $(x-h_1)(x-h_2)$ mit einer ganzen Funktion $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades. So kann man weiterschließen. Durch wiederholte Anwendung des Satzes von GAUSS geht also hervor, daß $v(x)$ das Produkt aus n Faktoren $x - h_1$, $x - h_2, \ldots x - h_n$ und einer ganzen Funktion nullten Grades, d. h. einer Konstanten a ist:

$$v(x) = a(x-h_1)(x-h_2)\ldots(x-h_n). \tag{15}$$

Die Konstanten $h_1, h_2 \ldots h_n$ sind Lösungen der Gleichung n^{ten} Grades $v(x) = 0$, und zwar alle ihre Lösungen. Jede ganze Funktion n^{ten} Grades ist nach (15) ein Produkt von n linearen Funktionen mit einer Konstanten. Die Zerlegung (15) von $v(x)$ kann man aber nur dann wirklich ausführen, wenn man alle n Lösungen der Gleichung n^{ten} Grades $v(x) = 0$ berechnet hat.

Unter den n Lösungen $h_1, h_2, \ldots h_n$ der Gleichung n^{ten} Grades $v(x) = 0$ können übereinstimmende vorhanden sein. Wenn z. B. $h_1 = h_2 = \ldots = h_r$ ist, aber alle übrigen Lösungen $h_{r+1} \ldots h_n$ von h_1 verschieden sind, heißt h_1 eine r-fache Lösung. In diesem Fall läßt

sich von $v(x)$ der Faktor $(x - h_1)^r$ absondern. (Auf S. 604 hatten wir also angenommen, daß die dort mit h bezeichnete Lösung r-fach sei.)

Die Lösungen der Gleichung n^{ten} Grades $v(x) = 0$ brauchen nicht reell zu sein. Wir wollen annehmen, daß $x = p + iq$ eine komplexe Lösung sei, d. h. daß p und q reell seien, während $i = \sqrt{-1}$ ist. Da $v(x)$ die Form $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots$ hat, ist dann

$$a_n (p + i q)^n + a_{n-1} (p + iq)^{n-1} + \ldots = 0 .$$

Rechnet man die Potenzen aus, indem man dabei davon Gebrauch macht, daß $i^2 = -1$ ist, so bekommt man links reelle und mit i behaftete Glieder, also im ganzen einen Ausdruck von der Form $P + iQ$, wo P und Q reell sind. Da nun $P + iQ = 0$ sein muß, ist einzeln $P = 0$ und $Q = 0$. Mithin ist auch $P - i Q = 0$. Aber $P - i Q$ geht hervor, wenn man $x = p - iq$ in die Funktion $v(x)$ einsetzt. Also ist auch $p - iq$ eine Lösung der Gleichung $v(x) = 0$, d. h.: Wenn eine Gleichung n^{ten} Grades die komplexe Lösung $p + iq$ hat, kommt ihr auch die Lösung $p - iq$ zu. Man nennt Größenpaare von der Art $p + iq$ und $p - iq$ konjugiert komplexe Größen. Ihr Produkt ist reell, nämlich gleich $p^2 + q^2$.

Wenn nun $p + iq$ die mit h_1 bezeichnete Lösung und $p - iq$ die mit h_2 bezeichnete ist, hat $v(x)$ nach (15) die Form

$$\begin{aligned} v(x) &= a(x - p - iq)(x - p + iq)(x - h_3) \ldots (x - h_n) \\ &= a\,[(x - p)^2 + q^2](x - h_3) \ldots (x - h_n) . \end{aligned}$$

Sondern wir den reellen Faktor $(x - p)^2 + q^2$ ab, so können wir für das Übrige denselben Schluß machen. Falls also h_3 eine komplexe Größe ist, muß die konjugiert komplexe Größe unter $h_4 \ldots h_n$ enthalten sein, usw. Daraus folgt: Falls $p + iq$ eine gerade r-fache komplexe Lösung einer Gleichung n^{ten} Grades ist, kommt der Gleichung auch die konjugiert komplexe Größe $p - iq$ als ebenfalls gerade r-fache Lösung zu.

Zunächst werde angenommen, daß die Gleichung n^{ten} Grades $v(x) = 0$ lauter einfache Lösungen, d. h. n verschiedene Lösungen $h_1, h_2 \ldots h_n$ habe. Alsdann mag das allgemeine Integrationsverfahren, das auf S. 604 u. f. auseinandergesetzt wurde, damit begonnen werden, daß h_1 als die dort h genannte Lösung benutzt wird. Da der Faktor $x - h_1$ nur einmal in $v(x)$ steckt, ist die Zahl r der Formel (2) gleich Eins. Mit Rücksicht auf (15) kommt also:

$$\varphi(x) = a(x - h_2) \ldots (x - h_n),$$

so daß (5) gibt:

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{k_1}{x-h_1} + \frac{\psi(x)}{a(x-h_2)\ldots(x-h_n)}.$$

Hierin ist k_1 die in (3) mit k bezeichnete von Null verschiedene Konstante und $\psi(x)$ eine ganze Funktion vom höchstens $(n-2)^{\text{ten}}$ Grad, die keinen der Faktoren $x-h_2, \ldots x-h_n$ enthält. Man kann daher eine entsprechende Umformung mit dem letzten Glied dieser Gleichung vornehmen, wenn man unter h die Größe h_2 versteht. So kommt, indem k_2 eine von Null verschiedene Konstante und $\chi(x)$ eine ganze Funktion vom höchstens $(n-3)^{\text{ten}}$ Grad bedeutet:

$$\frac{\psi(x)}{a(x-h_2)\ldots(x-h_n)} = \frac{k_2}{x-h_2} + \frac{\chi(x)}{a(x-h_3)\ldots(x-h_n)},$$

d. h. nach Einsetzen dieses Wertes in die vorhergehende Formel:

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{k_1}{x-h_1} + \frac{k_2}{x-h_2} + \frac{\chi(x)}{a(x-h_3)\ldots(x-h_n)}.$$

Da man in derselben Weise fortfahren kann, ergibt sich schließlich: Falls die Gleichung n^{ten} Grades $v(x)=0$ lauter einfache Lösungen $h_1, h_2 \ldots h_n$ hat, ist die nicht zu kürzende gebrochene Funktion $u(x):v(x)$, deren Zähler von niedrigerem Grad als der Nenner sei, in der Form darstellbar:

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{k_1}{x-h_1} + \frac{k_2}{x-h_2} + \cdots + \frac{k_n}{x-h_n}, \tag{16}$$

wo $k_1, k_2 \ldots k_n$ von Null verschiedene Konstanten sind.

Man nennt dies die Partialbruchzerlegung der gebrochenen Funktion. Wirklich ausführen kann man die Zerlegung allerdings nur dann, wenn man alle Lösungen der Gleichung n^{ten} Grades $v(x)=0$ kennt. Die Konstanten $k_1, k_2 \ldots k_n$ lassen sich dann auf Grund der Formel (3) berechnen. Aber bequemer und leichter dem Gedächtnis einzuprägen ist folgende Art:

Multiplikation von (16) mit $x-h_1$ gibt, da $v(x)$ nach (15) das Produkt von a mit $(x-h_1)\ldots(x-h_n)$ ist:

$$\frac{u(x)}{a(x-h_2)\ldots(x-h_n)} = k_1 + (x-h_1)\left[\frac{k_2}{x-h_2} + \cdots + \frac{k_n}{x-h_n}\right],$$

wo im linken Nenner sowie in den Nennern, die in den eckigen Klammern enthalten sind, $x-h_1$ nicht vorkommt. Da nun, falls die Konstanten $k_1, k_2 \ldots k_n$ richtig nach (3) berechnet worden sind, die Gleichung für alle Werte von x gelten muß, besteht die Gleichung auch für $x=h_1$. Weil dann das letzte Glied wegen des Faktors $x-h_1$ gleich Null wird, kommt also:

$$\frac{u(h_1)}{a(h_1-h_2)\ldots(h_1-h_n)}=k_1\,.$$

ist k_1 berechnet. In entsprechender Weise findet man $k_2 \ldots k_n$.

Beispiel: Liegt das Integral

$$\int \frac{4x^2-x-15}{x^3-4x^2-x+4}\,dx$$

rkennt man leicht, daß $v(x)$ oder x^3-4x^2-x+4 für $x=1$ zu Null
'enn man $v(x)$ mit $x-1$ dividiert, geht x^2-3x-4 hervor, und dies
(2), S. 110, gleich Null für $x=4$ und $x=-1$. Demnach ist:

$$x^3-4x^2-x+4=(x-1)(x-4)(x+1)\,.$$

albruchzerlegung (16) muß daher so aussehen:

$$\frac{4x^2-x-15}{(x-1)(x-4)(x+1)}=\frac{k_1}{x-1}+\frac{k_2}{x-4}+\frac{k_3}{x+1}\,.$$

d noch die Werte der Konstanten k_1, k_2, k_3 zu ermitteln. Multiplikation
mit $x-1$ gibt:

$$\frac{4x^2-x-15}{(x-4)(x+1)}=k_1+(x-1)\left[\frac{k_2}{x-4}+\frac{k_3}{x+1}\right].$$

ıan nun insbesondere $x=1$ an, so kommt

$$\frac{-12}{-3\cdot 2}=k_1\,,\qquad \text{d. h.}\qquad k_1=2\,.$$

bt Multiplikation von (17) mit $x-4$:

$$\frac{4x^2-x-15}{(x-1)(x+1)}=k_2+(x-4)\left[\frac{k_1}{x-1}+\frac{k_3}{x+1}\right].$$

hme $x=4$ liefert also:

$$\frac{45}{3\cdot 5}=k_2\,,\qquad \text{d. h.}\qquad k_2=3\,.$$

h gibt Multiplikation von (17) mit $x+1$:

$$\frac{4x^2-x-15}{(x-1)(x-4)}=k_3+(x+1)\left[\frac{k_1}{x-1}+\frac{k_2}{x-4}\right],$$

Annahme $x=-1$ liefert:

$$\frac{-10}{2\cdot 5}=k_3\,,\qquad \text{d. h.}\qquad k_3=-1\,.$$

ıtet die Zerlegung (17) so:

$$\frac{4x^2-x-15}{x^3-4x^2-x+4}=\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-4}-\frac{1}{x+1}\,,$$

st:

$$\int\frac{4x^2-x-15}{x^3-4x^2-x+4}\,dx=2\ln(x-1)+3\ln(x-4)-\ln(x+1)+\text{konst.}$$

Falls die Gleichung n^{ten} Grades $v(x) = 0$ lauter einfache Lösungen hat, ergibt sich wie in diesem Beispiel allgemein durch Integration von (16):

$$(18) \qquad \int \frac{u(x)}{v(x)}\, dx =$$
$$k_1 \ln(x - h_1) + k_2 \ln(x - h_2) + \ldots + k_n (x - h_n) + \text{konst.}$$

Wenn aber $h_1, h_2 \ldots h_n$ nicht durchweg reell sind, ist diese Darstellung unbrauchbar, da dann Logarithmen mit komplexen Numeris auftreten. Nehmen wir z. B. an, daß h_1 komplex, also von der Form $p + iq$ sei. Nach dem oben Auseinandergesetzten ist dann eine andere Lösung der Gleichung $v(x) = 0$ die konjugiert komplexe Größe $p - iq$. Wir können sie als die Lösung h_2 benutzen. Wenn man nun nach dem auf S. 612 u. f. angegebenen Verfahren die zugehörigen Konstanten k_1 und k_2 berechnet, findet man, daß sich die Ergebnisse nur durch das Vorzeichen von i unterscheiden, d. h.: Auch für k_1 und k_2 gehen konjugiert komplexe Werte, etwa die Konstanten $\varkappa + i\lambda$ und $\varkappa - i\lambda$ hervor. Die beiden ersten Glieder rechts in (16) sind dann:

$$(19) \qquad \frac{\varkappa + i\lambda}{x - p - iq} + \frac{\varkappa - i\lambda}{x - p + iq}.$$

Bringt man sie auf einen Nenner, so wird ihre Summe reell:

$$\frac{2\varkappa(x - p) - 2\lambda q}{(x - p)^2 + q^2}.$$

Nach (16) ist also jetzt:

$$\int \frac{u(x)}{v(x)}\, dx = \int \frac{2\varkappa(x - p) - 2\lambda q}{(x - p)^2 + q^2}\, dx$$
$$+ k_3 \ln(x - h_3) + \cdots + k_n \ln(x - h_n) + \text{konst.}$$

Das noch auszuwertende Integral rechts ordnet sich dem unter (13) im 2. Beispiele berechneten Integral unter, da hier wie dort der Nenner des Integranden nur für komplexe Werte von x gleich Null wird. Indem man also wie auf S. 608 die neue Veränderliche

$$z = \frac{x - p}{q}$$

einführt, findet man:

$$\int \frac{2\varkappa(x - p) - 2\lambda q}{(x - p)^2 + q^2}\, dx = \varkappa \ln(z^2 + 1) - 2\lambda \operatorname{arc\,tg} z + \text{konst.}$$
$$= \varkappa \ln\left[(x - p)^2 + q^2\right] - 2\lambda \operatorname{arc\,tg} \frac{x - p}{q} + \text{konst.}$$

In dieser Weise kann man, indem man die auf konjugiert komplexe Lösungen von $v(x) = 0$ bezüglichen Glieder der Partialbruchzerlegung

(16) paarweise zusammenfaßt, das Ergebnis der Integration von allen imaginären Bestandteilen frei machen.

Bisher haben wir angenommen daß die Gleichung n^{ten} Grades $v(x) = 0$ lauter verschiedene Lösungen habe. Wenn dagegen eine r-fache Lösung h vorhanden ist, also etwa $h_1, h_2 \dots h_r$ sämtlich denselben Wert h haben, treten an die Stelle der r ersten Summanden in der Partialbruchzerlegung (16) andere. In diesem Fall ist nämlich

$$v(x) = a(x-h)^r (x - h_{r+1}) \dots (x - h_n),$$

also nach (2), S. 604, die Funktion $\varphi(x)$ gleich $a(x + h_{r+1}) \dots (x - h_n)$, so daß (5) gibt:

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{k}{(x-h)^r} + \frac{\psi(x)}{a(x-h)^{r-1}(x-h_{r+1})\dots(x-h_n)}.$$

Hier kann man den letzten Summanden entsprechend behandeln, denn sein Nenner stellt, gleich Null gesetzt, eine Gleichung $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades dar, die h als $(r-1)$-fache Lösung hat. Aber man muß bedenken, daß der Zähler $\psi(x)$, wie schon auf S. 605 bemerkt wurde, ebenfalls den Faktor $x - h$ einmal oder mehrere Male aufweisen könnte, so daß sich der Bruch mit ihm kürzen ließe. Nimmt man an, daß dann der Nenner $x - h$ nur noch in der s^{ten} Potenz statt in der $(r-1)^{\text{ten}}$ enthalte, so kann man die gebrochene Funktion in derselben Art wie $u(x) : v(x)$ umformen; nur tritt eine ganze Zahl $s < r$ an die Stelle von r. Demnach bekommt der letzte Summand die Gestalt:

$$\frac{\text{konst.}}{(x-h)^s} + \frac{\chi(x)}{a(x-h)^{s-1}(x-h_{r+1})\dots(x-h_n)}.$$

Wir erhalten daher

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{k}{(x-h)^r} + \frac{\text{konst.}}{(x-h)^s} + \frac{\chi(x)}{a(x-h)^{s-1}(x-h_{r+1})\dots(x-h_n)}.$$

Indem wir in derselben Weise weiterschließen, bis der Nenner des letzten Summanden gar keinen Faktor $x - h$ mehr aufweist, übersehen wir, daß sich schließlich als allgemeine Formel ergibt:

$$(20)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{k}{(x-h)^r} + \frac{\text{konst.}}{(x-h)^{r-1}} + \frac{\text{konst.}}{(x-h)^{r-2}} + \dots + \frac{\text{konst.}}{x-h} \\ + \frac{\omega(x)}{a(x-h_{r+1})\dots(x-h_r)}, \end{aligned} \right.$$

wo $\omega(x)$ eine ganze Funktion von niedrigerem Grad als der zugehörige Nenner ist und keinen der Nennerfaktoren $x - h_{r+1}$ bis $x - h_n$ enthält. Die Konstante k ist von Null verschieden, die übrigen Konstanten dagegen können auch den Wert Null haben. Der

letzte Summand in (20), dessen Nenner für $x = h_{r+1}, \ldots h_n$ gleich Null ist, wird weiterhin nach dem allgemeinen Verfahren umgeformt. Man sieht also:

Wenn unter den n Lösungen $h_1, h_2 \ldots h_n$ der Gleichung n^{ten} Grades $v(x) = 0$ eine r-fache vorkommt, also etwa $h_1, h_2 \ldots h_n$ sämtlich denselben Wert haben, dagegen $h_{r+1} \ldots h_n$ nicht, tritt in der Partialbruchzerlegung (16) an die Stelle der r Summanden

$$\frac{k_1}{x - h_1} + \frac{k_2}{x - h_2} + \ldots + \frac{k_r}{x - h_r}$$

eine Summe von der Form:

$$\frac{k}{(x-h)^r} + \frac{\text{konst.}}{(x-h)^{r-1}} + \ldots + \frac{\text{konst.}}{x-h}, \tag{21}$$

wo die Konstante k von Null verschieden ist. Das über die Summe (21) erstreckte Integral läßt sich ohne weiteres ausrechnen.

4. **Beispiel:** Der im 1. Beispiel vorkommende Integrand zerlegt sich so:

$$\frac{x^3 - 5x^2 + 13x + 1}{x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8} = \frac{5}{(x-2)^3} + \frac{\frac{1}{3}}{x-2} + \frac{\frac{2}{3}}{x+1}$$

Die Gleichung $x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8 = 0$ hat nämlich die dreifache Lösung $x = 2$ und die einfache Lösung $x = -1$.

Die betrachtete r-fache Lösung $x = h$ von $v(x) = 0$ kann nun die komplexe Form $p + iq$ haben. Nach dem oben Gesagten ist dann auch die konjugiert komplexe Zahl $p - iq$ eine r-fache Lösung. In der Partialbruchzerlegung (16) von $u(x) : v(x)$ treten also jetzt nach (21) an die Stelle von $2r$ Summanden Glieder von der Form:

$$\begin{aligned} &\frac{k}{(x-p-iq)^r} + \frac{\text{konst.}}{(x-p-iq)^{r-1}} + \ldots + \frac{\text{konst.}}{x-p-iq} \\ +\, &\frac{l}{(x-p+iq)^r} + \frac{\text{konst.}}{(x-p+iq)^{r-1}} + \ldots + \frac{\text{konst.}}{x-p+iq}, \end{aligned}$$

und für die konstanten Zähler in der ersten Zeile ergeben sich komplexe Werte, aus denen die entsprechenden konstanten Zähler in der zweiten Zeile hervorgehen, wenn man i durch $-i$ ersetzt, so daß wieder entsprechende Zähler konjugiert komplexe Zahlen sind. Daß infolgedessen die beiden rechts zuletzt stehenden Summanden zusammen einen reellen Bruch liefern, dessen Integration ausgeführt werden kann, wurde oben durch die Betrachtung der Summe (19) gezeigt. Deshalb ist schließlich nur noch zu zeigen, wie zwei Summanden zu behandeln sind, in deren Nennern nicht die erste, sondern eine höhere Potenz vorkommt. Dabei genügt es, die beiden ersten

Summanden zu nehmen, wo $k = \varkappa + i\lambda$ und $l = \varkappa - i\lambda$ sei. Sie lauten so:

$$\frac{\varkappa + i\lambda}{(x - p - iq)^r} + \frac{\varkappa - i\lambda}{(x - p + iq)^r}.$$

Ihre Integration trägt zum Werte des Integrals

$$\int \frac{u(x)}{v(x)}\, dx$$

die Summanden bei:

$$-\frac{\varkappa + i\lambda}{r-1}\,\frac{1}{(x - p - iq)^{r-1}} - \frac{\varkappa - i\lambda}{r-1}\,\frac{1}{(x - p + iq)^{r-1}}.$$

Sie sind zwar einzeln nicht reell, aber ihre Summe ist reell, denn wenn man sie auf einen Nenner bringt, kommt:

$$-\frac{1}{r-1}\,\frac{(\varkappa + i\lambda)(x - p + iq)^{r-1} + (\varkappa - i\lambda)(x - p - iq)^{r-1}}{[(x-p)^2 + q^2]^{r-1}}.$$

Hier ist der Nenner reell, und beim Ausrechnen der Potenzen im Zähler heben sich alle mit i behafteten Glieder fort, weil der zweite Summand im Zähler aus dem ersten entsteht, wenn man i durch $-i$ ersetzt. Mithin bekommt man schließlich stets ein reelles Ergebnis.

5. Beispiel: Liegt das Integral

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

vor, so ist $v(x) = (x^2+1)^2 = (x-i)^2(x+i)^2$, d. h. die Gleichung 4. Grades $v(x) = 0$ hat die Doppellösungen $x = i$ und $x = -i$. Die Doppellösung i liefert nach (21) für die Partialbruchzerlegung zwei Glieder von der Form

$$\frac{k}{(x-i)^2} + \frac{\text{konst.}}{x-i},$$

die Doppellösung $-i$ zwei Glieder von der Form

$$\frac{l}{(x+i)^2} + \frac{\text{konst.}}{x+i}.$$

Dabei sind k und l konstant. Die Partialbruchzerlegung des Integranden muß also so aussehen:

$$\frac{1}{(x-i)^2(x+i)^2} = \frac{k}{(x-i)^2} + \frac{l}{(x+i)^2} + \frac{\text{konst.}}{x-i} + \frac{\text{konst.}}{x+i}. \tag{22}$$

Um k zu berechnen, multipliziert man mit $(x-i)^2$ und setzt dann $x = i$, wodurch $-\frac{1}{4} = k$ hervorgeht. Entsprechend ergibt sich $l = -\frac{1}{4}$. Nach (22) ist deshalb

$$\frac{\text{konst.}}{x-i} + \frac{\text{konst.}}{x+i} = \frac{1}{(x-i)^2(x+i)^2} + \frac{1}{4(x-i)^2} + \frac{1}{4(x+i)^2}.$$

Bringt man die Brüche rechts auf einen Nenner, wobei sich $x - i$ und $x + i$ einmal forthebt, so kommt:

$$\frac{\text{konst.}}{x-i} + \frac{\text{konst.}}{x+i} = \frac{1}{2(x-i)(x+i)} = \frac{1}{2(x^2+1)}.$$

Mithin haben wir als Gleichung (22):

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x-i)^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x+i)^2} + \frac{1}{2(x^2+1)}.$$

Die Integration liefert zunächst:

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-i} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+i} + \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + \text{konst.}$$

Die beiden ersten Summanden rechts verlieren das Imaginäre, wenn wir sie zu einem Bruch vereinigen. So kommt schließlich:

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + \text{konst.}$$

Das Vorhergehende lehrt: **Man vermag eine gebrochene Funktion zu integrieren, sobald man sämtliche Werte der Veränderlichen auffinden kann, für die der Nenner der Funktion gleich Null ist.**

6. Beispiel: Bei einer **chemischen Reaktion** mögen sich von zwei Stoffen, die A und B Gramm betragen, je a Gramm des einen mit b Gramm des andern verbinden. In t Sekunden seien x Gramm der Verbindung entstanden, wozu offenbar $ax:(a+b)$ und $bx:(a+b)$ Gramm der einzelnen Stoffe verbraucht werden, so daß zur Zeit t noch

$$A - \frac{ax}{a+b} \quad \text{und} \quad B - \frac{bx}{a+b}$$

Gramm von beiden Stoffen vorhanden sind. Geschieht die Reaktion so, daß beide Stoffe in völlige Berührung miteinander kommen, ohne beachtliche Wärme zu entwickeln, so dürfen wir annehmen: Diejenige Stoffmenge dx der Verbindung, die sich im Zeitteilchen dt bildet, ist proportional zur Zeit dt und zu den beiden Stoffmengen (vgl. 7. Beispiel, S. 293), also:

$$dx = c\left(A - \frac{ax}{a+b}\right)\left(B - \frac{bx}{a+b}\right)dt,$$

wo c eine dem chemischen Vorgang eigentümliche Konstante ist. Man nennt die Größe

$$\frac{dx}{dt} = c\left(A - \frac{ax}{a+b}\right)\left(B - \frac{bx}{a+b}\right)$$

die **Reaktionsgeschwindigkeit**. Da sich die Formel auch so schreiben läßt:

$$\frac{dx}{\left[x - \frac{A(a+b)}{a}\right]\left[x - \frac{B(a+b)}{b}\right]} = \frac{abc}{(a+b)^2}\,dt,$$

gilt für die Zeitspanne von t_0 bis t_1 die Formel:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\left[x - \frac{A(a+b)}{a}\right]\left[x - \frac{B(a+b)}{b}\right]} = \frac{abc}{(a+b)^2}(t_1 - t_0),$$

wenn x_0 und x_1 die zu den Zeiten t_0 und t_1 vorhandenen Mengen der Verbindung in Grammen bedeuten. Der Nenner des Integranden wird gleich Null für die Werte von x:

$$h_1 = \frac{A(a+b)}{a}, \qquad h_2 = \frac{B(a+b)}{b}.$$

Nach (16) gilt daher eine Formel:

$$\frac{1}{\left[x - \frac{A(a+b)}{a}\right]\left[x - \frac{B(a+b)}{b}\right]} = \frac{k_1}{x - \frac{A(a+b)}{a}} + \frac{k_2}{x - \frac{B(a+b)}{b}},$$

wo k_1 und k_2 Konstanten sind. Man findet

$$k_1 = \frac{ab}{(a+b)(Ab - Ba)}, \qquad k_2 = \frac{-ab}{(a+b)(Ab - Ba)},$$

so daß das unbestimmte Integral gleich

$$\frac{ab}{(a+b)(Ab - Ba)} \ln \frac{ax - A(a+b)}{bx - B(a+b)} + \text{konst.}$$

ist. Demnach ergibt sich:

$$\frac{ab}{(a+b)(Ab - Ba)} \ln \left[\frac{ax_1 - A(a+b)}{bx_1 - B(a+b)} : \frac{ax_0 - A(a+b)}{bx_0 - B(a+b)}\right] = \frac{abc}{(a+b)^2}(t_1 - t_0).$$

Man kann die über die Reaktionsgeschwindigkeit gemachten Annahmen durch Versuche prüfen, denn der aus dem Vorhergehenden folgende Wert

$$c = \frac{a+b}{Ab - Ba} \cdot \frac{1}{t_1 - t_0} \ln \left[\frac{ax_1 - A(a+b)}{bx_1 - B(a+b)} : \frac{ax_0 - A(a+b)}{bx_0 - B(a+b)}\right]$$

muß konstant sein, welche Zeitspanne $t_1 - t_0$ man auch wählen mag. Die Mengen x_0 und x_1 sind zu den Zeiten t_0 und t_1 zu messen.

Manche Integrale lassen sich rationalisieren, d. h. durch Einführung geeigneter neuer Veränderlicher auf Integrale von ganzen oder gebrochenen Funktionen zurückführen. Wir geben einige Klassen von solchen Integralen an:

Enthält der Integrand außer ganzzahligen Potenzen von x noch Wurzeln von x, so führt man als neue Veränderliche eine solche gebrochene Potenz von x ein, von der alle vorkommenden Wurzeln ganzzahlige Potenzen sind. Kommt z. B. die Quadratwurzel und die dritte Wurzel von x vor, so setzt man die $(2.3)^{\text{te}}$ oder 6^{te} Wurzel von x gleich einer neuen Veränderlichen z.

7. Beispiel:

$$\int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx = 6\int (z^3 + z^6)\,dz = \tfrac{3}{2} z^4 + \tfrac{6}{7} z^7 = \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{x}^2 + \tfrac{6}{7} x \sqrt[6]{x}\,.$$

Enthält der Integrand die Veränderliche x nur in der Funktion e^{cx}, so setzt man $e^{cx} = z$. Dann kommt:

$$\int f(e^{cx})\,dx = \int \frac{f(z)}{cz}\,dz\,.$$

8. Beispiel:

$$\int \frac{dx}{e^{cx} + e^{-cx}} = \frac{1}{c}\int \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{c}\operatorname{arc\,tg} z = \frac{1}{c}\operatorname{arc\,tg} e^{cx}.$$

Ist der Integrand eine Funktion von $\operatorname{tg} x$ allein, so setzt man $\operatorname{tg} x = z$:

$$\int f(\operatorname{tg} x)\,dx = \int \frac{f(z)}{1+z^2}\,dz.$$

9. Beispiel:

$$\int \operatorname{tg}^3 x\,dx = \int \frac{z^3}{1+z^2}\,dz = \int \frac{z^3 + z - z}{1+z^2}\,dz = \int \left(z - \frac{z}{1+z^2}\right)dz$$

$$= \tfrac{1}{2} z^2 - \tfrac{1}{2}\ln(1+z^2) = \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln\cos x.$$

Entsprechendes gilt für Integrale von der Form $\int f(\operatorname{ctg} x)\,dx$, wo man $\operatorname{ctg} x = z$ setzt. Dagegen würden Integrale von der Form $\int f(\sin x)\,dx$ und $\int f(\cos x)\,dx$ durch Einführung von $\sin x = z$ oder $\cos x = z$ mit einer Quadratwurzel behaftet werden. Denn wenn z. B. $z = \sin x$ ist, wird $dx = dz : \sqrt{1-z^2}$.

Man kann aber, wenn der Integrand nur die goniometrischen Funktionen von x enthält, die Substitution

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x = z \tag{23}$$

machen, um das Integral zu rationalisieren. Denn dann ist nach Satz 17, S. 412.

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2z}{1-z^2}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1-z^2}{2z} \tag{24}$$

und außerdem:

$$dx = \frac{2\,dz}{1+z^2}, \tag{25}$$

so daß keine Quadratwurzeln auftreten.

10. Beispiel: Wenn a und b konstant sind, ist:

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b(1+\cos x)} = \int \frac{dz}{az+b} = \frac{1}{a}\ln(az+b) = \frac{1}{a}\ln(a\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x + b).$$

Häufig kommt das Integral

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

vor, das ebenfalls rationalisiert werden kann. Zunächst ist

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Setzen wir $x + (b:2a) = z$, so kommt

$$J = \int \frac{dz}{\sqrt{az^2 + k}},$$

wenn die Konstante $(4ac - b^2):4a$ mit k bezeichnet wird. Um die Quadratwurzel zu entfernen, führen wir die neue Veränderliche

$$t = \frac{z}{\sqrt{az^2 + k}}$$

ein. Dann wird:

$$z = t\sqrt{\frac{k}{1 - at^2}}, \qquad dz = \sqrt{\frac{k}{(1 - at^2)^3}}\, dt\,,$$

so daß kommt:

$$J = \int \frac{dt}{1 - at^2}.$$

Dies Integral ist nach dem 2. Beispiele zu behandeln. So findet man:

$$(26)\quad \begin{cases} J = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \ln \frac{2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}}{2ax + b - 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{für } a > 0, \\ J = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{bx + c}} = \frac{2}{b}\sqrt{bx + c}\,, \\ J = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2ax + b}{2\sqrt{-a}\sqrt{ax^2 + bx + c}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{für } a < 0\,, \end{cases}$$

Auf das Integral J lassen sich alle Integrale von der Form

$$\int \frac{x^n}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx \qquad \text{und} \qquad \int x^n \sqrt{ax^2 + bx + c}\, dx\,,$$

in denen n eine ganze positive Zahl bedeutet, zurückführen. Die dazu nötigen Reduktionsformeln gewinnt man so: Zur Abkürzung sei

$$R = ax^2 + bx + c$$

gesetzt. Dann ist nach der Produktregel

$$\frac{d\,x^{n-1}\sqrt{R}}{d\,x} = (n-1)\,x^{n-2}\sqrt{R} + \frac{x^{n-1}(2\,a\,x+b)}{2\sqrt{R}}$$
$$= \frac{(n-1)\,x^{n-2}\,R}{\sqrt{R}} + \frac{x^{n-1}(a\,x+\frac{1}{2}\,b)}{\sqrt{R}}\,.$$

Mithin ergibt sich, wenn man rechts im ersten Zähler für R den Wert ax^2+bx+c einsetzt:

$$\frac{d\,x^{n-1}\sqrt{R}}{d\,x} = n\,a\,\frac{x^n}{\sqrt{R}} + (n-\tfrac{1}{2})\,b\,\frac{x^{n-1}}{\sqrt{R}} + (n-1)\,c\,\frac{x^{n-2}}{\sqrt{R}}\,.$$

Hieraus folgt durch Integration:

$$x^{n-1}\sqrt{R} = n\,a\int\frac{x^n}{\sqrt{R}}\,d\,x + (n-\tfrac{1}{2})\,b\int\frac{x^{n-1}}{\sqrt{R}}\,d\,x + (n-1)\,c\int\frac{x^{n-2}}{\sqrt{R}}\,d\,x\,,$$

mithin:

$$(27)\quad \int\frac{x^n}{\sqrt{R}}\,d\,x = \frac{1}{n\,a}\,x^{n-1}\sqrt{R} - \frac{2n-1}{2n}\,\frac{b}{a}\int\frac{x^{n-1}}{\sqrt{R}}\,d\,x - \frac{n-1}{n}\,\frac{c}{a}\int\frac{x^{n-2}}{\sqrt{R}}\,d\,x\,.$$

Setzt man nun nacheinander $n=1, 2, 3\ldots$, so ergibt sich:

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned}
\int\frac{x}{\sqrt{R}}\,d\,x &= \frac{1}{a}\sqrt{R} - \tfrac{1}{2}\,\frac{b}{a}\int\frac{d\,x}{\sqrt{R}}\,,\\
\int\frac{x^2}{\sqrt{R}}\,d\,x &= \frac{1}{2a}\,x\sqrt{R} - \tfrac{3}{4}\,\frac{b}{a}\int\frac{x}{\sqrt{R}}\,d\,x - \tfrac{1}{2}\,\frac{c}{a}\int\frac{d\,x}{\sqrt{R}}\,,\\
\int\frac{x^3}{\sqrt{R}}\,d\,x &= \frac{1}{3a}\,x^2\sqrt{R} - \tfrac{5}{6}\,\frac{b}{a}\int\frac{x^2}{\sqrt{R}}\,d\,x - \tfrac{2}{3}\,\frac{c}{a}\int\frac{x}{\sqrt{R}}\,d\,x
\end{aligned}\right.$$

usw., so daß man alle diese Integrale wegen (26) berechnen kann.

Die Integrale von der Form $\int x^n\sqrt{R}\,d\,x$ lassen sich, weil $\sqrt{R}$ gleich $R:\sqrt{R}$ ist, auf die soeben betrachteten zurückführen, denn es ist:

$$(29)\quad \int x^n\sqrt{R}\,d\,x = a\int\frac{x^{n+2}}{\sqrt{R}}\,d\,x + b\int\frac{x^{n+1}}{\sqrt{R}}\,d\,x + c\int\frac{x^n}{\sqrt{R}}\,d\,x\,.$$

Um die Integrale

$$\int\frac{x^n}{\sqrt{R}}\,d\,x$$

auch für negative ganze Zahlen n zu berechnen, ersetzt man in (27) die Zahl $n-2$ durch $-m$, also n durch $2-m$ und bringt das Integral links auf die rechte Seite, dagegen das letzte Integral rechts auf die linke Seite. Dann kommt:

$$(30)\quad \int\frac{dx}{x^m\sqrt{R}} = -\frac{1}{m-1}\,\frac{1}{c}\,\frac{\sqrt{R}}{x^{m-1}} - \frac{m-2}{m-1}\,\frac{a}{c}\int\frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{R}} - \frac{2m-3}{2m-2}\,\frac{b}{c}\int\frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{R}}.$$

Wenn man nun hierin nacheinander $m = 2, 3 \ldots$ setzt, ergibt sich:

$$(31)\quad \begin{cases} \displaystyle\int\frac{dx}{x^2\sqrt{R}} = -\frac{1}{c}\,\frac{\sqrt{R}}{x} - \frac{1}{2}\,\frac{b}{c}\int\frac{dx}{x\sqrt{R}}, \\ \displaystyle\int\frac{dx}{x^3\sqrt{R}} = -\frac{1}{2c}\,\frac{\sqrt{R}}{x^2} - \frac{1}{2}\,\frac{a}{c}\int\frac{dx}{x\sqrt{R}} - \frac{3}{4}\,\frac{b}{c}\int\frac{dx}{x^2\sqrt{R}} \end{cases}$$

usw. Daher lassen sich die Integrale von der Form

$$\int\frac{dx}{x^m\sqrt{R}},$$

wo m eine positive ganze Zahl ist, nacheinander berechnen, sobald das Integral

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{R}}$$

ausgewertet ist. Dies aber geschieht so: Man setzt $x = 1:z$ und erhält:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{R}} = -\int\frac{dz}{\sqrt{a+bz+cz^2}},$$

so daß dies Integral auf eines von der Form (26) zurückkommt. Zu beachten ist dabei, daß jetzt a mit c vertauscht ist. Somit hat man:

$$(32)\quad \begin{cases} \displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{R}} = \frac{-1}{2\sqrt{c}}\ln\frac{2c+bx+2\sqrt{c}\sqrt{ax^2+bx+c}}{2c+bx-2\sqrt{c}\sqrt{ax^2+bx+c}} & \text{für } c > 0, \\ \displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{R}} = -\frac{2}{bx}\sqrt{ax^2+bx} & \text{für } c = 0, \\ \displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{R}} = \frac{1}{\sqrt{-c}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2c+bx}{2\sqrt{-c}\sqrt{ax^2+bx+c}} & \text{für } c < 0. \end{cases}$$

Um endlich die Integrale von der Form

$$\int\frac{\sqrt{R}}{x^m}\,dx$$

zu berechnen, macht man wieder von der Umformung $\sqrt{R} = R:\sqrt{R}$ Gebrauch, aus der sich ergibt:

$$\int\frac{\sqrt{R}}{x^m}\,dx = a\int\frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{R}} + b\int\frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{R}} + c\int\frac{dx}{x^m\sqrt{R}}.$$

Hierdurch wird das Integral auf die schon berechneten Integrale zurückgeführt.

11. Beispiel: Die Parabel $y = kx^2$ soll von $x = 0$ bis zu irgendeiner positiven Abszisse x rektifiziert, d. h. es soll ihre Bogenlänge s berechnet werden. Nach Satz 15, S. 361, ist

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + 4k^2 x^2}\, dx$$

mit positiver Wurzel. Dies Integral ordnet sich der Form $\int x^n \sqrt{R}\, dx$ für $n = 0$, $a = 4k^2$, $b = 0$, $c = 1$ unter, so daß man nach (29) erhält:

$$s = 4k^2 \int_0^x \frac{x^2}{\sqrt{1 + 4k^2 x^2}}\, dx + \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 + 4k^2 x^2}}.$$

Nach der zweiten Formel (28) ist das unbestimmte Integral:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1 + 4k^2 x^2}}\, dx = \frac{1}{8k^2}\, x \sqrt{1 + 4k^2 x^2} - \frac{1}{8k^2} \int \frac{dx}{\sqrt{1 + 4k^2 x^2}} + \text{konst.},$$

somit kommt zunächst:

$$s = \tfrac{1}{2} x \sqrt{1 + 4k^2 x^2} + \tfrac{1}{2} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 + 4k^2 x^2}}. \tag{33}$$

Nach der ersten Formel (26) ist ferner das unbestimmte Integral:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + 4k^2 x^2}} = \frac{1}{4k} \ln \frac{2kx + \sqrt{1 + 4k^2 x^2}}{2kx - \sqrt{1 + 4k^2 x^2}} + \text{konst.}$$

Wir haben dabei $\sqrt{a} = \sqrt{4k^2} = 2k$ und nicht gleich $-2k$ gewählt. Hätten wir $-2k$ genommen, so wäre auch im Numerus des Logarithmus der Zähler mit dem Nenner zu vertauschen, d. h. es hätte sich dasselbe ergeben. Nun tritt aber noch eine zunächst störende Erscheinung ein: Das bestimmte Integral von 0 bis x bekommt den Wert:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 + 4k^2 x^2}} = \frac{1}{4k} \left[\ln \frac{2kx + \sqrt{1 + 4k^2 x^2}}{2kx - \sqrt{1 + 4k^2 x^2}} - \ln(-1) \right],$$

wo $\ln(-1)$ nicht erklärt ist. Wir entfernen dies Glied dadurch, daß wir die Differenz der Logarithmen in den Logarithmus eines Bruches verwandeln:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 + 4k^2 x^2}} = \frac{1}{4k} \ln \frac{\sqrt{1 + 4k^2 x^2} + 2kx}{\sqrt{1 + 4k^2 x^2} - 2kx}.$$

Durch Erweitern des Numerus mit $\sqrt{1 + 4k^2 x^2} + 2kx$ läßt sich dies weiter umformen. Dann kommt:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 + 4k^2 x^2}} = \frac{1}{2k} \ln\left(\sqrt{1 + 4k^2 x^2} + 2kx\right).$$

Nach (33) ist also die Bogenlänge der Parabel:

$$s = \tfrac{1}{2} x \sqrt{1 + 4k^2 x^2} + \frac{1}{4k} \ln\left(\sqrt{1 + 4k^2 x^2} + 2kx\right).$$

12. Beispiel: Für die Bogenlänge der Archimedischen Spirale $r = c\varphi$, vgl. das Beispiel auf S. 347, ergibt (8) auf S. 593:

$$s = c \int_0^\varphi \sqrt{1 + \varphi^2}\, d\varphi,$$

wenn die Bogenlänge von der Amplitude $\varphi = 0$ an gerechnet wird. Man ersetzt $\sqrt{1 + \varphi^2}$ durch $(1 + \varphi^2) : \sqrt{1 + \varphi^2}$ und bekommt:

$$s = c \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \varphi^2}} + c \int_0^\varphi \frac{\varphi^2}{\sqrt{1 + \varphi^2}}\, d\varphi.$$

Die zweite Formel (28) gibt, wenn darin $x = \varphi$, $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$ gesetzt wird:

$$\int \frac{\varphi^2}{\sqrt{1 + \varphi^2}}\, d\varphi = \tfrac{1}{2} \varphi \sqrt{1 + \varphi^2} - \tfrac{1}{2} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \varphi^2}} + \text{konst.}$$

Folglich ist nach der ersten Formel (26):

$$s = \tfrac{1}{2} c \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \varphi^2}} + \tfrac{1}{2} c \varphi \sqrt{1 + \varphi^2} = \tfrac{1}{2} c \ln\left(\varphi + \sqrt{1 + \varphi^2}\right) + \tfrac{1}{2} c \varphi \sqrt{1 + \varphi^2}.$$

Hierbei ist die Amplitude φ im Bogenmaß zu messen.

In Tafel VII des Anhanges sind die wichtigeren Integralformeln zusammengestellt. Man möge ja nicht versuchen, diese Formeln auswendig zu lernen!

§ 4. **Die Fouriersche Reihe.**

Hier ist die geeignete Stelle, auf die periodischen Funktionen zurückzukommen. Welche Wichtigkeit periodische Vorgänge haben, wurde auf S. 417 u. f. angedeutet. In § 3 des achten Kapitels beschäftigten wir uns in der Hauptsache mit den einfachsten periodischen Funktionen, den Sinusfunktionen $A \sin(Bx + C)$, die wir geometrisch durch die Sinuswellen darstellten und deren Zusammenhang mit den einfachen Schwingungen wir erörterten. Nun besteht ein Satz, der diesen einfachsten periodischen Funktionen eine viel größere Wichtigkeit beilegt: Beliebige periodische Kurven lassen sich durch Aufeinanderlagerung von lauter derartigen Sinuswellen erzeugen. Allerdings gilt dies nur unter gewissen Voraussetzungen über die Stetigkeit und die Unstetigkeitsstellen der Kurven.

Die Betrachtungen, mittels derer man diesen Satz beweist, wollen

wir jedoch nur so weit verfolgen, daß der Leser einen Begriff von der Sache und von der *einen* eigentümlichen Schwierigkeit bekommt, die im Beweise liegt. Wer will, kann diesen Paragraphen auch überschlagen.

Angenommen, irgendeine periodische Kurve liege vor wie in Fig. 294 auf S. 418, wo die Periode gleich a ist. Dann kann man die Einheit der Abszissen anders und zwar so wählen, daß der Zahlenwert der Periode gerade gleich 2π wird. Nimmt man nämlich die neue Abszisseneinheit so an, daß sie sich zur alten verhält wie a zu 2π, so verhalten sich die Maßzahlen, ausgedrückt in der neuen Einheit, zu den alten Maßzahlen wie 2π zu a; mithin bekommt der Endpunkt $x = a$ der ersten Periode in der neuen Abszisseneinheit die Abszisse 2π. *Durch geeignete Wahl der Abszisseneinheit kann man demnach immer erreichen, daß die Periode einer vorgelegten periodischen Kurve gerade gleich 2π wird.*

Die Periode 2π ist deshalb am bequemsten, weil $\sin x$ und $\cos x$ nach Satz 2, S. 384, die Periode 2π haben. Zwar haben $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{ctg} x$ die noch kürzere Periode π; aber sie sind nicht überall stetig, und außerdem bezieht sich der Satz, auf den wir hinauskommen wollen, auf die Sinusfunktionen.

Da $\sin x$ und $\cos x$ die *wesentliche* Periode 2π haben, kommt $\sin 2x$ und $\cos 2x$ nach Satz 21, S. 421, die wesentliche Periode π zu, ferner $\sin 3x$ und $\cos 3x$ die wesentliche Periode $\frac{2}{3}\pi$, allgemein $\sin nx$ und $\cos nx$ die wesentliche Periode $2\pi : n$. Da jedes ganzzahlige Vielfache einer Periode ebenfalls eine Periode ist, haben also die überall stetigen Funktionen

$$\begin{array}{lllll} \sin x, & \sin 2x, & \sin 3x, \ldots & \sin nx, \ldots \\ \cos x, & \cos 2x, & \cos 3x, \ldots & \cos nx, \ldots \end{array}$$

samt und sonders die Periode 2π, wenn dies auch nur für die beiden ersten Funktionen die wesentliche Periode ist. Hier liegen nun unbegrenzt viele Funktionen vor. Deshalb ist es nicht allzu kühn, die Frage aufzuwerfen, *ob man nicht jede vorgelegte überall stetige Funktion $f(x)$, der dieselbe Periode 2π zukommt, als eine unendliche Reihe*

$$\begin{aligned} f(x) = a + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \ldots \\ + c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + c_3 \cos 3x + \ldots \end{aligned}$$

darstellen kann, worin $a, b_1, c_1, b_2, c_2, b_3, c_3 \ldots$ geeignet zu wählende Konstanten bedeuten sollen. Da $f(x)$ nach Voraussetzung die Periode 2π hat, die auch allen rechts stehenden Funktionen zukommt, genügt

es, die aufgeworfene Frage nur für die Werte von x im Intervalle von $x=0$ bis $x=2\pi$ zu beantworten.

Die Untersuchung der Erscheinungen bei einer schwingenden Saite führte in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts mehrere Mathematiker, zunächst den Schweizer Daniel Bernoulli (1700—1782) und dann namentlich Euler (S. 88) zu Reihen wie die obenstehende, die man eine trigonometrische Reihe nennt. Später benutzte der französische Mathematiker Fourier (1768—1830) in der Wärmetheorie trigonometrische Reihen. Er nahm an, daß man eine beliebig von $x=0$ bis $x=2\pi$ gezogene Bildkurve immer durch eine derartige Reihe wiedergeben könne, und zeigte, welche Werte die Koeffizienten a, b_1, c_1, b_2, c_2, b_3 $c_3 \ldots$ der Reihe haben müssen, wenn die Vermutung richtig ist. Deshalb nennt man diejenige trigonometrische Reihe, deren Koeffizienten wir nachher ermitteln werden, die Fouriersche Reihe. Einen einwandfreien Beweis für ihre Richtigkeit hat erst der deutsche Mathematiker Dirichlet (1805—1859) gegeben.

Nach diesen geschichtlichen Vorbemerkungen erinnern wir daran, daß man mit unendlichen Reihen nicht ohne weiteres wie mit abgeschlossenen mathematischen Ausdrücken rechnen darf (vgl. S. 314 u. f.). Deshalb brechen wir die oben angegebene Reihenentwicklung nach ihren mit $\sin nx$ und $\cos nx$ behafteten Gliedern ab. Wir betrachten also zunächst eine Funktion von der abgeschlossenen Form:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(x) = a &+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_n \sin nx \\ &+ c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + \ldots + c_n \cos nx. \end{aligned}\right.$$

Diese Funktion $\varphi(x)$ ist überall stetig und hat die Periode 2π. Wir suchen nun die Konstanten $a, b_1, c_1, b_2, c_2, \ldots b_n, c_n$ so zu bestimmen, daß die Funktion $\varphi(x)$ im Intervalle von $x=0$ bis $x=2\pi$ einer vorgelegten stetigen periodischen Funktion $f(x)$ mit derselben Periode 2π möglichst nahe kommt, und nennen dann $\varphi(x)$ eine Ersatzfunktion von $f(x)$.

Der an irgendeiner Stelle x im Intervalle bei der Benutzung von $\varphi(x)$ statt $f(x)$ begangene Fehler ist die Differenz

$$(2)\qquad R = f(x) - \varphi(x).$$

Wesentlich ist nur der absolute Betrag des Fehlers R. Deshalb betrachten wir nicht den Fehler R selbst, sondern sein stets positives Quadrat R^2. Wir wollen nun die Koeffizienten von $\varphi(x)$ so zu bestimmen versuchen, daß das sogenannte mittlere Fehlerquadrat, d. h. das arithmetische Mittel aller Fehlerquadrate im ganzen Intervalle von $x=0$ bis $x=2\pi$, so klein wie möglich wird. Dies selbstverständlich positive

arithmetische Mittel hat nach Satz 8, S. 244, den Wert

$$M = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R^2 dx\,.$$

Wir schließen so: Angenommen, die Koeffizienten $a, b_1, c_1, \ldots b_n, c_n$ haben schon die gesuchten richtigen Werte. Da M ein Minimum sein soll, muß dann jede beliebig kleine positive oder negative Änderung irgendeines Koeffizienten von $\varphi(x)$ stets eine positive Zunahme von M nach sich ziehen. Wenn wir zunächst nur den ersten Koeffizienten a in $\varphi(x)$ um eine nach Null strebende Größe ε wachsen lassen, erfährt $\varphi(x)$ die Zunahme ε, also R nach (2) die Zunahme $dR = -\varepsilon$. Der zugehörige Zuwachs von R^2 kann mittels der Formel

(3) $$\frac{d(R^2)}{dR} = 2R \quad \text{oder} \quad d(R^2) = 2\,R\,dR$$

berechnet werden. Danach beträgt er $-2\varepsilon R$. Mithin geht M bei der Änderung von a um ε über in

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(R^2 - 2\,\varepsilon\,R)\,dx\,.$$

Die Differenz zwischen diesem Wert und dem alten Wert ist:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} -2\,\varepsilon\,R\,dx \quad \text{oder} \quad -\frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^{2\pi} R\,dx\,,$$

denn -2ε kann vor das Integralzeichen gesetzt werden. Wir haben zu verlangen, daß dieser Zuwachs von M stets positiv sei. Wäre nun das über Rdx von 0 bis 2π erstreckte Integral von Null verschieden, so brauchte man nur ε mit demselben Vorzeichen wie den Wert dieses Integrals zu wählen, um zu erreichen, daß der Zuwachs von M negativ würde, was nicht sein darf. Also folgern wir: Das Integral muß gleich Null sein:

(4) $$\int_0^{2\pi} R\,dx = 0\,.$$

Soeben nahmen wir an, daß der erste Koeffizient a um ε wachse. Wir lassen nun irgendeinen anderen Koeffizienten von $\varphi(x)$, etwa den Koeffizienten b_r von $\sin rx$ oder den Koeffizienten c_r von $\cos rx$ um ε zunehmen, wo r eine der Zahlen $1, 2, \ldots n$ bedeuten soll. Dann erfährt $\varphi(x)$ nach (1) die Zunahme $\varepsilon \sin rx$ oder $\varepsilon \cos rx$, also R nach

(2) die Zunahme $-\varepsilon \sin r x$ oder $-\varepsilon \cos r x$, d. h. R^2 nach (3) die Zunahme $-2\varepsilon R \sin r x$ oder $-2\varepsilon R \cos r x$. Eine entsprechende Schlußfolgerung wie vorhin zeigt daher, daß man auch fordern muß:

(5) $$\int_0^{2\pi} R \sin r x\, d x = 0, \quad \int_0^{2\pi} R \cos r x\, d x = 0$$

$$(r = 1, 2, \ldots n).$$

Wir werden nun sehen, daß die $2n+1$ Forderungen (4) und (5) zur vollständigen Bestimmung aller $2n+1$ Koeffizienten von $\varphi(x)$ gerade ausreichen.

Setzen wir nämlich in (4) für R den Wert (2) und für $\varphi(x)$ den Wert (1) ein, so wird der Integrand eine algebraische Summe, so daß das Integral in eine algebraische Summe von einzelnen Integralen zerlegt werden kann. Aus (4) ergibt sich also:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, d x - a \int_0^{2\pi} d x - b_1 \int_0^{2\pi} \sin x\, d x - \ldots - b_n \int_0^{2\pi} \sin n x\, d x$$
$$- c_1 \int_0^{2\pi} \cos x\, d x - \ldots - c_n \int_0^{2\pi} \cos n x\, d x = 0.$$

Hierin sind aber die mit $b_1, \ldots b_n$ und $c_1, \ldots c_n$ behafteten Integrale offenbar sämtlich gleich Null. Ferner ist das mit a behaftete Integral gleich 2π. Also kommt einfach:

(6) $$\int_0^{2\pi} f(x)\, d x - a \cdot 2\pi = 0.$$

Behandeln wir die erste Formel (5) entsprechend, so kommt zunächst:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin r x\, d x - a \int_0^{2\pi} \sin r x\, d x -$$
$$- b_1 \int_0^{2\pi} \sin x \sin r x\, d x - \ldots - b_n \int_0^{2\pi} \sin n x \sin r x\, d x -$$
$$- c_1 \int_0^{2\pi} \cos x \sin r x\, d x - \ldots - c_n \int_0^{2\pi} \cos n x \sin r x\, d x = 0.$$

Nach (15) und (16), S. 417 u. f., sind die mit $b_1, \ldots b_n$ und $c_1, \ldots c_n$ behafteten Integrale sämtlich gleich Null mit Ausnahme desjenigen,

das den Faktor b_r hat, denn ihm kommt nach (17), S. 417, der Wert π zu. Ferner ist das mit a behaftete Integral gleich Null, so daß einfach bleibt:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin r x \, d x - b_r \cdot \pi = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots n). \tag{7}$$

Entsprechend behandelt, gibt die zweite Formel (5):

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos r x \, d x - c_r \cdot \pi = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots n). \tag{8}$$

Die Bedingungen (6), (7) und (8) bestimmen in der Tat alle $2n + 1$ Koeffizienten $a, b_1, \ldots b_n$ und $c_1, \ldots c_n$. Somit bekommen wir den

Satz 7: Ist $f(x)$ eine stetige Funktion mit der Periode 2π, so hat unter allen Ersatzfunktionen von der Form

$$\begin{aligned} \varphi(x) = a &+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_n \sin n x \\ &+ c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + \ldots + c_n \cos n x \end{aligned}$$

diejenige, für die das arithmetische Mittel der Quadrate aller Fehler $f(x) - \varphi(x)$ im ganzen Intervalle von $x = 0$ bis $x = 2\pi$ am kleinsten ist, die Koeffizienten:

$$a = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, d x, \qquad b_r = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin r x \, d x,$$

$$c_r = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos r x \, d x \qquad (r = 1, 2 \ldots n).$$

Wir haben eine Ersatzfunktion $\varphi(x)$ betrachtet, die nur $2n + 1$ Summanden hat. Nachher wollen wir diese Anzahl über alle Grenzen wachsen lassen. Dann ist das Ziel der Untersuchung, zu beweisen: Wenn $x = h$ irgendeinen Wert im Intervalle von $x = 0$ bis $x = 2\pi$ bedeutet, strebt $\varphi(x)$ an der Stelle $x = h$ für $\lim n = \infty$ gerade nach dem zu gehörigen Werte $f(h)$ von $f(x)$. Wir werden zeigen, daß dieser Beweis auf den Nachweis der Richtigkeit einer einzigen Formel hinausläuft.

Werden in

$$\begin{aligned} \varphi(h) = a &+ b_1 \sin h + b_2 \sin 2h + \ldots + b_n \sin n h \\ &+ c_1 \cos h + c_2 \cos 2h + \ldots + c_n \cos n h \end{aligned}$$

die in Satz 7 angegebenen Werte der Koeffizienten eingeführt, die konstanten Faktoren $\frac{1}{2}$, $\sin h$, $\sin 2h$ usw., $\cos h$, $\cos 2h$ usw. unter die

Integralzeichen gebracht und darauf alle Integrale in ein einziges zusammengefaßt, so kommt:

$$\varphi(h) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\left[\tfrac{1}{2} + {\sin h \sin x + \sin 2h \sin 2x + \ldots + \sin nh \sin nx \atop \cos h \cos x + \cos 2h \cos 2x + \ldots + \cos nh \cos nx}\right] dx.$$

Da $\sin nh \sin nx + \cos nh \cos nx$ nach Satz 16, S. 411, gleich $\cos n(x-h)$ ist, läßt sich hierfür schreiben:

$$\varphi(h) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\left[\tfrac{1}{2} + \cos(x-h) + \cos 2(x-h) + \ldots + \cos n(x-h)\right] dx.$$

Wird zur Abkürzung

$$S = \cos(x-h) + \cos 2(x-h) + \ldots + \cos n(x-h)$$

gesetzt, so ergibt sich:

$$(9) \qquad \varphi(h) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\left(\tfrac{1}{2} + S\right) dx.$$

Die Summe S der Kosinus der Vielfachen von $x-h$ läßt sich umformen. Denn nach Satz 17, S. 412 ist:

$$2\cos r(x-h)\sin\tfrac{1}{2}(x-h) = \sin\left[\left(r+\tfrac{1}{2}\right)(x-h)\right] - \sin\left[\left(r-\tfrac{1}{2}\right)(x-h)\right].$$

Bildet man diese Gleichung für $r = 1, 2, \ldots n$ und addiert man dann alle Gleichungen, so heben sich rechts die meisten Glieder fort, während die linke Seite gleich $2S\sin\frac{1}{2}(x-h)$ wird. Es kommt:

$$2S\sin\tfrac{1}{2}(x-h) = \sin\left[\left(n+\tfrac{1}{2}\right)(x-h)\right] - \sin\tfrac{1}{2}(x-h).$$

Also ist:

$$\tfrac{1}{2} + S = \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-h)\right]}{2\sin\frac{1}{2}(x-h)}.$$

Folglich geht (9) über in:

$$(10) \qquad \varphi(h) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-h)\right]}{2\sin\frac{1}{2}(x-h)}\, dx.$$

Hierdurch ist der Wert, den die Ersatzfunktion $\varphi(x)$ für $x = h$ hat, mittels eines einzigen Integrals dargestellt. Es heißt das Dirichletsche Integral, weil es von Dirichlet zur Beantwortung der Frage nach der Gültigkeit der Fourierschen Reihe aufgestellt und untersucht worden ist. Also kommt alles darauf an zu beweisen, daß das Dirichletsche Integral für $\lim n = \infty$ den Grenzwert

$\pi f(h)$ hat. Denn dann hat $\varphi(h)$ nach (10) den Grenzwert $f(h)$. Aber die Durchführung des Beweises ist nicht leicht; wir verzichten darauf und verweisen auf DIRICHLETS Arbeiten, nämlich: „Sur la convergence des séries trigonométriques etc.“ im Journal für die reine und angewandte Mathematik, 4. Bd. 1829, S. 157—169, und: „Über die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus- und Kosinusreihen“ im Repertorium der Physik, 1. Bd. 1837, S. 152—174. Beide Arbeiten findet man auch in DIRICHLETS Gesammelten Werken, 1. Bd. Berlin 1889, S. 117—132 und S. 133—160, und die zweite ist bequemer zugänglich durch den Sonderabdruck in OSTWALDS Klassikern der exakten Wissenschaften Nr. 116 (Leipzig 1900).

Wir begnügen uns damit, bloß über die DIRICHLETschen Bedingungen für die Gültigkeit der FOURIERschen Reihe zu berichten: DIRICHLET erkannte, daß diejenigen Funktionen $f(x)$, die durch eine FOURIERsche Reihe im Intervalle von $x = 0$ bis $x = 2\pi$ dargestellt werden können, nicht überall stetig zu sein brauchen. Vielmehr genügt es, daß die Funktion $f(x)$ im Intervalle von $x = 0$ bis $x = 2\pi$, abgesehen von einer beschränkten Anzahl von Stellen, stetig sei und nur eine endliche Anzahl von Maximis und Minimis habe. Die Unstetigkeitsstellen dürfen sogenannte Sprungstellen sein, d. h. Stellen, wo der Wert der Funktion von einer endlichen Größe zu einer andern endlichen Größe springt. Beispielsweise darf das Bild der Funktion innerhalb der Periode wie in Fig. 396 beschaffen sein, wo die Kurve zwei Sprungstellen hat. Die Integrale, die nach Satz 7 zur Berechnung der Koeffizienten ausgewertet werden müssen, haben auch in diesem Fall eine bestimmte Bedeutung: Man muß sie in Summen von Integralen zerlegen, von denen sich jedes einzelne auf ein Intervallstück bezieht, in dem keine Sprungstelle vorkommt. Nebenbei gesagt: Man kann beweisen, daß die FOURIERsche Reihe für einen Wert $x = h$, zu dem eine Sprungstelle gehört, gleich dem arithmetischen Mittel der beiden dort auftretenden Ordinaten ist.

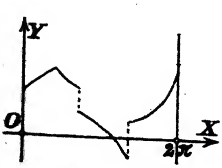


Fig. 396.

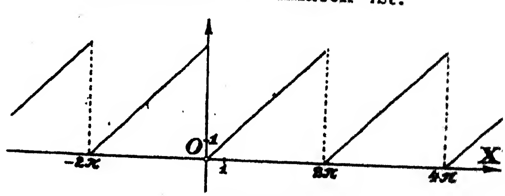


Fig. 397.

Da die FOURIERsche Reihe für $f(x)$ lauter Glieder mit der Periode 2π hat, gibt sie überhaupt für jedes x einen Wert, denn

ihre Bildkurve geht durch periodische Wiederholung desjenigen Stückes der Bildkurve von $f(x)$ hervor, das zum Intervalle von $x=0$ bis $x=2\pi$ gehört. Wenn z. B. $f(x)$ im Intervalle von $x=0$ bis $x=2\pi$ gleich x gewählt wird, ist das Bild wie in Fig. 397.

Hat man für eine Funktion $f(x)$ im Intervalle von $x=0$ bis $x=2\pi$ die zugehörige Fouriersche Reihe berechnet:

$$(11)\quad \begin{cases} f(x) = a + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \dots \\ \qquad\qquad + c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + c_3 \cos 3x + \dots, \end{cases}$$

so geht das Bild von $f(x)$ durch Aufeinanderlagerung oder Addieren der Ordinaten (S. 87) hervor und zwar aus dem Bild von $y=a$, d. h. einer zur x-Achse parallelen Geraden, und aus den Bildern der Funktionen:

$$(12)\quad b_1 \sin x,\quad c_1 \cos x,\quad b_2 \sin 2x,\quad c_2 \cos 2x,\quad b_3 \sin 3x,\quad c_3 \cos 3x, \dots$$

Diese Bilder sind aber nach S. 423 lauter Sinuswellen mit den Perioden 2π, $\frac{2}{2}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$ usw.

1. Beispiel: Wählen wir als Funktion $f(x)$ im Intervalle von 0 bis 2π einfach x selbst, so gibt Satz 7:

$$a = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^{2\pi} = \pi,$$

ferner mittels Teil-Integration (vgl. S. 579):

$$\pi b_r = \int_0^{2\pi} x \sin rx\,dx = -\left[\frac{x \cos rx}{r}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{r}\int_0^{2\pi} \cos rx\,dx = -\frac{2\pi}{r},$$

$$\pi c_r = \int_0^{2\pi} x \cos rx\,dx = +\left[\frac{x \sin rx}{r}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{r}\int_0^{2\pi} \sin rx\,dx = 0.$$

Also kommt für $0 < x < 2\pi$ die Reihe:

$$x = \pi - \tfrac{2}{1}\sin x - \tfrac{2}{2}\sin 2x - \tfrac{2}{3}\sin 3x - \tfrac{2}{4}\sin 4x - \dots$$

Für $x=0$ und $x=2\pi$ geht dagegen der Wert π hervor. Für $x=\frac{1}{2}\pi$ ergibt sich die schon im 7. Beispiel, S. 553, gefundene Leibnizische Reihe. Die Reihe stellt diejenige Funktion dar, deren Bild aus den Strecken in Fig. 397 besteht. Wir bezeichnen nun mit y_0, y_1, y_2, y_3 usw. die Funktionen:

$$y_0 = \pi,\quad y_1 = -\tfrac{2}{1}\sin x,\quad y_2 = -\tfrac{2}{2}\sin 2x,\quad y_3 = -\tfrac{2}{3}\sin 3x,\quad y_4 = -\tfrac{2}{4}\sin 4x$$

usw. Die Bilder der fünf ersten sind in Fig. 398 gegeben. Wenn man zuerst y_0 und y_1 addiert, alsdann dazu noch y_2 usw., d. h. jedesmal für beliebige Abszissen x die Summen der zugehörigen Ordinaten als neue Ordinaten aufträgt, erhält man die in Fig. 399 dargestellten Näherungskurven, die sich mehr und mehr der Geraden $y=x$ anschmiegen. Bei allen ergibt sich für $x=0$ und

$x = 2\pi$ die Ordinate π. Die einzelnen Näherungskurven haben an der Stelle $(\pi;\pi)$, durch die sie sämtlich gehen, Wendepunkte, in denen die Steigung

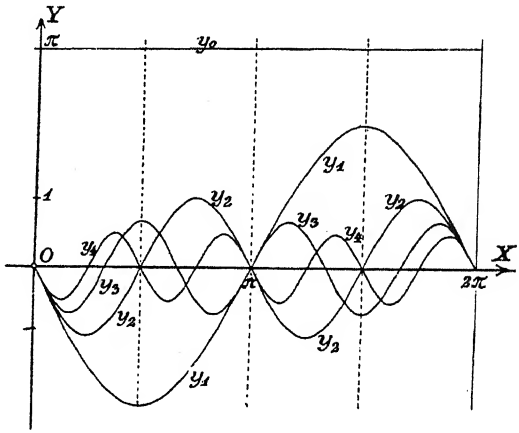


Fig. 398.

abwechselnd gleich 0 oder 2 ist. Wie weit man also auch mit der Annäherung gehen mag, niemals wird in diesem Punkte die Tangente der Näherungskurve nach der Geraden $y = x$ hinstreben. Dies zu erwähnen ist nützlich, da es zur

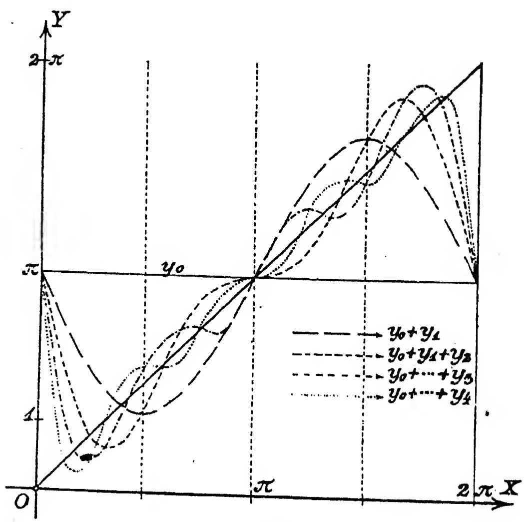


Fig. 399.

Beleuchtung eines wohl zu beachtenden Umstandes dient: **Wenn eine Funktion** $f(x)$ **innerhalb des Intervalles von** $x = 0$ **bis** $x = 2\pi$ **durch eine** FOURIER-

sche Reihe dargestellt wird, ist doch damit keineswegs gesagt, daß ihr Differentialquotient $f'(x)$ durch diejenige Reihe gegeben wäre, die durch Differentiation aller Glieder der Fourierschen Reihe hervorgeht.

In der Tat gibt die Differentation der Glieder der Reihe (11) als Koeffizienten von $\sin rx$ und $\cos rx$ die Größen $-r c_r$ und $r b_r$, d. h. nach Satz 7 die Werte:

$$-\frac{r}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos r x\,dx \quad \text{und} \quad \frac{r}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin r x\,dx.$$

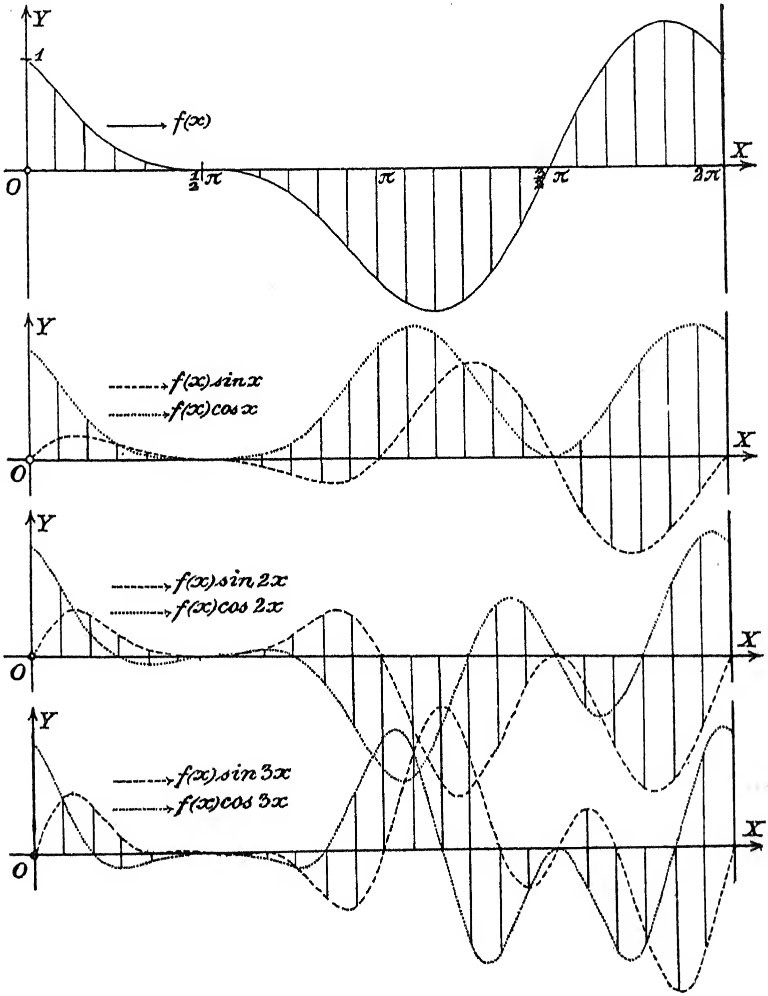


Fig. 400.

Wenn man dagegen die Fourier'sche Reihe für $f'(x)$ nach demselben Satz aufstellt, findet man, daß in ihr $\sin rx$ und $\cos rx$ die Koeffizienten

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\sin rx\,dx \quad \text{und} \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\cos rx\,dx$$

haben, die von jenen Werten verschieden sind.

Die Koeffizienten der Fourierschen Reihe (11) sind, abgesehen vom Faktor $1:2\pi$ oder $1:\pi$, nach Satz 7 bestimmte Integrale, deren Werte nach Satz 5, S. 229, als die Flächen der Bildkurven von $f(x)$, von $f(x)\sin x$ und $f(x)\cos x$; von $f(x)\sin 2x$ und $f(x)\cos 2x$ usw. gedeutet werden können, sämtlich begrenzt durch die zu $x=0$ und $x=2\pi$ gehörigen Ordinaten. Liegt die Bildkurve von $f(x)$ vor, so kann man leicht die Bildkurven von $f(x)\sin x$, $f(x)\cos x$, $f(x)\sin 2x$, $f(x)\cos 2x$ usw. zeichnen: Man teilt die Periode 2π in eine genügend große Anzahl von gleichen Teilen — in Fig. 400 haben wir 24 gewählt — und multipliziert die zu den dadurch erhaltenen Abszissen x gehörigen Ordinaten $f(x)$ mit $\sin x$ oder $\cos x$. Dies kann man mittels der Hilfsfigur 401 durch einfaches Auftragen der Ordinaten auf den Radien und Abgreifen der Abstände vom wagerechten und senkrechten Radius leicht ausführen. Dieselbe Hilfsfigur wird ebenso zur Ermittelung der Werte von $f(x)\sin 2x$ und von $f(x)\cos 2x$ benutzt, usw. So haben wir in Fig. 400 aus der angenommenen Bildkurve einer Funktion $f(x)$ die Bildkurven von $f(x)\sin x$, $f(x)\cos x$, ferner die von $f(x)\sin 2x$ und $f(x)\cos 2x$ und schließlich auch die von $f(x)\sin 3x$ und $f(x)\cos 3x$ abgeleitet. Die Flächen der Kurven sind positiv oder negativ zu rechnen, je nachdem sie oberhalb oder unterhalb der x-Achse liegen. Man kann sie entweder durch ein Näherungsverfahren (vgl. S. 241 u. f.) oder mit Hilfe eines Planimeters (vgl. S. 239 u. f.) bestimmen. Wir haben sie in Fig. 400 (allerdings in einer Zeichnung von doppelter Größe) mit dem Planimeter ausgemessen und die Werte gefunden:

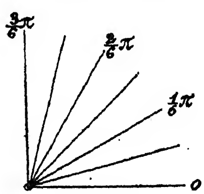


Fig. 401.

$$0{,}006\,, \quad \begin{matrix} -\,0{,}011\,, & -\,1{,}600\,, & -\,0{,}022\,, \\ 3{,}150\,, & 0{,}033\,, & 0{,}033\,, \end{matrix}$$

wobei die Einheit das Quadrat über der Längeneinheit der Figur ist. Dividiert man den ersten Wert mit 2π, dagegen die übrigen Werte mit π, so gehen die ersten sieben Koeffizienten der Fourierschen Reihe hervor:

$$a = 0{,}001\,, \quad \begin{matrix} b_1 = -\,0{,}004\,, & b_2 = -\,0{,}509\,, & b_3 = -\,0{,}007\,, \\ c_1 = \,1{,}003\,, & c_2 = \,0{,}011\,, & c_3 = \,0{,}011\,. \end{matrix}$$

Bedenkt man die bei diesem Verfahren unvermeidlichen Fehler, so sieht man sich veranlaßt, die Werte abzurunden:

$$a = 0\,, \quad \begin{matrix} b_1 = 0\,, & b_2 = -\,\tfrac{1}{2}\,, & b_3 = 0\,; \\ c_1 = 1\,, & c_2 = \,0\,, & c_3 = 0\,. \end{matrix}$$

Hiernach lautet die nach dem siebenten Glied abgebrochene Fouriersche Reihe einfach so:

$$\cos x - \tfrac{1}{2} \sin 2x\,.$$

Tatsächlich hatten wir in der obersten Zeichnung der Fig. 400 gerade die Bildkurve dieser Funktion gewählt, was wir jetzt nachträglich eingestehen.

Man kann beweisen, daß die Koeffizienten b_n und c_n der Fourierschen Reihe (11) für eine Funktion $f(x)$, die den Dirichletschen Bedingungen genügt, für $\lim n = \infty$ stets nach Null streben. Da sie in der Reihe mit $\sin nx$ und $\cos nx$ multipliziert sind, deren absolute Beträge nie größer als Eins werden, streben also auch die Glieder der Reihe um so mehr nach Null, je mehr Glieder man berücksichtigt. Für Anwendungen genügt meistens die Ermittelung einiger der ersten Glieder der Reihe; und daß man dies graphisch tun kann, haben wir soeben gezeigt. Man hat auch Vorrichtungen hergestellt, die dasselbe mechanisch leisten. Sie heißen harmonische Analysatoren. Der Grund für diese Bezeichnung liegt in folgendem:

Die Funktionen (12) können wir nach S. 425 u. f. als rechnerische Ausdrücke für einfache Schwingungen betrachten. Wir brauchen zu diesem Zweck nur x als die Zeit zu deuten und die Funktionen als die Ordinaten y von Punkten, die längs einer y-Achse schwingen. Die Addition zusammengehöriger Ordinaten mehrerer einfacher Schwingungen, d. h. ihre Aufeinanderlagerung, haben wir auf S. 428 u. f. betrachtet. Allerdings wurden damals wohlbemerkt nur Schwingungen mit gleicher Periode ins Auge gefaßt, während hier $\sin nx$ und $\cos nx$ die wesentliche Periode $2\pi : n$ haben. Damals fanden wir in Satz 22, S. 428, daß die Aufeinanderlagerung mehrerer einfacher Schwingungen mit derselben Periode wieder eine einfache Schwingung mit derselben Periode gibt. Das ist jetzt nicht mehr der Fall; vielmehr entstehen hier sogenannte zusammengesetzte harmonische Schwingungen. Wenn also $f(x)$ irgendeine als Fouriersche Reihe darstellbare Funktion mit der Periode 2π ist und y als Ordinate zur Zeit x gedeutet wird, führt ein Punkt nach der Vorschrift $y = f(x)$ eine periodische Bewegung allgemeiner Art längs der y-Achse

aus, also eine allgemeine Schwingung mit der Periode 2π. Daraus sieht man, was die Entwicklung von $f(x)$ als FOURIERsche Reihe bedeutet: Eine beliebige allgemeine Schwingung läßt sich aus unendlich vielen **einfachen** Schwingungen zusammensetzen. Mit der Berechnung der FOURIERschen Reihe wird also die Aufgabe gelöst, eine zusammengesetzte harmonische Schwingung in ihre Komponenten, nämlich in lauter einfache Schwingungen, zu zerlegen. Zerlegungsprozesse aber heißen bekanntlich Analysen. Hiernach ist die Bezeichnung harmonische Analysatoren verständlich.

Wenn ein Punkt bei einem periodischen Vorgange Schwingungen längs einer Geraden macht, kann man von ihm auf einem mit Papier überspannten und sich gleichmäßig drehenden Zylinder eine Kurve beschreiben lassen. Breitet man das Papier auf der Ebene aus, so liegt eine Kurve vor. Wenn man aus ihr die ersten Koeffizienten der zugehörigen FOURIERschen Reihe ermittelt, bekommt man diejenigen einfachen Schwingungen, aus denen sich die beobachtete allgemeine Schwingung in der Hauptsache zusammensetzt. Man ist also imstande, die verborgenen einfachen Hauptursachen einer periodischen Erscheinung zu ermitteln. Hierin liegt die außerordentlich große Bedeutung der FOURIERschen Reihe.

Bisher hatten wir die Periode der Funktion $f(x)$ gleich 2π angenommen. Das ist aber nach den am Anfange dieses Paragraphen gemachten Bemerkungen unwesentlich. Wir wollen jetzt annehmen, daß $F(t)$ eine Funktion der Zeit t mit der Periode T sei. Um den allgemeinsten Fall zu betrachten, wollen wir überdies annehmen, daß die Periode nicht gerade zur Zeit $t = 0$, sondern zur Zeit $t = t_0$ anfange. Dann setzen wir:

(13) $$\frac{t - t_0}{T} = \frac{x}{2\pi}, \quad \text{d. h.} \quad t = t_0 + \frac{T}{2\pi} x$$

und führen hierdurch x als neue unabhängige Veränderliche ein. Dadurch geht $F(t)$ in eine Funktion

(14) $$f(x) = F\left(t_0 + \frac{T}{2\pi} x\right)$$

von x über, die von $x = 0$ bis $x = 2\pi$ ebenfalls diejenigen Werte durchläuft, die $F(t)$ in der Zeit von $t = t_0$ bis $t = t_0 + T$ annimmt. Die Koeffizienten der zu $f(x)$ gehörigen FOURIERschen Reihe sind in Satz 7 angegeben. Setzen wir darin nach (13)

$$x = 2\pi \frac{t - t_0}{T}, \quad \text{d. h.} \quad dx = \frac{2\pi}{T} dt$$

und beachten wir, daß dann t_0 und $t_0 + T$ die Integralgrenzen werden, so kommt:

$$(15)\quad \begin{cases} a = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} F(t)\,dt, \quad b_r = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} F(t)\sin\dfrac{2\pi r(t-t_0)}{T}\,dt, \\ c_r = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} F(t)\cos\dfrac{2\pi r(t-t_0)}{T}\,dt \qquad (r = 1, 2, 3\ldots), \end{cases}$$

und die Fouriersche Reihe lautet:

$$(16)\quad \begin{cases} F(t) = a \\ \qquad + b_1 \sin\dfrac{2\pi(t-t_0)}{T} + b_2 \sin\dfrac{2.2\pi(t-t_0)}{T} + b_3 \sin\dfrac{3.2\pi(t-t_0)}{T} + \ldots \\ \qquad + c_1 \cos\dfrac{2\pi(t-t_0)}{T} + c_2 \cos\dfrac{2.2\pi(t-t_0)}{T} + c_3 \cos\dfrac{3.2\pi(t-t_0)}{T} + \ldots \end{cases}$$

2. Beispiel: Die Funktion $F(t)$ habe von $t = -\pi$ bis $t = 0$ den Wert -1 und von $t = 0$ bis $t = +\pi$ den Wert $+1$. Da sie im Intervalle von $-\pi$ bis $+\pi$ nur eine Sprungstelle hat, genügt sie den Dirichletschen Bedingungen, so daß sie durch eine Fouriersche Reihe darstellbar ist. Für beliebige Werte von t hat die Reihe das in Fig. 402 gegebene Bild, wenn t die Abszisse ist. Wir wählen $t_0 = -\pi$ und haben

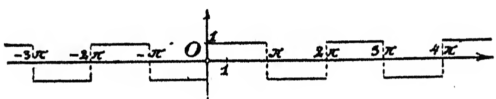


Fig. 402.

$T = 2\pi$. Die Integrale (15) gehen also von $t = -\pi$ bis $t = +\pi$. Da aber bei $t = 0$ eine Sprungstelle ist, werden die Integrale in Summen von je zweien zerlegt, wobei das erste von $t = -\pi$ bis $t = 0$ und das zweite von $t = 0$ bis $t = +\pi$ geht und im ersten $F(t) = -1$, im zweiten dagegen $F(t) = +1$ zu setzen ist. Man findet dann ohne weiteres die Reihe:

$$\frac{4}{\pi}\left(\sin t + \tfrac{1}{3}\sin 3t + \tfrac{1}{5}\sin 5t + \ldots\right).$$

Also ist

$$\tfrac{1}{4}\pi = \sin t + \tfrac{1}{3}\sin 3t + \tfrac{1}{5}\sin 5t + \ldots$$

für jedes t zwischen 0 und π, und ebenso

$$-\tfrac{1}{4}\pi = \sin t + \tfrac{1}{3}\sin 3t + \tfrac{1}{5}\sin 5t + \ldots$$

für jedes t zwischen $-\pi$ und 0. Für $t = 0$ dagegen geben beide Reihen den Wert Null, und dies ist das arithmetische Mittel von -1 und $+1$.

Zwölftes Kapitel.

Funktionen von mehreren Veränderlichen.

§ 1. Partielle Differentiation.

Nachdem wir so ausführlich von Funktionen von nur einer Veränderlichen gesprochen haben, wollen wir einiges über Funktionen von mehreren Veränderlichen in knapperer Form hinzufügen. Was eine Funktion von mehreren Veränderlichen ist, dürfte ohne weiteres klar sein, denn da eine Erscheinung von mancherlei Ursachen abhängen kann, wird eine Größe, die zur Bestimmung der Erscheinung dient, gesetzmäßig von einer Reihe von anderen Größen abhängen, also eine Funktion von ihnen sein. Vgl. S. 13 u. 14.

Betrachten wir vorerst eine Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen x und y. Wir verstehen alsdann nicht mehr wie früher unter y eine Funktion von x, vielmehr soll y ebenso wie x beliebig veränderlich sein. Gehört zu einem beliebigen Wertepaare x, y ein Wert einer dritten Größe z, so ist z von x und y abhängig oder eine Funktion von x und y, was man durch eine Formel

$$z = f(x, y)$$

zum Ausdrucke bringt. Zwei einfache Beispiele seien genannt: Die Fläche z eines Rechtecks ist eine Funktion der beiden Seitenlängen x und y, nämlich $z = xy$. Das Volumen z eines zylindrischen Gefäßes ist die Funktion $\pi x^2 y$ des Radius x und der Höhe y des Gefäßes.

Die Änderungen der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y können wir uns, auch wenn sie beide ganz beliebig sind, doch immer nur zeitlich verlaufend denken. Wenn x nach und nach eine Reihe von Werten annimmt und ebenso y, brauchen wir ja schon zum bloßen Durchdenken dieser Wertereihen Zeit; wir stellen uns also im Grunde x und y als Funktionen der Zeit t vor und zwar, da sich x

und y beliebig ändern können, als **beliebige** Funktionen $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ der Zeit t. Dann wird z oder $f(x, y)$, wenn wir darin für x und y diese Funktionen der Zeit t einsetzen, ebenfalls eine Funktion der Zeit:

$$z = f(\varphi(t), \quad \psi(t)).$$

1. **Beispiel:** Ein Punkt P oder $(x; y)$ der Ebene bewege sich irgendwie, d. h. x und y seien unabhängige Veränderliche. Sind die Einheiten von x und y gleich groß, so hat P vom Anfangspunkt O die Entfernung:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2},$$

die eine Funktion von x und y ist. Wie ändert sie sich, wenn sich P unendlich wenig bewegt, d. h. wenn sich x und y beide um beliebige unendlich kleine Größen ändern? Man lasse P irgendeine **Bahnkurve** durchlaufen, indem man

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

setzt. Dann wird die Entfernung z eine Funktion der Zeit t allein:

$$z = \sqrt{[\varphi(t)]^2 + [\psi(t)]^2}.$$

Ihr Differentialquotient ist nach der Kettenregel zu berechnen. Setzt man nämlich den Radikanden gleich w, so ist $z = \sqrt{w}$ und

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dw}\frac{dw}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{w}}\frac{dw}{dt}.$$

Der Radikand w ist eine Summe $u + v$, die gliedweise differentiiert wird. Nun hat $u = [\varphi(t)]^2$ den auch nach der Kettenregel zu berechnenden Differentialquotienten:

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = 2\varphi(t)\varphi'(t).$$

Ebenso hat v den Differentialquotienten $2\psi(t)\psi'(t)$, so daß $w = u + v$ den Differentialquotienten $2\varphi(t)\varphi'(t) + 2\psi(t)\psi'(t)$ hat. Daher kommt:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\varphi(t)\varphi'(t) + \psi(t)\psi'(t)}{\sqrt{[\varphi(t)]^2 + [\psi(t)]^2}}.$$

Diese Formel gilt für diejenige Bewegung des Punktes P, die dem Gesetze $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ folgt. In der gestellten Aufgabe, die Änderung von $z = OP$ bei einer beliebigen unendlich kleinen Bewegung des Punktes P zu ermitteln, war aber von diesem Gesetze keine Rede. Man muß deshalb das Ergebnis von diesen besonderen Annahmen befreien. Das ist leicht, denn es ist $dx : dt = \varphi'(t)$, $dy : dt = \psi'(t)$. Setzt man diese Werte für $\varphi'(t)$ und $\psi'(t)$ ein und ebenso x und y für $\varphi(t)$ und $\psi(t)$, so hebt sich beiderseits auch dt fort und es kommt:

$$(1) \qquad dz = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Hiermit ist die Formel gewonnen, die für die Änderung der Funktion $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ gilt, wie sich auch immer x und y unendlich wenig ändern mögen.

In diesem Beispiel ist ein besonderer Fall einer Aufgabe gelöst, die wir jetzt allgemein in Angriff nehmen wollen.

Dabei bemerken wir vorweg, daß wir immer nur stetige Funktionen $z = f(x, y)$ betrachten wollen. Wir setzen nämlich voraus, daß man die absoluten Beträge der Zunahmen Δx und Δy von x und y immer so klein annehmen kann, daß die Zunahme der Funktion, nämlich die Differenz

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

absolut genommen kleiner als eine beliebig klein vorgeschriebene positive Größe wird. Ist dies der Fall, so gehört zu unendlich kleinen Zunahmen dx und dy von x und y auch eine unendlich kleine Zunahme dz von $z = f(x, y)$. Die Frage, die wir nun beantworten wollen, ist, wie sich dies Differential dz von z durch x und y selbst und durch die Differentiale dx und dy von x und y ausdrückt.

Bei der Beantwortung dieser Frage wollen wir zunächst nur x um dx ändern, während y ungeändert bleibe. Während dieser Betrachtung ist y als Konstante zu behandeln (vgl. S. 13), also $z = f(x, y)$ als eine Funktion von x allein, in der noch die beliebig wählbare Konstante y vorkommt, gerade so wie z. B. in $\sin ax$ noch die Konstante a. Diese Funktion $z = f(x, y)$ sei nach x differentiierbar. Ihren Differentialquotienten wollen wir nicht wie sonst mit $dz : dx$ bezeichnen, denn dz bedeutet jetzt keine beliebige unendlich kleine Änderung von z, sondern diejenige Änderung, die z erfährt, wenn sich nur x um dx ändert, während y ungeändert bleibt. Um diesen Unterschied zu betonen, spricht man vom partiellen Differentialquotienten von z nach x und bezeichnet ihn mit $\partial z : \partial x$ stattmit $dz : dx$. Man gewinnt ihn, indem man z so nach x differentiiert, als ob y konstant wäre. Wenn man diesen Differentialquotienten dann mit dx multipliziert, bekommt man als Änderung von z das sogenannte partielle Differential:

$$\frac{\partial z}{\partial x} dx.$$

Wenn z. B. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist, berechnet man $\partial z : \partial x$, indem man die Funktion wie $\sqrt{x^2 + c^2}$ nach x differentiiert. Hier geht $x : \sqrt{x^2 + c^2}$, also bei der partiellen Differentiation von z nach x der Wert $x : \sqrt{x^2 + y^2}$ hervor, so daß

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx$$

der Zuwachs ist, den $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ erfährt, wenn x um dx wächst und y ungeändert bleibt.

2. **Beispiel:** Die partiellen Differentialquotienten der Funktionen

$$z = x y^2, \qquad z = \frac{y}{x}, \qquad z = \ln(x + e^y), \qquad z = \sin(x^2 + y)$$

nach x sind:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x + e^y}, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = 2x\cos(x^2 + y).$$

Ändert sich x um das Differential dx, während y ungeändert bleibt, so erfahren also diese vier Funktionen die unendlich kleinen Änderungen:

$$y^2\,dx, \qquad -\frac{y\,dx}{x^2}, \qquad \frac{dx}{x + e^y}, \qquad 2x\cos(x^2 + y)\,dx.$$

Zweitens bleibe jetzt x unverändert, während y um dy zunehme. Dann gilt Entsprechendes wie vorher, indem jetzt y die Rolle der unabhängigen Veränderlichen annimmt, während x als Konstante zu behandeln ist. Man hat also z partiell nach y zu differentiieren, d. h. so, als ob das in $z = f(x, y)$ auftretende x eine Konstante wäre. Dies geschieht nach den gewöhnlichen Differentiationsregeln. Der hervorgehende partielle Differentialquotient von z nach y wird mit $\partial z : \partial y$ bezeichnet, und der Zuwachs von z ist das partielle Differential:

$$\frac{\partial z}{\partial y}\,dy.$$

3. **Beispiel:** Die partiellen Differentialquotienten der Funktionen des 2. Beispiels nach y sind:

$$2xy, \qquad \frac{1}{x}, \qquad \frac{e^y}{x + e^y}, \qquad \cos(x^2 + y),$$

d. h. ändert sich y um dy, während x konstant bleibt, so erfahren diese Funktionen die Zunahmen:

$$2xy\,dy, \qquad \frac{dy}{x}, \qquad \frac{e^y\,dy}{x + e^y}, \qquad \cos(x^2 + y)\,dy\,.$$

Nach S. 68 und 69 sind die partiellen Differentialquotienten von z oder $f(x, y)$ nach x und y die Grenzwerte:

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y = 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}. \end{aligned} \right.$$

Jedesmal ist beim Limeszeichen angegeben, welche Größe nach Null streben soll.

Schließlich wollen wir sowohl x als auch y wachsen lassen. Man stelle sich vor, x und y ändern sich zeitlich, seien also irgend

welche differentiierbare Funktionen $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ der Zeit t. Wenn t um Δt wächst, sind die Zunahmen von x und y:

$$\Delta x = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t), \qquad \Delta y = \psi(t + \Delta t) - \psi(t).$$

Dabei ist der Zuwachs von z:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Der Minuend rechts geht aus dem Subtrahenden $f(x, y)$ hervor, wenn sowohl x um Δx als auch y um Δy wächst. Man kann dies in zwei Schritte zerlegen, wobei einmal nur x um Δx und das andere Mal nur y um Δy zunimmt. Das erreicht man nämlich, wenn man rechter Hand $f(x, y + \Delta y)$ subtrahiert und dann wieder addiert, so daß alles richtig bleibt:

$$\begin{aligned}\Delta z = {} & f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) \\ & + f(x, y + \Delta y) - f(x, y).\end{aligned}$$

In der ersten Differenz rechter Hand steht jetzt ein Minuend, der aus dem Subtrahenden $f(x, y + \Delta y)$ hervorgeht, wenn nur x um Δx wächst, und in der zweiten Differenz ein Minuend, der aus dem Subtrahenden $f(x, y)$ hervorgeht, wenn nur y um Δy wächst. Dividiert man die erste Differenz mit Δx und multipliziert man sie dann wieder mit Δx, so bleibt alles richtig. Ebenso darf die zweite Differenz mit Δy dividiert und multipliziert werden. Schließlich werde die ganze Gleichung mit Δt dividiert. Dann kommt:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta z}{\Delta t} = {} & \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ & + \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta t}.\end{aligned}$$

Was wird nun hieraus, wenn Δt nach Null strebt? Da x und y die Funktionen φ und ψ von t sind und z von x und y abhängt, ist auch z eine Funktion von t. Deshalb steht links im Fall $\lim \Delta t = 0$ der Differentialquotient $dz : dt$. Rechts treten die Faktoren $\Delta x : \Delta t$ und $\Delta y : \Delta t$ auf. Sie sind im Fall $\lim \Delta t = 0$ die Differentialquotienten $dx : dt$ und $dy : dt$. Also kommt nach Satz 10, S. 65:

$$(3) \quad \left\{\begin{aligned}\frac{dz}{dt} = {} & \lim_{\Delta t = 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}{\Delta x} \cdot \frac{dx}{dt} \\ & + \lim_{\Delta t = 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \cdot \frac{dy}{dt}.\end{aligned}\right.$$

Da Δy mit Δt nach Null strebt, ist der zweite hierin auftretende Grenzwert genau derselbe wie in der zweiten Formel (2), also gleich

$\partial z : \partial y$. Auch Δx strebt mit Δt nach Null. Der erste in der letzten Gleichung vorkommende Grenzwert ist daher gerade so wie der erste Grenzwert (2) beschaffen, aber für $y + \Delta y$ statt y gebildet. Mithin ist:

$$\lim_{\Delta t = 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\partial f(x, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x},$$

weil ja für $\lim \Delta t = 0$ sowohl $\lim \Delta x = 0$ als auch $\lim \Delta y = 0$ ist. Dieser Grenzwert ist also gleich $\partial z : \partial x$. Somit läßt sich (3) einfach so schreiben:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

oder, wenn man die Gleichung mit dt multipliziert:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \tag{4}$$

Diese Formel ist frei von der Hilfsveränderlichen t. Sie besagt:

Satz 1: Das Differential einer Funktion z von x und y ist gleich der Summe der mit den partiellen Differentialquotienten $\partial z : \partial x$ und $\partial z : \partial y$ multiplizierten Differentiale von x und y selbst:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

vorausgesetzt, daß die partiellen Differentialquotienten $\partial z : \partial x$ und $\partial z : \partial y$ überhaupt vorhanden sind.

Man sagt, eine Funktion $z = f(x, y)$ sei differentiierbar, wenn die partiellen Differentialquotienten $\partial z : \partial x$ und $\partial z : \partial y$ vorhanden sind, d. h. bestimmte endliche Werte haben.

Der wichtige Satz 1 kann anschaulicher ausgedrückt werden: Wenn sich nur x ändert, dagegen y nicht, erfährt z den Zuwachs

$$\frac{\partial z}{\partial x} dx,$$

ebenso, wenn sich nur y ändert, dagegen x nicht, den Zuwachs

$$\frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Die Summe dieser beiden Werte ist aber der Wert (4). Deshalb können wir sagen:

Satz 2: Die Zunahme, die eine differentiierbare Funktion z von x und y erfährt, wenn x um das Diffe-

rential dx und **zugleich** y um das Differential dy zunimmt, ist gleich der Summe derjenigen beiden Zunahmen, die z erfahren würde, wenn x **allein** um dx oder y **allein** um dy zunähme.

Für den Fall, daß x und y um endliche Größen wachsen, gilt dies durchaus nicht. Ist z. B. $z = xy$ und wächst x um Δx, während y konstant bleibt, so ist der Zuwachs von z gleich

$$(x + \Delta x) y - xy \quad \text{oder} \quad y \Delta x .$$

Wenn andererseits x konstant bleibt und y um Δy wächst, ist der Zuwachs von z gleich

$$x (y + \Delta y) - xy \quad \text{oder} \quad x \Delta y .$$

Die Summe beider Zunahmen ist:

$$y \Delta x + x \Delta y .$$

Dies aber ist keineswegs diejenige Zunahme, die z oder xy erfährt, wenn sowohl x um Δx als auch y um Δy wächst. Denn in diesem Fall ergibt sich die Zunahme (vgl. auch S. 76):

$$(x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy \quad \text{oder} \quad y \Delta x + x \Delta y + \Delta x \Delta y .$$

Wohl aber, wenn sich x und y unendlich wenig ändern, ist die Zunahme einer differentiierbaren Funktion z von x und y gleich der Summe der partiellen Zunahmen, die sich ergeben, falls sich nur x oder nur y um das betreffende Differential dx oder dy ändert. Das Differential dz, das in (4) angegeben ist, heißt das vollständige Differential der Funktion z.

4. Beispiel: Sind x und y die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes P der Ebene und werden sie mit derselben Einheit gemessen, so hat P vom Anfangspunkt O den Abstand

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

der nach S. 344 der Radiusvektor des Punktes P heißt. Dieser Funktion r von x und y kommt nach (4) das vollständige Differential zu:

$$dr = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x\,dx + y\,dy}{r}.$$

Dieser Wert ergab sich schon im 1. Beispiele. Wir machen nun eine Anwendung: Wenn man die Abstände x und y des Punktes P von den Achsen wirklich abmißt und daraus den Radiusvektor r berechnet, wird sich ein Fehler ergeben, weil Messungen immer mit Fehlern behaftet sind. Aber man wird die Fehler von x und y ihrer Kleinheit halber angenähert als Differentiale dx und dy auffassen können. Dann stellt der vorstehende Wert von dr den sich ergebenden Fehler dar. Der relative Fehler (S. 7) ist:

$$\frac{dr}{r} = \frac{x\,dx + y\,dy}{r^2}.$$

Bedeutet φ die Amplitude von OP, d. h. den im Bogenmaße gemessenen Winkel der x-Achse mit dem Radiusvektor r (S. 344), siehe Fig. 403, so ist:

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}.$$

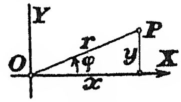


Fig. 403.

Diese Funktion φ von x und y hat die partiellen Differentialquotienten:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

also ist ihr vollständiges Differential:

$$d\varphi = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}.$$

Wegen $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ läßt es sich so schreiben:

$$d\varphi = \frac{-\sin \varphi\, dx + \cos \varphi\, dy}{r}.$$

Der relative Fehler von φ bei der Vermessung von x und y und Bestimmung von φ ist also:

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{-\sin \varphi\, dx + \cos \varphi\, dy}{r\varphi}.$$

5. **Beispiel:** Nach dem 2. und 3. Beispiele hat man:

$$\begin{aligned}
z &= xy^2, & dz &= y\,(y\,dx + 2x\,dy),\\
z &= \frac{y}{x}, & dz &= \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2},\\
z &= \ln(x + e^y), & dz &= \frac{dx + e^y\,dy}{x + e^y},\\
z &= \sin(x^2 + y), & dz &= (2x\,dx + dy)\cos(x^2 + y).
\end{aligned}$$

6. **Beispiel:** Bedeutet v das Volumen, p die Spannung und T die absolute Temperatur eines Gases wie im 6. Beispiel, S. 367 u. f., so ist die Spannung

$$p = \frac{RT}{v}$$

eine Funktion von v und T. Dabei bedeutet R eine Konstante, während v und T die unabhängigen Veränderlichen sind. Wächst das Volumen v um dv und die Temperatur T um dT, so wächst die Spannung nach (4) um

$$dp = R\,\frac{v\,dT - T\,dv}{v^2}.$$

7. **Beispiel:** Ein zylindrisches Gefäß soll einen Radius von r cm und eine Höhe von h cm haben, wird aber nicht genau in diesen Maßen hergestellt; die Fehler seien jedoch so klein, daß sie als Differentiale dr und dh zu betrachten sind. Sie bewirken einen Fehler des Volumens $V = \pi r^2 h$, nämlich:

$$dV = 2\pi r h\,dr + \pi r^2\,dh = \pi r\,(2h\,dr + r\,dh)$$

Der relative Fehler ist

$$\frac{dV}{V} = 2\frac{dr}{r} + \frac{dh}{h},$$

d. h. der Fehler beim Ausmessen des Radius fällt doppelt so stark ins Gewicht wie der beim Ausmessen der Höhe. Der Radius muß also besonders sorgfältig gemessen werden.

Wir gehen jetzt zur Annahme von beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen über. Die Anzahl der Veränderlichen sei n, und sie seien mit $x_1, x_2, \ldots x_n$ bezeichnet. Unter

$$z = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

werde nun eine Funktion der n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ verstanden. Wir glauben, es erübrigt sich hier, die entsprechende Betrachtung in voller Breite wiederzugeben. Der partielle Differentialquotient von z nach einer der n Veränderlichen, nach x_i etwa, also die Größe $\partial z : \partial x_i$, bedeutet denjenigen Differentialquotienten, den z als Funktion von x_i hat, wenn alle Veränderlichen mit Ausnahme von x_i fest bleiben. An die Stelle der zweigliedrigen Summe (4) tritt hier die n-gliedrige:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n. \tag{5}$$

Satz 3: Der Zuwachs, den eine differentiierbare Funktion z von $x_1, x_2, \ldots x_n$ erfährt, wenn alle n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ **zugleich** um Differentiale $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$ wachsen, ist gleich der Summe aller derjenigen n **einzelnen** Zunahmen, die z erfährt, wenn nur x_1 oder x_2 usw. um dx_1 oder dx_2 usw. wächst.

Die Summe (5) heißt das vollständige Differential der Funktion z von $x_1, x_2, \ldots x_n$. Sie setzt sich aus den partiellen Differentialen zusammen; insbesondere ist

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} dx_i$$

das partielle Differential, um das z wächst, wenn sich nur x_i um dx_i ändert. Den Satz 3 können wir also auch so aussprechen:

Satz 4: Das vollständige Differential einer differentiierbaren Funktion von mehreren Veränderlichen ist gleich der Summe ihrer partiellen Differentiale.

Der Satz 4 ist ein wichtiges Grundgesetz der Natur, das Gesetz der Superposition unendlich kleiner Änderungen. Es besagt: Wenn eine Wirkung durch unendlich kleine Änderungen aller

ihrer Ursachen eine andere wird, tragen alle diese kleinen Änderungen **unabhängig voneinander** zur Gesamtänderung der Wirkung bei, so daß die unendlich kleinen Einzelwirkungen bloß zu summieren sind. **Ein so einfaches Gesetz gilt durchaus nicht mehr bei Änderungen, die beträchtlich sind.** Man kann aber sagen, **daß das Gesetz mit großer Annäherung gilt, wenn die Änderungen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ verhältnismäßig klein sind.** Davon macht man häufig Gebrauch.

8. **Beispiel:** Das **Produkt** z der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ hat die partiellen Differentialquotienten:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{x_1 x_2 x_3 \ldots x_n}{x_i} \qquad (i = 1, 2 \ldots n).$$

Daher ist sein vollständiges Differential:

$$dz = x_1 x_2 \ldots x_n \left(\frac{dx_1}{x_1} + \frac{dx_2}{x_2} + \ldots + \frac{dx_n}{x} \right).$$

9. **Beispiel:** Bei einer **Vermessung** von einer Standlinie $AB = c$ aus kann man die Entfernung l irgendeines Punktes P von der Standlinie durch das Verfahren des sogenannten **Vorwärtsabschneidens** bestimmen, indem man die Winkel $\alpha = \sphericalangle BAP$ und $\beta = \sphericalangle ABP$ mißt, siehe Fig. 404. Wenn L den Fußpunkt des Lotes l von P auf AB bedeutet, ist $AL = l \operatorname{ctg} \alpha$, $LB = l \operatorname{ctg} \beta$, daher:

$$l = \frac{c}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}.$$

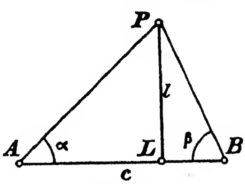


Fig. 404.

Beim Vermessen sind c, α und β mit Fehlern behaftet, die als unendlich klein aufgefaßt werden dürfen und daher mit dc, $d\alpha$ und $d\beta$ bezeichnet werden können. Wie groß ist der Fehler dl des Ergebnisses l? Wegen

$$\frac{\partial l}{\partial c} = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}, \quad \frac{\partial l}{\partial \alpha} = \frac{c}{(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta)^2 \sin^2 \alpha}, \quad \frac{\partial l}{\partial \beta} = \frac{c}{(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta)^2 \sin^2 \beta}$$

ergibt sich aus (5) mit Rücksicht auf Satz 16, S. 411:

$$dl = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot dc + \frac{c}{\sin^2(\alpha + \beta)} (\sin^2 \beta \cdot d\alpha + \sin^2 \alpha \cdot d\beta).$$

Der **relative** Fehler ist:

$$\frac{dl}{l} = \frac{dc}{c} + \frac{1}{\sin(\alpha + \beta)} \left[\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} d\alpha + \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} d\beta \right].$$

Wohlbemerkt sind hier $d\alpha$ und $d\beta$ im Bogenmaße zu messen. Warum?

Die Formel für das vollständige Differential einer Funktion von mehreren Veränderlichen kann man auch benutzen, um **verwickeltere Funktionen von nur einer Veränderlichen zu differentiieren.** Das ist eine sehr einfache Anwendung, die wir hier einschalten wollen:

Angenommen, y sei eine Funktion von x, aber von umständlicher Form wie z. B.

$$y = (\sin x)^{(x^n)}.$$

In diesem Beispiele wäre es übersichtlicher, $y = u^v$ zu schreiben und erklärend hinzuzufügen, daß $u = \sin x$ und $v = x^n$ sein soll. Allgemeiner gesagt: Unter y sei eine Funktion von zwei Größen u und v verstanden:

$$y = F(u, v),$$

und u und v sollen hierin Funktion von x bedeuten. Dann ist y eine Funktion von x. Ihren Differentialquotienten können wir so finden: Ändert sich x um dx, so werden sich u und v, weil sie von x abhängen, um ihre Differentiale du und dv ändern. Also ist $y = F(u, v)$ eine Funktion von zwei Größen u und v, die sich um du und dv ändern. Nach der Formel (4), worin jetzt z und x, y durch y oder F und u, v zu ersetzen sind, ist die zugehörige Änderung von y:

$$dy = \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial v} dv.$$

Daher ist der Differentialquotient von y:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{dx}.$$

Wir können dies sofort verallgemeinern:

Satz 5: Ist y als Funktion von x so gegeben, daß zunächst y als eine Funktion F von mehreren Größen $u, v, w \ldots$ vorliegt, die selbst Funktionen von x sind:

$$y = F(u, v, w \ldots),$$

so läßt sich der Differentialquotient von y berechnen nach der Formel:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{dw}{dx} + \ldots$$

Dies ist eine Verallgemeinerung der Kettenregel, S. 127.

10. **Beispiel:** Ist

$$y = (\sin x)^{(x^n)},$$

so setzt man:

$$u = \sin x, \qquad v = x^n, \qquad \text{also} \qquad y = u^v.$$

Dann kommt:

$$\frac{\partial y}{\partial u} = v u^{v-1}, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = u^v \ln u$$

(nach den Regeln für x^n und für a^x, vgl. 1. Beispiel, S. 327, worin a durch u und x durch v zu ersetzen ist). Mithin folgt:

$$\frac{dy}{dx} = v u^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx}$$

oder wegen der Bedeutung von u und v:

$$\frac{dy}{dx} = x^n (\sin x)^{x^n - 1} \cos x + (\sin x)^{(x^n)} \ln \sin x \,.\, n x^{n-1}.$$

Man kann dies aber auch mittels der Kettenregel berechnen, wenn man y nach der Anweisung auf S. 325 in eine Potenz mit der Basis e verwandelt:

$$y = e^{x^n \ln \sin x}.$$

11. Beispiel: Liegt die Funktion

$$y = \frac{\operatorname{arc} \sin x}{\ln x} \sqrt{x}$$

vor, so setzt man

$$u = \operatorname{arc} \sin x, \qquad v = \ln x, \qquad w = \sqrt{x}$$

und erhält

$$y = \frac{uw}{v}, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{w}{v}, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{uw}{v^2}, \qquad \frac{\partial y}{\partial w} = \frac{u}{v},$$

so daß

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x}}{\ln x} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\operatorname{arc} \sin x}{(\ln x)^2} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\operatorname{arc} \sin x}{\ln x} \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ist. Man findet dasselbe durch Anwendung der Produkt- und Bruchregel.

Wie in diesen beiden Beispielen kann man immer auch ohne die in Satz 5 ausgesprochene Regel verwickelte Funktionen von x differentiieren. Das neue Verfahren ist jedoch übersichtlicher, namentlich, wenn man soviel Gewandtheit erlangt hat, daß man nicht mehr hinzuschreiben braucht, was man unter $u, v, w \ldots$ verstehen will. –

Nach dieser Einschaltung kehren wir zu der Annahme zurück: *z sei eine Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen x und y:*

$$z = f(x, y).$$

Die partiellen Differentialquotienten $\partial z : \partial x$ und $\partial z : \partial y$ sind ebenfalls Funktionen von x und y. Lassen sie sich auch differentiieren und zwar sowohl partiell nach x als auch partiell nach y, so ergeben sich vier Ausdrücke:

$$(6) \qquad \frac{\partial \frac{\partial z}{\partial x}}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \frac{\partial z}{\partial x}}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \frac{\partial z}{\partial y}}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \frac{\partial z}{\partial y}}{\partial y}.$$

Die beiden ersten sind die partiellen Differentialquotienten von $\partial z : \partial x$ nach x und y und die beiden letzten die partiellen Differentialquotienten

von $\partial z:\partial y$ nach x und y. Diese Größen (6) heißen die **partiellen Differentialquotienten zweiter Ordnung** der Funktion z.

12. **Beispiel:** Ist $z = ax^2 + bxy + cy^2 + gx + hy + k$, so wird

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2ax + by + g, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = bx + 2cy + h,$$

also:

$$\frac{\partial \frac{\partial z}{\partial x}}{\partial x} = 2a, \quad \frac{\partial \frac{\partial z}{\partial x}}{\partial y} = b,$$

$$\frac{\partial \frac{\partial z}{\partial y}}{\partial x} = b, \quad \frac{\partial \frac{\partial z}{\partial y}}{\partial y} = 2c.$$

13. **Beispiel:** Ist $z = \sin(x + 2y) + x \ln y$, so wird

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(x + 2y) + \ln y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2\cos(x + 2y) + \frac{x}{y},$$

also:

$$\frac{\partial \frac{\partial z}{\partial x}}{\partial x} = -\sin(x + 2y), \qquad \frac{\partial \frac{\partial z}{\partial x}}{\partial y} = -2\sin(x + 2y) + \frac{1}{y},$$

$$\frac{\partial \frac{\partial z}{\partial y}}{\partial x} = -2\sin(x + 2y) + \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial \frac{\partial z}{\partial y}}{\partial y} = -4\sin(x + 2y) - \frac{x}{y^2}.$$

In beiden Beispielen zeigt sich, daß

$$\frac{\partial \frac{\partial z}{\partial x}}{\partial y} = \frac{\partial \frac{\partial z}{\partial y}}{\partial x} \tag{7}$$

ist, d. h. **wenn man $z = f(x, y)$ zuerst partiell nach x und das Ergebnis partiell nach y differentiiert, geht dasselbe hervor, als wenn man z zuerst partiell nach y und das Ergebnis partiell nach x differentiiert.**

Dies Gesetz gilt nun unter gewissen Voraussetzungen auch sonst, wie wir beweisen werden. Vorher noch eine Bemerkung: Den partiellen Differentialquotienten einer Funktion z oder $f(x, y)$ hinsichtlich x bezeichnet man bequemer mit z_x oder f_x; **man deutet also durch den angehängten Index an, nach welcher Veränderlichen partiell differentiiert worden ist.** Ebenso soll z_y oder f_y der partielle Differentialquotient von z oder f nach y sein. Demgemäß bezeichnen wir die Ausdrücke (6) mit z_{xx}, z_{xy}, z_{yx}, z_{yy}. Beispielsweise bedeutet z_{xy} den Ausdruck, der hervorgeht, wenn man z zuerst partiell nach x und dann

das Ergebnis partiell nach y differentiiert. Das Gesetz (7) drückt sich dann wie folgt aus:

$$z_{xy} = z_{yx}\,. \tag{8}$$

Der Beweis dafür, daß dies Gesetz allgemein gilt, vorausgesetzt, daß gewisse Stetigkeitsbedingungen erfüllt sind, ist nicht ganz einfach. Der Leser muß selbst entscheiden, ob er imstande ist, ihn zu verstehen, oder ob er es auf eine reifere Zeit aufschieben muß. Wir geben deshalb den Beweis in kleinem Druck. Wer ihn überschlagen will, lese bei Satz 6 weiter.

Wir setzen voraus, daß die Funktion $f(x, y)$ stetige partielle Ableitungen f_x, f_y, f_{xy} und f_{yx} habe. Ferner seien Δx und Δy beliebige Zunahmen von x und y. Auf die Differenz $f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$ wenden wir den Satz 13, S. 542, an, indem wir sie als eine Funktion von x auffassen, in der y und Δy die Rollen von beliebigen Konstanten spielen. Nach diesem Satze drückt sich der Wert, den jene Differenz annimmt, wenn x und Δx wächst, so aus:

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x, y+\Delta y) &- f(x+\Delta x, y) \\ &= f(x, y+\Delta y) - f(x, y) \\ &\quad + [f_x(x+\Theta_1\Delta x, y+\Delta y) - f_x(x+\Theta_1\Delta x, y)]\,\Delta x, \end{aligned}$$

wobei Θ_1 eine im Intervalle von 0 bis 1 gelegene Größe bedeutet. Diese Formel läßt sich auch so anordnen:

$$\left\{\begin{aligned} & f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y) \\ &\qquad = [f_x(x+\Theta_1\Delta x, y+\Delta y) - f_x(x+\Theta_1\Delta x, y)]\,\Delta x. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Nun können wir weiterhin $f_x(x+\Theta_1\Delta x, y)$ als eine Funktion von y auffassen, in der außerdem $x+\Theta_1\Delta x$ vorkommt. Auf diese Funktion von y wenden wir abermals den Satz 13, S. 542, an, indem wir also jetzt y um Δy zunehmen lassen. Dann kommt:

$$f_x(x+\Theta_1\Delta x, y+\Delta y) = f_x(x+\Theta_1\Delta x, y) + f_{xy}(x+\Theta_1\Delta x, y+\vartheta_1\Delta y)\,\Delta y,$$

wo ϑ_1 eine im Intervalle von 0 bis 1 gelegene Größe bedeutet. Wird dieser Wert in (9) rechts für $f_x(x+\Theta_1\Delta x, y+\Delta y)$ eingesetzt, so ergibt sich:

$$\left\{\begin{aligned} & f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y) \\ &\qquad = f_{xy}(x+\Theta_1\Delta x, y+\vartheta_1\Delta y)\,\Delta x\,\Delta y. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Zur Gewinnung der Formel (10) sind wir zuerst von $f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$ ausgegangen, indem wir diese Differenz als Funktion von x nach Satz 13, S. 542, für den Fall behandelten, wo x um Δx wächst. Aber wir hätten auch von der Differenz $f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$ ausgehen können, indem wir sie als Funktion von y nach Satz 13 für den Fall behandelten, wo y um Δy wächst. Deshalb ergibt sich weiterhin entsprechend der Formel (10) eine zweite Formel von derselben Art, in der aber x und y ihre Rollen vertauscht haben. Man bekommt so:

$$\left\{\begin{aligned} & f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) + f(x, y) \\ &\qquad = f_{yx}(x+\Theta_2\Delta x, y+\vartheta_2\Delta y)\,\Delta x\,\Delta y, \end{aligned}\right. \tag{11}$$

von Θ_2 und ϑ_2 im Intervalle von 0 bis 1 gelegenen Größen sind. Die linken Seiten der Gleichung (10) und (11) stimmen aber überein. Mithin muß dies auch von den

rechten Seiten gelten. Wenn wir sie einander gleichsetzen, heben sich die Faktoren Δx und Δy fort, so daß bleibt:

$$f_{xy}(x+\Theta_1 x, y+\vartheta_1 \Delta y) = f_{yx}(x+\Theta_2 \Delta x, y+\vartheta_2 \Delta y).$$

Da hierin $\Theta_1, \vartheta_1, \Theta_2, \vartheta_2$ im Intervalle von 0 bis 1 liegen und da f_{xy} und f_{yx} stetig sein sollen, ergibt sich für $\lim \Delta x = 0$, $\lim \Delta y = 0$:

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y),$$

was zu beweisen war.

Das Vorhergehende liefert den

Satz 6: Sind die partiellen Differentialquotienten f_x, f_y, f_{xy} und f_{yx} einer Funktion $f(x, y)$ stetig, so ist f_{xy} gleich f_{yx}, d. h. bei der Bildung von f_{xy} ist die Reihenfolge der beiden partiellen Differentiationen nach x und y gleichgültig.

Demnach gibt es nur drei partielle Differentialquotienten oder Ableitungen von der zweiten Ordnung, nämlich f_{xx}, f_{xy} und f_{yy}.

Es erhellt ohne weiteres, daß sich Entsprechendes auch bei der Bildung der Differentialquotienten höherer Ordnung zeigt, falls sie stetig sind. So ist z. B. $f_{xxy} = f_{xyx}$, weil der Satz 6 auf f_x statt f angewandt werden kann. Außerdem ist auch wegen $f_{xy} = f_{yx}$ sofort klar, daß $f_{xyy} = f_{yxx}$ ist. Demnach haben wir $f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$. Ebenso ist $f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$. Deshalb gibt es nur vier partielle Differentialquotienten oder Ableitungen von der dritten Ordnung, nämlich $f_{xxx}, f_{xxy}, f_{xyy}, f_{yyy}$.

Der Satz 6 ist auch auf Funktionen $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ von n Veränderlichen anwendbar. Denn wenn man f partiell nach x_k und das Ergebnis partiell nach x_l oder umgekehrt differentiiert, spielen alle übrigen Veränderlichen die Rollen von Konstanten. Also ist auch

$$f_{x_k x_l}(x_1, x_2, \ldots x_n) = f_{x_l x_k}(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

falls diese Differentialquotienten und außerdem f, f_{x_k} und f_{x_l} stetig sind.

Die partiellen Differentialquotienten dritter Ordnung von $f(x, y)$ bezeichnet man statt mit $f_{xxx}, f_{xxy}, f_{xyy}, f_{yyy}$ auch mit

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}.$$

Ganz entsprechende Bezeichnungsweisen gelten für die partiellen Differentialquotienten von beliebig hoher Ordnung

14. **Beispiel:** Ist $z = xy$, so wird $z_x = y$, $z_y = x$, $z_{xx} = 0$, $z_{xy} = 1$, $z_{yy} = 0$. Alle höheren partiellen Differentialquotienten sind gleich Null.

15. Beispiel: Ist $z = \sin x \cos y$, so wird $z_x = \cos x \cos y$, $z_y = -\sin x \sin y$ $z_{xx} = -\sin x \cos y$, $z_{xy} = -\cos x \sin y$, $z_{yy} = -\sin x \cos y$, $z_{xxx} = -z_x$, $z_{xxy} = -z_y$, $z_{xyy} = -z_x$, $z_{yyy} = -z_y$ usw.

16. Beispiel: Ist $z = x_1 x_2 + x_3 x_4$, so wird

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = x_2, \qquad \frac{\partial z}{\partial x_2} = x_1, \qquad \frac{\partial z}{\partial x_3} = x_4, \qquad \frac{\partial z}{\partial x_4} = x_3,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} = 1, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x_3 \partial x_4} = 1,$$

während alle übrigen partiellen Differentialquotienten gleich Null sind.

Ein gewandter Rechner macht von dem Umstande, daß die Reihenfolge der Differentiationen gleichgültig ist, Gebrauch, indem er den kürzesten Weg zur Berechnung einschlägt.

17. Beispiel: Ist $z = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + x_1 x_2 \sin x_3$ und soll $z_{x_1 x_2 x_3}$ berechnet werden, so ist es am bequemsten, zuerst nach x_3 zu differentiieren, da dann die Wurzel wegfällt:

$$\frac{\partial z}{\partial x_3} = x_1 x_2 \cos x_3, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_3} = x_2 \cos x_3, \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = \cos x_3.$$

§ 2. **Differentiation unentwickelter Funktionen.**

Unentwickelt nennt man Funktionen, die nicht ausgerechnet vorliegen, die man vielmehr erst aus einer vorgelegten Gleichung berechnen muß, um sie in entwickelter Form vor sich zu haben. (Vgl. S. 160.) Der einfachste Fall ist dieser:

Vorgelegt sei eine Gleichung mit zwei veränderlichen Größen x und y. Wenn man alle Glieder der Gleichung auf die linke Seite bringt, wird diese Seite eine Funktion F von x und y, so daß kommt:

$$F(x, y) = 0. \tag{1}$$

Gibt man x und y bestimmte Werte, so wird die linke Seite nicht gerade gleich Null, also die Bedingung (1) nicht erfüllt sein. Vielmehr darf man nur einer der beiden Größen x und y einen bestimmten Wert geben, z. B. dem x. Dann ist (1) eine Gleichung mit einer unbekannten (nicht mehr veränderlichen) Größe y, deren Wert man z. B. mittels der Regula falsi, S. 118, ermitteln könnte, falls es überhaupt eine Lösung gibt. Wenn die Gleichung (1) zu jedem Wert x innerhalb eines gewissen Bereiches einen Wert y liefert, bestimmt sie y als eine Funktion von x und zwar als eine unentwickelte oder implizite Funktion von x. Unter Umständen kann man die Gleichung (1) allgemein nach y auflösen, d. h. so schreiben, daß links nur y und rechts ein Ausdruck in x allein steht. Aber die Auflösung nach y durch Formelzeichen kann un-

bequem, ja auch unmöglich sein, wie z. B. bei der Gleichung $xy + \sin y = 0$. Unsere Differentiationsregeln beruhten jedoch immer auf der Voraussetzung, daß y als entwickelte Funktion von x gegeben sei. Hier also tritt eine Schwierigkeit ein: Infolge von (1) ist y eine gewisse Funktion von x, aber wie berechnet man ihre Differentialquotienten?

Dies geschieht so: Ändert sich x um sein Differential dx, so wird sich y um das zugehörige Differential dy ändern. Infolgedessen geht die linke Seite der Gleichung (1) in $F(x + dx,\ y + dy)$ über. Nun muß auch dieser Ausdruck nach der Vorschrift (1) gleich Null sein, d. h. es darf sich $F(x, y)$ nicht ändern, wenn x um dx und y um das zugehörige dy wächst. Nach Satz 1, S. 645, erfährt aber F dabei den Zuwachs

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy.$$

Also muß sein:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0.$$

Dividieren wir mit dx und bezeichnen wir $dy : dx$ mit y', so folgt:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0 \quad \text{oder:} \quad F_x + F_y y' = 0. \tag{2}$$

Hieraus können wir den gesuchten Differentialquotienten y' der Funktion y von x berechnen:

$$y' = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}. \tag{3}$$

Zu demselben Ergebnis kommt man, wenn man die Sachlage so auffaßt: Infolge von (1) ist y eine Funktion von x. Denkt man sich diese Funktion in (1) statt y eingeführt, so wird die linke Seite eine Funktion von x allein, die nach (1) stets gleich Null sein soll. Also ist auch ihr Differentialquotient gleich Null. Diese Funktion von x ist nun in (1) von der Form $F(u, v)$ wie in Satz 5, S. 650, wobei insbesondere $u = x$ und $v = y$, der gedachten Funktion von x, ist. Nach der Formel dieses Satzes ist also der Differentialquotient der als Funktion von x aufgefaßten linken Seite von (1) gleich

$$\frac{\partial F}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{dv}{dx}.$$

Wegen $u = x$ und $v = y$ ist hierin $du : dx = 1$ und $dv : dx = dy : dx = y'$ zu setzen. Also kommt, weil der vorstehende Differentialquotient gleich Null sein soll, die Formel (2) heraus.

Das Wesentliche dieser zweiten Auffassung der Sachlage ist also dies: Wir denken uns in (1) statt y die noch nicht berechnete Funktion von x, so daß alles nur x enthält, und differentiieren dann vollständig nach x, nicht partiell.

Dieselbe Schlußweise liefert auch den zweiten Differentialquotienten y'' von y nach x. In (2) stellen wir uns nämlich unter y, das ja in F_x und F_y vorkommt, die durch (1) bestimmte Funktion von x vor. Dann ist auch y' als eine Funktion von x aufzufassen. Die linke Seite von (2) enthält bei dieser Auffassung nur x und zwar in drei Arten: einmal frei als x selbst, dann in y und schließlich in y'. Die linke Seite hat also die Form $F(u, v, w)$, wo u, v, w Funktionen von x allein sind. Da die Gleichung (2) für beliebiges x gelten soll, muß der vollständige Differentialquotient von $F(u, v, w)$ nach x gleich Null sein. Er ist nach Satz 5, S. 650, zu berechnen, wobei jetzt $u = x$, $v = y$, $w = y'$, also

$$\frac{du}{dx} = 1, \qquad \frac{dv}{dx} = y', \qquad \frac{dw}{dx} = y''$$

ist. Die linke Seite von (2) gibt aber partiell nach u (d. h. x) differentiiert: $F_{xx} + F_{xy}y'$, dagegen partiell nach v (d. h. y) differentiiert: $F_{xy} + F_{yy}y'$, schließlich partiell nach w (d. h. y') differentiiert: F_y, denn w oder y' tritt nur an einer Stelle, mit dem Faktor F_y behaftet, auf, da F_x und F_y nur x und y, d. h. nur u und v enthalten. Da, wie gesagt, der vollständige Differentialquotient der linken Seite von (2) gleich Null sein muß, folgt also:

$$F_{xx} + F_{xy}y' + (F_{xy} + F_{yy}y')y' + F_y y'' = 0$$

oder:

$$F_{xx} + 2F_{xy}y' + F_{yy}y'^2 + F_y y'' = 0. \tag{4}$$

Hieraus kann man y'' berechnen:

$$y'' = -\frac{F_{xx} + 2F_{xy}y' + F_{yy}y'^2}{F_y}. \tag{5}$$

Dieselbe Art der Schlußfolgerung gilt auch für die Berechnung von y''', y^{IV} usw.

Die geometrische Bedeutung der Gleichung (1) oder $F(x, y) = 0$ liegt auf der Hand: Durch diese Gleichung wird y als eine Funktion von x gegeben, und diese Funktion y wird eine Bildkurve haben. Die Wertepaare x, y also, die der Forderung (1) Genüge leisten, bestimmen die Punkte $(x; y)$ einer Kurve in der Ebene. Somit ist (1) eine Verallgemeinerung der bisher benutzten Darstellung

$y = f(x)$ einer ebenen Kurve. Beispiele hierzu sind uns schon im vierten Kapitel begegnet. Denn nach Satz 2, S. 173, ist

$$Ax + By + C = 0 \tag{6}$$

die Gleichung einer **Geraden**. Nach Satz 6, S. 179, ist ferner

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0 \tag{7}$$

die Gleichung eines **Kreises**. Weiterhin stellt

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \tag{8}$$

nach S. 185 und S. 191 eine **Ellipse** oder **Hyperbel** dar, je nachdem das obere oder untere Vorzeichen gewählt wird.

Die Anwendung der Formel (2) auf diese Fälle gibt:

$$A + By' = 0,$$

$$x - a + (y - b)y' = 0,$$

$$\frac{x}{a^2} \pm \frac{yy'}{b^2} = 0$$

und also durch Auflösung nach y':

$$y' = -\frac{A}{B}, \qquad y' = -\frac{x-a}{y-b}, \qquad y' = \mp\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Die erste Formel besagt, daß die Gerade (6) die **konstante Steigung** $-A:B$ hat (siehe Satz 2, S. 173). Die Formel für die Steigung des Kreises wurde auf anderem Weg auf S. 180 unter (5) und die dritte für den Fall der Ellipse auf S. 188 unter (3) gefunden.

Die soeben erwähnten Beispiele sind besonders wichtig. Wir nehmen die Gelegenheit wahr, hier die Betrachtungen des vierten Kapitels zur **analytischen Geometrie** der Ebene in einigen Punkten zu erweitern. Dabei setzen wir wie damals voraus, **daß die x-Einheit gerade so groß wie die y-Einheit sei** (vgl. S. 171).

1. **Beispiel:** Die Gerade g, die durch die Gleichung

$$Ax + By + C = 0 \tag{9}$$

mit konstanten Koeffizienten A, B, C dargestellt wird, möge auf den Achsen die Strecken a und b abschneiden. Nach S. 175 ist $a = -C:A$ und $b = -C:B$, so daß statt (9) geschrieben werden kann:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0, \tag{10}$$

vgl. Satz 3, S. 175. Das Lot OU vom Anfangspunkt auf die Gerade g habe die positiv gemessene Länge p, siehe Fig. 405. Der Winkel, den die positive x-Achse beschreiben muß, um nach Lage und Richtung mit OU zusammenzufallen, sei α. Ist P irgendein Punkt $(x; y)$ der Geraden und Q der Fußpunkt seiner Ordinate, so ist die Summe der

Projektionen der Seiten OQ, QP, PO des Dreiecks OQP auf die Gerade OU gleich Null, nach Satz 11, S. 408. Aus der Figur liest man also sofort ab, daß für jeden Punkt $(x; y)$ der Geraden

(11) $$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

ist. Diese Darstellung der Geraden mit Hilfe der beiden Bestimmungsstücke p und α heißt die Hessesche Normalform nach dem Mathematiker Hesse (1811–1874). Es ist leicht, die Gleichung (9) auf diese Form zu bringen. Denn das Wesentliche der Gleichung (11) besteht darin, daß nach (4), S. 378, die Summe der Quadrate der Koeffizienten von x und y gleich Eins und das von x und y freie dritte Glied

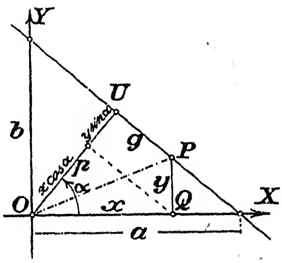


Fig. 405.

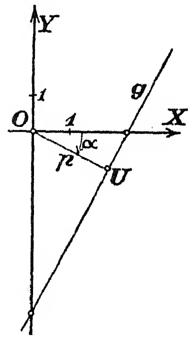


Fig. 406.

negativ ist. Das erste erreichen wir durch Division von (9) mit einer der beiden Quadratwurzeln aus $A^2 + B^2$, das zweite dadurch, daß wir die Quadratwurzel positiv oder negativ wählen, je nachdem C negativ oder positiv ist:

(12) $$x \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} + y \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0,$$

wo also $\sqrt{A^2+B^2}$ entgegengesetztes Vorzeichen wie C haben soll. Nun ist, wie die Vergleichung mit (11) lehrt (siehe auch Satz 5, S. 386):

(13) $$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad p = -\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Um z. B. die Geradengleichung

$$-2x + y + 5 = 0$$

auf die Normalform (11) zu bringen, dividieren wir sie mit der negativen Quadratwurzel aus $2^2 + 1^2$, also mit $-\sqrt{5}$. Dann kommt:

$$\tfrac{2}{5}\sqrt{5}\,x - \tfrac{1}{5}\sqrt{5}\,y - \sqrt{5} = 0,$$

wo $\sqrt{5}$ die positive Wurzel bedeutet. Mithin ist $\cos \alpha = \frac{2}{5}\sqrt{5}$, $\sin \alpha = -\frac{1}{5}\sqrt{5}$ und $p = \sqrt{5}$. Fig. 406 ist für diesen Fall entworfen

Wenn P oder $(x; y)$ kein Punkt der Geraden g selbst, vielmehr irgendein Punkt in der Ebene ist, werden seine Koordinaten die Gleichung (11) nicht erfüllen, d. h. für ihn hat $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p$ einen von Null verschiedenen Wert. Diesem Wert kommt nun eine geometrische Bedeutung zu. Nach Fig. 407

ist nämlich $x \cos\alpha = OQ \cos\alpha = OV$, ferner $y \sin\alpha = QP \sin\alpha = VW$, demnach $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = OV + VW - OU = UW$. Nun ist UW gerade so groß wie der Abstand $l = RP$ des Punktes P von der Geraden g, und zwar erscheint er mit einem Vorzeichen behaftet. Wenn man also in der linken Seite der Normalform (11) einer Geraden die Koordinaten x, y irgendeines Punktes P der Ebene einsetzt, ist der Wert der linken Seite nicht gleich Null, sondern gleich der Entfernung des Punktes P von der Geraden und zwar mit Plus- oder Minuszeichen, je nachdem P, vom Anfangspunkt O aus betrachtet, jenseits oder diesseits der Geraden liegt. Im Fall der Fig. 406 ergibt sich, daß z. B. der Punkt (3; 2) von der Geraden den Abstand hat:

$$\tfrac{2}{5}\sqrt{5}\,.\,3 - \tfrac{1}{5}\sqrt{5}\,.\,2 - \sqrt{5} \quad\text{oder}\quad -\tfrac{1}{5}\sqrt{5}.$$

Eine wichtige Anwendung ist diese: In der xy-Ebene sei wie unter B., S. 246 u. f., ein Flächenstück F gegeben, das durch unendlich dichte Parallelen

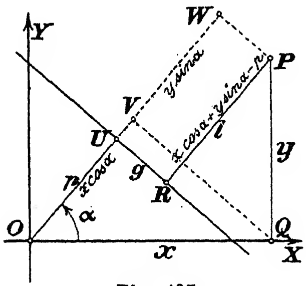


Fig. 407.

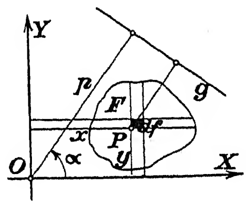


Fig. 408.

zu den Achsen in unendlich kleine Rechtecke zerlegt werde, wie es Fig. 408 andeutet. Das an der Stelle P oder $(x;\, y)$ gelegene Rechteck hat eine unendlich kleine Fläche df, deren statische Momente in bezug auf die x- und y-Achse offenbar die Werte $y\,df$ und $x\,df$ haben. Ist g irgendeine Gerade der Ebene, die von O einen Abstand p hat, der mit der x-Achse den Winkel α bildet, so hat P von dieser Geraden den Abstand $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p$, also das Rechteck in bezug auf g das statische Moment $(x\cos\alpha + \sin\alpha - p)\,df$. Das statische Moment der ganzen Fläche F in bezug auf eine Gerade ist nach S. 250 gleich der Summe der statischen Momente aller Teile. Die Summe aller $y\,df$ sei M_x, die Summe aller $x\,df$ sei M_y, und die Summe aller $(x\cos\alpha + y\sin\alpha - p)\,df$ oder also aller $\cos\alpha\,.\,x\,df + \sin\alpha\,.\,y\,df - p\,.\,df$ sei M_g. Da überdies die Summe aller df die Fläche F ist, folgt:

$$M_g = \cos\alpha\,.\,M_y + \sin\alpha\,.\,M_x - p\,F\,. \tag{14}$$

Hiernach kann man das statische Moment M_g der Fläche F für eine beliebige Gerade g berechnen, sobald man ihre statischen Momente M_x für M_y für die x- und y-Achse und die Größe der Fläche kennt.

Der Punkt S mit den Koordinaten

$$\mathfrak{x} = \frac{M_y}{F}, \qquad \mathfrak{y} = \frac{M_x}{F}$$

hat von der Geraden g den Abstand

$$s = \mathfrak{x}\cos\alpha + \mathfrak{y}\sin\alpha - p = \frac{1}{F}(\cos\alpha\,.\,M_y + \sin\alpha\,.\,M_x - p\,F),$$

d. h. nach (14):

$$s = \frac{M_g}{F}.$$

Also ist $sF = M_g$. Mithin ist der Punkt S so beschaffen, daß die Fläche F in bezug auf jede Gerade g dasselbe statische Moment hat wie der Punkt S, falls man sich in diesem Punkte die Gesamtmasse der Fläche vereinigt denkt. Damit ist die auf S. 252 am Eingang von 𝔖. aus der Mechanik entlehnte Tatsache vom Vorhandensein eines Schwerpunktes S bewiesen.

2. Beispiel: Unter einer Kurve zweiter Ordnung versteht man eine Kurve, die durch eine Gleichung zweiten Grades in x und y, also durch eine Gleichung von der Form

$$(15) \qquad A x^2 + B x y + C y^2 + D x + E y + G = 0$$

dargestellt wird, wo A, B, C, D, E, G Konstanten bedeuten. Wenn die Konstanten so beschaffen sind, daß

$$(16) \qquad 4AC - B^2 \neq 0$$

ist, kann man leicht einsehen, daß es Konstanten m, n, r, p, q, α derart gibt, daß die Gleichung (15) die Form annimmt:

$$(17) \qquad m(x\cos\alpha + y\sin\alpha - p)^2 + n(-x\sin\alpha + y\cos\alpha - q)^2 + r = 0.$$

Denn wenn man diese Gleichung ausrechnet und die Koeffizienten von x^2, xy usw. mit A, B usw. in (15) vergleicht, kommt man zu den folgenden sechs Bedingungen für m, n, r, p, q, α:

$$m\cos^2\alpha + n\sin^2\alpha = A, \qquad 2(m-n)\sin\alpha\cos\alpha = B,$$
$$m\sin^2\alpha + n\cos^2\alpha = C,$$
$$-2mp\cos\alpha + 2nq\sin\alpha = D, \qquad -2mp\sin\alpha - 2nq\cos\alpha = E,$$
$$mp^2 + nq^2 + r = G.$$

Die erste und dritte Bedingung lassen sich durch Addition und Subtraktion umformen, so daß sie und die zweite nach Satz 17, S. 412, die Formen annehmen:

$$m + n = A + C, \qquad (m-n)\cos 2\alpha = A - C, \qquad (m-n)\sin 2\alpha = B,$$

woraus sich m, n und α berechnen lassen, falls $4AC - B^2 \neq 0$ ist. Dabei ist

$$(m+n)^2 - (m-n)^2 = 4AC - B^2.$$

Die vierte und fünfte Bedingung geben ferner p und q und die letzte r. Die Überführung von (15) in (17) hat nun eine wichtige geometrische Bedeutung. Denn

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \qquad -x\sin\alpha + y\cos\alpha - q = 0$$

sind die Normalformen[1] der Gleichungen zweier zueinander senkrechter Geraden g und h, da sich die zweite Gleichung ja so schreiben läßt:

$$x\cos(\alpha + \tfrac{1}{2}\pi) + y\sin(\alpha + \tfrac{1}{2}\pi) - q = 0.$$

Ist nun P oder $(x; y)$ ein Punkt der Kurve (15) und sind $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ seine Abstände von g und h, siehe Fig. 409, so besagt daher (17), daß

$$m\mathfrak{x}^2 + n\mathfrak{y}^2 + r = 0$$

[1] Ob die Berechnung für p und q wirklich positive Werte liefert, wie auf S. 659 gefordert wurde, ist für das folgende ohne Belang, weil in (17) nur die Quadrate der linken Seiten der Normalformen vorkommen.

ist. Benutzen wir h und g als neue rechtwinklige Koordinatenachsen mit den Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$, so haben wir hierdurch die Kurvengleichung (15) auf eine viel einfachere Form zurückgeführt. Verschiedene Fälle sind dabei möglich: Ist zunächst $r = 0$, so gibt die letzte Gleichung $\mathfrak{y}:\mathfrak{x} = \pm\sqrt{-m:n}$, d. h. die Kurve zerfällt in die beiden Geraden:

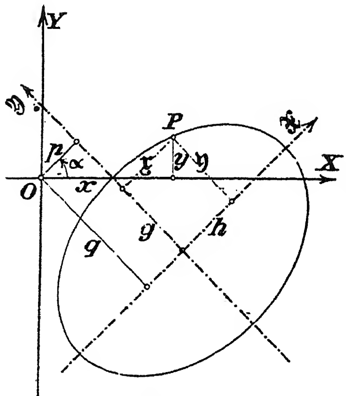


Fig. 409.

$$\mathfrak{y} = \pm\,\mathfrak{x}\sqrt{-\frac{m}{n}},$$

die allerdings imaginär sind, wenn m und n dasselbe Zeichen haben. Ist dagegen $r \neq 0$, so dividieren wir mit $-r$ und erhalten:

$$\text{konst. } \mathfrak{x}^2 + \text{konst. } \mathfrak{y}^2 - 1 = 0.$$

Sind beide Konstanten positiv, so liegt nach (1), S. 185, eine Ellipse vor; sind sie von verschiedenen Vorzeichen, so liegt nach (1), S. 191, eine Hyperbel vor; sind sie negativ, so ist die Gleichung reell nicht erfüllbar, die Kurve ist dann imaginär.

Unsere Fig. 409 bezieht sich auf das Beispiel:

(18) $$3x^2 - 2xy + 3x^2 - 14x + 10y + 11 = 0.$$

Hier ergibt sich $\alpha = \frac{1}{4}\pi$, $m = 2$, $n = 4$, $p = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $q = -\frac{3}{2}\sqrt{2}$, $r = -8$. Dabei ist $\sqrt{2}$ positiv. Demnach wird die neue Kurvengleichung:

$$2\mathfrak{x}^2 + 4\mathfrak{y}^2 - 8 = 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{\mathfrak{x}^2}{4} + \frac{\mathfrak{y}^2}{2} = 1,$$

so daß eine Ellipse mit den Halbachsen $a = 2$ und $b = \sqrt{2}$ vorliegt. Die Ellipsenachsen liegen auf den durch

$$x\cos\tfrac{1}{4}\pi + y\sin\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 0, \qquad -x\sin\tfrac{1}{4}\pi + y\cos\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{3}{2}\sqrt{2} = 0$$

dargestellten Geraden g und h. Die zweite Geradengleichung schreiben wir, um ihr wie in (11) ein negatives letztes Glied zu geben, so:

$$x\cos(-\tfrac{1}{4}\pi) + y\sin(-\tfrac{1}{4}\pi) - \tfrac{3}{2}\sqrt{2} = 0.$$

Die Geraden g und h erhält man also wie folgt: Man setzt an die positive x-Achse die Winkel $\frac{1}{4}\pi$ und $-\frac{1}{4}\pi$ an, trägt auf ihren freien Schenkeln die Strecken $p = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $q = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ ab und errichtet in den Endpunkten die Lote g und h auf den Schenkeln.

Bisher nahmen wir an, daß die Koeffizienten A, B, C in der vorgelegten Gleichung (15) die Bedingung (16) erfüllen. Wenn dagegen

(19) $$4AC - B^2 = 0$$

ist, gehen wir so vor: A und C haben beide dasselbe Vorzeichen, da ihr Produkt nach (19) positiv ist. Auch sind nicht beide gleich Null, denn sonst wäre auch $B = 0$, d. h. die Gleichung (15) wäre in x und y linear und stellte also bloß eine Gerade dar. Demnach ist $A + C \neq 0$. Falls A und C negativ sind, können wir die vorgelegte Gleichung (15) mit -1 multiplizieren, so daß die Koeffizienten von x^2 und y^2 positiv werden.

Also dürfen wir A und C positiv annehmen. Nun gibt es nach Satz 5, S. 386, einen Winkel α, für den

$$\text{cso}\,\alpha = \sqrt{\frac{A}{A+C}}, \qquad \sin\alpha = \sqrt{\frac{C}{A+C}}$$

ist, wobei wir die Vorzeichen der Wurzeln so wählen wollen, daß $\sin\alpha \,.\, \cos\alpha$ dasselbe Vorzeichen wie B erhält. Dann aber können wir die Gleichung (15) wegen (19) so schreiben:

$$(A+C)(x\cos\alpha + y\sin\alpha)^2 + Dx + Ey + G = 0\,.$$

Ferner gibt es zwei Konstanten m und n derart, daß

$$m\cos\alpha - n\sin\alpha = D\,, \qquad m\sin\alpha + n\cos\alpha = E$$

wird, weil sich m und n hieraus berechnen lassen. Also läßt sich die Gleichung (15) auch so schreiben:

$$(20)\quad \begin{cases} (A+C)(x\cos\alpha + y\sin\alpha)^2 + m(x\cos\alpha + y\sin\alpha) \\ \qquad\qquad + n(-x\sin\alpha + y\cos\alpha) + G = 0\,. \end{cases}$$

Ziehen wir nun durch den Anfangspunkt die Gerade g, die mit der positiven x-Achse den Winkel α bildet, und die dazu senkrechte Gerade h, und benutzen wir diese beiden Geraden als neue $\mathfrak{y}$- und $\mathfrak{x}$-Achse, so hat ein Punkt P oder $(x;y)$ der Kurve von g und h die Abstände

$$\mathfrak{x} = x\cos\alpha + y\sin\alpha \quad \text{und} \quad \mathfrak{y} = -x\sin\alpha + y\cos\alpha\,,$$

so daß nach (20) die Gleichung der Kurve im neuen Achsenkreuze so lautet:

$$(21)\qquad (A+C)\mathfrak{x}^2 + m\mathfrak{x} + n\mathfrak{y} + G = 0\,.$$

Im Fall $n \neq 0$ geht durch Auflösen nach $\mathfrak{y}$ hervor:

$$\mathfrak{y} = -\frac{A+C}{n}\mathfrak{x}^2 - \frac{m}{n}\mathfrak{x} - \frac{G}{n}\,.$$

Die Kurve ist daher nach S. 95 eine Parabel. Ist dagegen $n = 0$, so wird (21) frei von y und liefert für x zwei Konstanten, d. h. dann besteht die Kurve, falls die Konstanten reell sind, aus zwei parallelen Geraden (parallel zu g), während sie, falls die Konstanten imaginär sind, imaginär wird.

Wir haben also gesehen: Jede Kurve zweiter Ordnung, d. h. jede Kurve, die durch eine Gleichung zweiten (nicht nur ersten) Grades

$$(22)\qquad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + G = 0$$

gegeben wird, ist entweder eine Ellipse oder eine Hyperbel oder eine Parabel oder ein Geradenpaar oder imaginär. Dazu gehören auch die Kreise, die man als Ellipsen mit gleich langen Achsen aufzufassen hat.

Man kann beweisen, daß der Schnitt einer Kreiskegels mit irgendeiner Ebene stets eine Kurve zweiter Ordnung liefert, weshalb diese Kurven auch kurzweg die Kegelschnitte heißen. Insbesondere ergibt sich eine Ellipse, wenn die schneidende Ebene zu keiner Mantellinie des Kegels parallel ist, eine Hyperbel, wenn sie zu zwei verschiedenen Mantellinien parallel ist[1], und eine Parabel, wenn sie zu einer Tangentialebene des Kegels parallel ist. In allen

[1] Man findet vielfach die Aussage, eine Hyperbel sei der Schnitt des Kegels mit einer Ebene parallel zur Kegelachse. An sich ist das richtig, aber auch andere Schnitte des Kegels mit Ebenen liefern Hyperbeln.

diesen Fällen wird vorausgesetzt, daß die schneidende Ebene nicht durch die Kegelspitze gehe. Tut sie es aber, so zerfällt die Schnittkurve in zwei Geraden oder sie ist imaginär. Die Kreiszylinder sind besondere Fälle von Kreiskegeln. Sie werden von beliebigen Ebenen in Ellipsen und von Ebenen parallel zu ihrer Richtung, wenn überhaupt, in Paaren von parallelen Geraden geschnitten.

3. Beispiel: In der Ebene sei eine Gerade l und ein Punkt F gegeben. Ein Punkt P bewege sich in der Ebene so, daß das Verhältnis seiner Abstände von F und l beständig dasselbe bleibt, also immer denselben Wert ε hat, wobei ε als eine positive Zahl gewählt sei. Wie lautet die Gleichung der Bahnkurve von P? Das Lot von F auf die Gerade l sei die x-Achse und die Gerade l selbst die y-Achse, siehe Fig. 410. Ferner sei $OF = m$, einer positiven Konstante. Hat der bewegliche Punkt P die Koordinaten x und y, so zeigt die Figur, daß wir zu fordern haben:

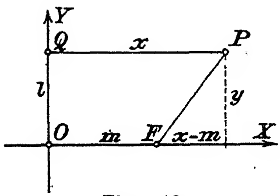


Fig. 410.

$$\frac{\sqrt{(x-m)^2+y^2}}{x} = \varepsilon .$$

Quadrieren, Ausmultiplizieren und Ordnen gibt:

$$(1-\varepsilon^2)x^2 + y^2 - 2mx + m^2 = 0 , \tag{23}$$

d. h. eine Gleichung zweiten Grades in x und y. Folglich ist die Bahn von P eine Kurve zweiter Ordnung. Je nachdem die gegebene Konstante $\varepsilon < 1$, $= 1$ oder > 1 ist, gehen verschiedene Arten hervor:

Zunächst sei $\varepsilon = 1$. Dann wird gefordert, daß P stets von F denselben Abstand wie von l habe. Dieser Fall wurde schon im 4. Beispiele, S. 55 u. f. betrachtet. Damals ergab sich als Ort von P eine Parabel. Dies können wir bestätigen: Aus (23) folgt nämlich im Fall $\varepsilon = 1$:

$$y^2 = 2mx - m^2 \quad \text{oder} \quad x = \frac{1}{2m}y^2 + \tfrac{1}{2}m. \tag{24}$$

Diese Gleichung stellt nach S. 95 eine Parabel dar, deren Achse die x-Achse ist (denn x ist hier mit y vertauscht). Auf S. 56 erkannten wir, daß die Kurventangente t den Winkel der gleichen Abstände FP und QP des Punktes P von F und l in gleiche Teile zerlegt, siehe Fig. 411. Auch dies können wir bestätigen: Differentiation der ersten Gleichung (24) in Gemäßheit der Formel (2) gibt $yy' = m$, d. h. $y' = m : y$. In Fig. 411 ist daher $\operatorname{tg}\tau = m : y$ (vgl. S. 448). Aber auch der Tangens von $\sphericalangle OQF$ ist gleich $m : y$, also die Tangente t senkrecht zu FQ. Da $FP = QP$ ist, muß daher t den $\sphericalangle FPQ$ in gleiche Teile zerlegen, indem t die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks FPQ von der Spitze P aus ist. Der Fußpunkt R dieser Höhe ist somit die Mitte von FQ, so daß R auf der Tangente s des Scheitels S der Parabel liegt. Wenn sich also ein rechter Winkel FRP so be-

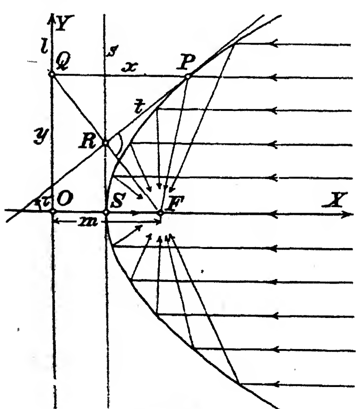


Fig. 411.

wegt, daß sein Scheitel R eine Gerade s durchläuft und einer seiner Schenkel durch einen festen Punkt F geht, hüllt sein anderer Schenkel RP eine Parabel ein. Der Punkt F heißt der Brennpunkt und die Gerade l die Leitlinie oder Direktrix der Parabel. Die Gerade FP wird der Brennstrahl von P genannt. Auf der Eigenschaft der Tangente beruht die Anwendung der Parabel bei Fernrohren: Der parabolische Hohlspiegel, der durch Drehung der Parabel um ihre Achse OF entsteht und auf der Innenseite (d. h. derjenigen Seite, die F enthält) reflektiert, fängt alle zur Achse parallelen Lichtstrahlen so auf, daß sie nach dem Brennpunkte F hin abgelenkt werden. Von einem Himmelskörper, der in der Richtung der positiven x-Achse liegt, entsteht demnach in F ein optisches Bild, das man mittels eines Mikroskopes betrachten kann.

Zweitens sei $\varepsilon < 1$. Dann liegen die Punkte P näher bei F als bei l: Da $1 - \varepsilon^2$ jetzt positiv ist, läßt sich (23) so schreiben:

$$\left[x - \frac{m}{1-\varepsilon^2}\right]^2 + \frac{y^2}{1-\varepsilon^2} = \frac{\varepsilon^2 m^2}{(1-\varepsilon^2)^2}.$$

Führen wir als neue y-Achse die in Fig. 412 strichpunktierte Parallele zur y-Achse durch den Punkt M der x-Achse mit der Abszisse $m:(1-\varepsilon^2)$ ein, und bezeichnen wir die neue Abszisse mit $\mathfrak{x}$, so kommt:

$$\mathfrak{x}^2 + \frac{y^2}{1-\varepsilon^2} = \frac{\varepsilon^2 m^2}{(1-\varepsilon^2)^2}$$

oder:

$$\frac{(1-\varepsilon^2)^2}{\varepsilon^2 m^2}\mathfrak{x}^2 + \frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2 m^2} y^2 = 1. \tag{25}$$

Da $1 - \varepsilon^2$ positiv ist, liegt die Gleichung einer Ellipse vor, vgl. (1) auf S. 185. Ihre große und kleine Halbachse sind:

$$a = \frac{\varepsilon m}{1-\varepsilon^2}, \qquad b = \frac{\varepsilon m}{\sqrt{1-\varepsilon^2}},$$

und M stellt den Mittelpunkt dar. Man findet

$$FM = \frac{m}{1-\varepsilon^2} - m = \frac{\varepsilon^2 m}{1-\varepsilon^2} = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

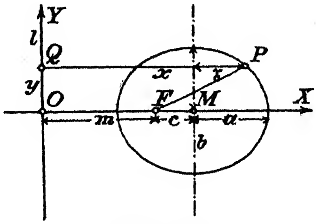


Fig. 412.

Somit ist FM die auf S. 185 mit c bezeichnete Strecke. Dies besagt: Der Punkt F ist einer der beiden Brennpunkte der Ellipse (siehe S. 190). Die Gerade l heißt die zu diesem Brennpunkte gehörige Leitlinie oder Direktrix. Wegen der Symmetrie der Ellipse gehört nämlich zu ihrem andern Brennpunkt auch eine Leitlinie. Man findet ferner $\varepsilon = c:a$, d. h. das konstante Verhältnis der Abstände FP und QP eines beliebigen Punktes P der Ellipse von einem Brennpunkte F und von der zugehörigen Leitlinie l ist gleich dem Verhältnis von $c = FM$ zur halben großen Achse a. Diese Größe ist die Exzentrizität der Ellipse (siehe S. 190). Sie liegt zwischen 0 und 1. Fig. 412 ist für die Annahme $\varepsilon = \frac{1}{2}$ entworfen.

Drittens kommen wir zum Fall $\varepsilon > 1$. Man kann hier gerade so wie im vorigen Fall eine neue y-Achse, also neue Abszissen $\mathfrak{x}$ einführen. Aber hier ist

$OM = m : (1 - \varepsilon^2)$ negativ. siehe Fig 413, so daß der Koeffizient von y^2 in (25) negativ wird. Die Gleichung (25) schreiben wir daher jetzt besser so:

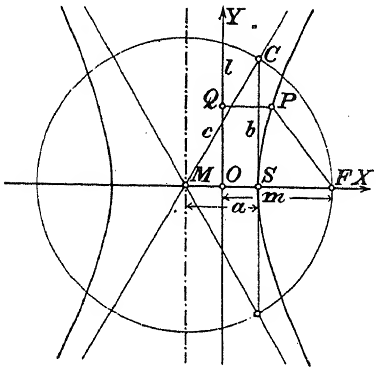


Fig. 413.

$$(26)\qquad \frac{(\varepsilon^2-1)^2}{\varepsilon^2 m^2}\,\mathfrak{x}^2 - \frac{\varepsilon^2-1}{\varepsilon^2 m^2}\,y^2 = 1\,.$$

Ihre Vergleichung mit (1) auf S. 191 zeigt, daß die Kurve eine Hyperbel mit dem Mittelpunkte M ist. Dabei sind die damals mit a und b bezeichneten Größen:

$$a = \frac{\varepsilon m}{\varepsilon^2 - 1}\,, \qquad b = \frac{\varepsilon m}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}\,.$$

Wir überlassen es dem Leser, zu beweisen, daß jetzt wieder F einer der beiden Brennpunkte (vgl. S. 193) ist. Die Gerade l heißt die zu ihm gehörige Leitlinie oder Direktrix; wegen der Symmetrie der Hyperbel gehört auch zum andern Brennpunkt eine Leitlinie. In bekannter Weise bestimmt man ferner die Asymptoten der Hyperbel, siehe die Ermittelung des Punktes C mittels der Tangente des Scheitels S und des Kreises um M mit dem Radius MF (vgl. auch

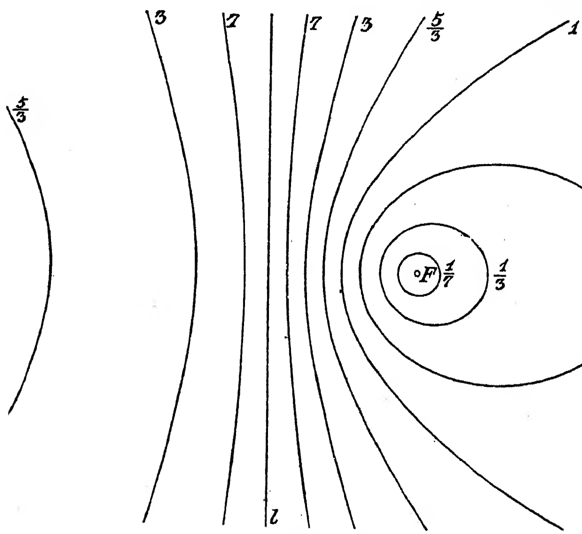


Fig. 414.

Fig. 136, S. 191). Wenn wir die Strecke $MF = c$ setzen, ergibt sich wie im Fall der Ellipse $\varepsilon = c : a$, und man nennt diese Zahl die Exzentrizität der Hyperbel. Sie ist größer als Eins. Fig. 413 ist für die Annahme $\varepsilon = 2$ entworfen [1].

[1] Die Eigenschaft $FP : QP = \varepsilon$ gilt wohlbemerkt auch für alle Punkte P des zweiten Hyperbelastes!

Demnach hat sich ergeben: Bewegt sich Punkt P in der Ebene so, daß das Verhältnis ε seines Abstandes von einem festen Punkt F und seines Abstandes von einer festen und nicht durch F gehenden Geraden l konstant bleibt, so beschreibt er eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem dies Verhältnis $\varepsilon < 1$, $= 1$ oder > 1 ist. Der Punkt F ist ein Brennpunkt, die Gerade l die zugehörige Leitlinie Dies soll Fig. 414 veranschaulichen, worin zu einem Brennpunkte F und der zugehörigen Leitlinie l eine Anzahl von Kurven gezeichnet sind, deren Punkte von F und l jeweils ein konstantes Abstandsverhältnis haben. Wir haben diejenigen Kurven gewählt, die durch die Achtelteilpunkte des Lotes von F auf l gehen, also $\varepsilon = \frac{1}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, 1, \frac{5}{3}$, 3 und 7 gesetzt. Zusammengehörige Hyperbelzweige erkennt man an der Angabe des zugehörigen Wertes von ε. Zu $\varepsilon = 1$ gehört die Parabel.

§ 3. Grundbegriffe der analytischen Geometrie des Raumes.

Solange wir uns mit Funktionen von nur einer Veränderlichen beschäftigten, benutzten wir zu ihrer geometrischen Veranschaulichung Bildkurven in der Ebene. Wollen wir aber auch für Funktionen von zwei unabhängigen Veränderlichen eine geometrische Vorstellung gewinnen, so verwenden wir den Raum mit seinen drei Dimensionen. Dies gibt uns Gelegenheit, die Grundbegriffe der sogenannten analytischen Geometrie des Raumes zu entwickeln.

Eine Stelle in einem rechteckigen Zimmer kann man bestimmen, indem man ihre Höhe über dem Fußboden und ihre Entfernungen von zwei aneinanderstoßenden Zimmerwänden mißt. Ersetzt man den Fußboden und die beiden Wände durch drei unbegrenzte Ebenen, die rechte Winkel miteinander bilden, durch sogenannte Koordinatenebenen, so liegt die Bestimmung eines Punktes des Raumes durch drei rechtwinklige Koordinaten vor. Diese Koordinaten sind die Lote vom Punkt auf die drei Ebenen. Der Schnittpunkt O aller drei Ebenen heißt der Anfangspunkt, und die Schnittgeraden der Ebenen zu je zweien heißen die Koordinatenachsen. Man erleichtert sich die räumliche Vorstellung durch bestimmte Annahmen über die Lage des Achsenkreuzes. Wir stellen uns etwa die eine Ebene wie jenen Fußboden wagerecht vor; in ihr laufe eine Achse, die x-Achse, von O auf uns zu, während die in ihr gelegene zweite Achse, die y-Achse, von O nach rechts gehe. Die dritte Achse, die z-Achse, soll von O lotrecht emporsteigen. In diesem Sinn seien die Achsen mit Pfeilen versehen und positiv genannt, siehe Fig. 415. Die rückwärtigen Verlängerungen der Achsen über O hinaus sind die negativen Achsen. Die Koordinatenebenen heißen die xy-Ebene, die yz-Ebene und die zx-Ebene nach den in ihnen gelegenen Achsen. Die Ebenen teilen den Raum in acht Gebiete; diese Oktanten seien mit I bis VIII bezeichnet und zwar so, daß die Oktanten I bis IV über den auf S. 25 mit 1 bis 4 bezeichneten Quadranten der xy-Ebene liegen, während sich die Oktanten V bis VIII entsprechend darunter

befinden. (In Fig. 415 ist der Oktant VII verdeckt.) Die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z eines Punktes P, nämlich die Lote von P auf die $y\,z$-Ebene, die $z\,x$-Ebene und die $x\,y$-Ebene sollen positiv oder negativ gerechnet werden, je nachdem der Sinn vom jeweiligen Fußpunkte nach P hin mit dem Sinn der zur Koordinate parallelen Achse übereinstimmt oder nicht. Den Koordinaten eines Punktes kommen daher je nach dem Oktanten, in dem der Punkt liegt, die in der folgenden Übersicht angegebenen Vorzeichen zu:

Oktant	x y z	Oktant	x y z
I	+ + +	V	+ + —
II	— + +	VI	— + —
III	— — +	VII	— — —
IV	+ — +	VIII	+ — —

Diese Übersicht enthält alle überhaupt möglichen Annahmen über drei Vorzeichen. Liegt der Punkt in einer Koordinatenebene, so ist eine Koordinate gleich Null. Beispielsweise besagt $z = 0$, daß der Punkt in der $x\,y$-Ebene liegt. Für die Punkte einer Koordinatenachse sind zwei Koordinaten gleich Null, so für die Punkte der z-Achse die Koordinaten x und y. Der Anfangspunkt O ist diejenige Stelle, deren Koordinaten sämtlich gleich Null sind.

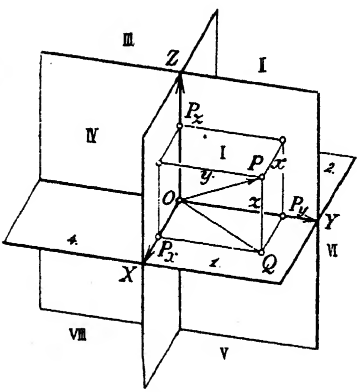


Fig. 415.

Jede Koordinate x, y, z wird mit einer bestimmt zu wählenden Einheit gemessen. Die drei Einheiten können verschieden lang sein; man kennzeichnet sie durch Angabe der E i n h e i t s p u n k t e auf den Achsen.

Jeder bestimmte Punkt des Raumes hat bestimmte Koordinaten. Umgekehrt: Zu irgend drei bestimmt gewählten Werten x, y, z gehört ein und nur ein Punkt, dessen Koordinaten gleich x, y, z sind. Diesen Punkt bezeichnen wir als den Punkt $(x; y; z)$.

Wir wollen nun aus demselben Grund wie auf S. 171 die E i n h e i t e n d e r A c h s e n e i n a n d e r g l e i c h w ä h l e n. Unsere Absicht ist nämlich, geometrische Betrachtungen im Raum rechnerisch mit

Hilfe der Koordinaten wiederzugeben; und dabei empfiehlt es sich eine einzige bestimmte Längeneinheit im Raum anzunehmen. Wir bemerken aber, daß einige der folgenden Ergebnisse auch dann richtig bleiben, wenn die Einheiten verschieden lang sind. Dies heben wir gelegentlich durch Anmerkungen hervor.

Die Ebenen, die man durch einen Punkt P oder $(x; y; z)$ parallel zu den Koordinatenebenen legen kann, schließen zusammen mit diesen einen Körper ein, den man nicht gerade kurz ein dreifach rechtwinkliges Parallelepiped nennt. Wir ziehen den einfacheren Namen Quader vor. Eine Kiste oder ein Ziegelstein gibt eine gute Anschauung. Je vier aller zwölf Kanten des Quaders sind gleich einer der Koordinaten von P. Die Lote von P auf die Achsen sind drei Eckpunkte P_x, P_y, P_z des Quaders, siehe Fig. 415, wo aber diese Lote selbst nicht eingezeichnet sind. Die senkrechten Projektionen der Strecke OP auf die Achsen sind gleich den Koordinaten des Punktes P. Die Länge der Strecke OP ermittelt man durch zweimalige Anwendung des Pythagoreischen Satzes. Ist nämlich Q der Fußpunkt der z-Koordinate, so ist das Dreieck OP_xQ an der Ecke P_x rechtwinklig und also OQ^2 gleich $x^2 + y^2$. Ferner ist das Dreieck OQP an der Ecke Q rechtwinklig und also OP^2 gleich $OQ^2 + z^2$. Demnach folgt:

$$OP^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{1}$$

Die Strecke OP werde im Sinn von O nach P mit einem Pfeil versehen. Sie bildet mit den positiven Achsen gewisse Winkel α, β, γ. Zur Festlegung eines Winkels gehört nach S. 375, daß der Drehsinn angegeben sei, in dem er gemessen werden soll. Die Ebenen von Winkeln im Raum können aber alle möglichen Stellungen haben, und es gibt kein Mittel, durch eine allgemeine Vorschrift in allen Ebenen des Raumes bestimmte Drehsinne festzusetzen. Nun wissen wir aber, daß der Kosinus des Winkels zweier Geraden g und h einen Wert hat, der vom Drehsinn unabhängig ist, denn nach (3), S. 406, ist $\cos gh = \cos hg$. Dies gilt nicht für den Sinus, Tangens oder Kotangens. Deshalb benutzt man im Raum nur die Kosinus der Winkel; sie haben bestimmte Werte, sobald nur die Schenkel mit Pfeilen versehen sind. Der Kosinus hat einen positiven oder negativen Wert, je nachdem derjenige Winkel, der zwischen den mit Pfeilen versehenen Schenkeln liegt, spitz oder stumpf ist. Wir weisen bei dieser Gelegenheit auch auf die dem Leser vielleicht ungewohnte Auffassung hin, nach der zwei Geraden auch dann, wenn sie sich nicht schneiden, Winkel miteinander bilden. Die Schenkel dieser Winkel bekommt man nämlich, wenn man die Geraden so weit parallel mit sich verschiebt, bis sie einander schneiden. Dabei leuchtet nämlich ein, daß die Wahl

des Schnittpunktes ohne Einfluß auf die Größe der Winkel ist. Am bequemsten ist es, als Schnittpunkt den Anfangspunkt O zu wählen.

Der Kosinus des Winkels, den eine mit Pfeil versehene Gerade mit einer der drei positiven Koordinatenachsen bildet, heißt der Richtungskosinus der Geraden hinsichtlich der betreffenden Achse. Die Richtungskosinus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ der Geraden OP mit dem Pfeile von O nach P sind sofort zu berechnen. In dem bei P_x rechtwinkligen Dreieck $P_x OP$ ist $\cos\alpha = \cos P_x OP = OP_x : OP = x : OP$. Der Winkel der positiven x-Achse mit OP ist aber spitz oder stumpf und daher der Kosinus positiv oder negativ, je nachdem x positiv oder negativ ist. Folglich hat man in der Formel $\cos\alpha = x : OP$ für OP den positiven Wert der Quadratwurzel aus (1) zu setzen. Entsprechendes gilt von $\cos\beta$ und $\cos\gamma$. Demnach kommt:

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\\ &\qquad\qquad \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \end{aligned}\right.$$

wobei die Wurzel positiv ist. Durch Quadrieren und Addieren folgt:

$$(3)\qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Jede zu OP parallele Gerade mit demselben Sinn hat dieselben Richtungskosinus. Die Richtungskosinus dienen daher als Bestimmungsstücke einer Richtung im Raum. Nach (3) gilt der

Satz 7: Die Summe der Quadrate der Richtungskosinus einer Richtung im Raum ist stets gleich Eins.

Aus der vorhin benutzten Formel $\cos\alpha = x : OP$ ergibt sich $x = OP \,.\, \cos\alpha$, und dabei ist, wie gesagt, OP positiv zu messen. Entsprechend ist $y = OP \,.\, \cos\beta$ und $z = OP \,.\, \cos\gamma$. Also:

Satz 8: Die Koordinaten eines Punktes P oder $(x; y; z)$ sind gleich den Produkten der positiv gemessenen Strecke OP mit den Richtungskosinus der im Sinn von O nach P mit einem Pfeil versehenen Geraden OP.

Hat OP die Länge Eins, so ist insbesondere $\cos\alpha = x$, $\cos\beta = y$, $\cos\gamma = z$. Daher:

Satz 9: Die Richtungskosinus einer Richtung im Raum sind die rechtwinkligen Koordinaten desjenigen Punktes, in den der Anfangspunkt übergeht, wenn er in der vorgeschriebenen Richtung um die Längeneinheit fortbewegt wird.

Da der Einheitspunkt der x-Achse die Koordinaten 1, 0, 0 hat, kommen der positiven x-Achse die Richtungskosinus 1, 0, 0 zu. Die positive y-Achse hat die Richtungskosinus 0, 1, 0 und die positive z-Achse die Richtungskosinus 0, 0, 1.

Nimmt man irgend drei Werte a, b, c so an, daß $a^2 + b^2 + c^2$ gleich Eins ist, so hat der Punkt P mit den Koordinaten a, b, c nach (1) von O die Entfernung Eins, so daß der im Sinn von O nach P durchlaufenen Geraden nach Satz 9 die Richtungskosinus a, b, c zukommen. Daher:

Satz 10: Zu irgend drei bestimmten Werten a, b, c, deren Quadratsumme $a^2 + b^2 + c^2$ gleich Eins ist, gehört eine bestimmte Richtung mit den Richtungskosinus a, b, c, nämlich die vom Anfangspunkte nach dem Punkte $(a; b; c)$.

Auch wenn man von den Richtungskosinus einer Richtung nur weiß, daß sie zu drei gegebenen Werten A, B, C proportional sind und überdies dieselben Vorzeichen wie diese drei Werte haben, ist die Richtung vollkommen bestimmt. Dies ist nämlich die Richtung vom Anfangspunkte nach dem Punkte mit den Koordinaten A, B, C, wie die Formeln (2) für $x = A$, $y = B$, $z = C$ sofort zeigen. Wir haben also den

Satz 11: Diejenigen Richtungskosinus, die zu drei gegebenen Werten A, B, C proportional sind und dieselben Vorzeichen wie diese drei Werte haben, sind:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Dabei ist die Wurzel positiv.

Nun seien zwei Punkte P_1 und P_2 durch ihre Koordinaten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 gegeben. Um das Quadrat der Strecke P_1P_2 zu berechnen, verschieben wir das Achsenkreuz parallel mit sich derart, daß der Anfangspunkt nach P_1 rückt. Fig. 416 lehrt, daß P_2 im neuen Achsenkreuz als Koordinaten die Differenzen $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ hat, so daß nach (1) das Quadrat der Entfernung vom neuen Anfangspunkte P_1 bis zum Punkte P_2 den Wert hat:

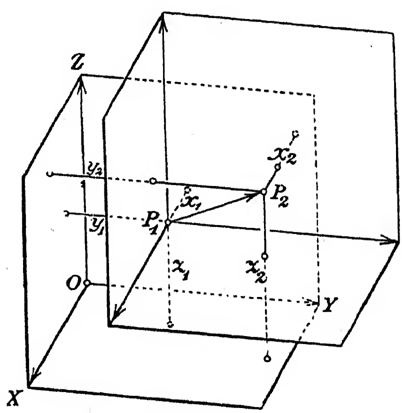


Fig. 416.

$$(4) \qquad P_1P_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Im neuen Achsenkreuze hat die Gerade von P_1 nach P_2 dieselben Richtungskosinus wie im alten. Nach (2) sind sie somit gleich $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$, dividiert mit der positiven Quadratwurzel aus dem Ausdruck (4).

Satz 12: Die Richtungskosinus der Geraden von einem Punkte $(x_1; y_1; z_1)$ nach einem andern Punkte $(x_2; y_2; z_2)$ sind proportional zu den Differenzen $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ und haben dieselben Vorzeichen wie diese Differenzen.

Jetzt mögen irgend zwei Richtungen im Raum durch ihre Richtungskosinus $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ und $\cos\alpha_2$, $\cos\beta_2$, $\cos\gamma_2$ gegeben sein, so daß nach Satz 7:

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1\,, \qquad \cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2 = 1$$

ist. Nach unseren früheren Bemerkungen ist dann der Kosinus des Winkels ω beider Richtungen vollkommen bestimmt. Um ihn zu berechnen, ziehen wir von O Geraden in den gegebenen Richtungen und tragen auf ihnen von O aus in diesen Richtungen die Längeneinheit auf. Dadurch gelangen wir zu Punkten P_1 und P_2, und $\sphericalangle P_1 O P_2$ darf dann mit ω bezeichnet werden. Nach Satz 9 hat P_1 die Koordinaten $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ und P_2 die Koordinaten $\cos\alpha_2$, $\cos\beta_2$, $\cos\gamma_2$. Mithin ist nach (4):

$$P_1P_2^2 = (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)^2 + (\cos\beta_1 - \cos\beta_2)^2 + (\cos\gamma_1 - \cos\gamma_2)^2\,.$$

Quadriert man dies aus, so ergibt sich mit Rücksicht auf die beiden vorhergehenden Gleichungen:

$$P_1P_2^2 = 2 - 2\,(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2).$$

Andererseits ist nach dem Kosinussatz 14, S. 410, angewandt auf das Dreieck P_1OP_2:

$$P_1P_2^2 = OP_1^2 + OP_2^2 - 2\,OP_1 \,.\, OP_2 \,.\, \cos\omega\,.$$

Wegen $OP_1 = 1$, $OP_2 = 1$ gibt dies:

$$P_1P_2^2 = 2 - 2\cos\omega\,.$$

Die Vergleichung mit dem vorher erhaltenen Wert von $P_1P_2^2$ lehrt:

Satz 13: Der Kosinus des Winkels, den zwei Richtungen mit den Richtungskosinus $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ und $\cos\alpha_2$, $\cos\beta_2$ $\cos\gamma_2$ miteinander bilden, ist gleich der Summe:

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2\,.$$

Da insbesondere $\cos\omega = 0$ besagt, daß die Richtungen zueinander senkrecht sind, gilt der

Satz 14: Zwei Richtungen mit den Richtungskosinus $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ und $\cos\alpha_2$, $\cos\beta_2$, $\cos\gamma_2$ sind dann und nur dann zueinander senkrecht, wenn die Gleichung besteht:

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=0\,.$$

Ist dies der Fall, so bleibt die Gleichung richtig, wenn wir sie mit irgendeiner Größe multiplizieren. Dies bedeutet, daß statt $\cos\alpha_1$. $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ auch drei zu ihnen proportionale Werte genommen werden dürfen. Dasselbe gilt von $\cos\alpha_2$, $\cos\beta_2$, $\cos\gamma_2$. Folglich ergeben sich mit Rücksicht auf Satz 12 die beiden Sätze:

Satz 15: Die Gerade vom Punkte $(x_1;\, y_1;\, z_1)$ nach dem Punkte $(x_2\, y_2;\, z_2)$ ist dann und nur dann zur Richtung mit den Richtungskosinus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ senkrecht, wenn die Gleichung besteht:

$$(x_2-x_1)\cos\alpha+(y_2-y_1)\cos\beta+(z_2-z_1)\cos\gamma=0\,.$$

Satz 16: In dem Dreieck von drei Punkten P_0, P_1, P_2 oder $(x_0;\, y_0;\, z_0)$, $(x_1;\, y_1;\, z_1)$, $(x_2;\, y_2;\, z_2)$ ist der Winkel bei P_0 dann und nur dann ein rechter, wenn die Gleichung besteht:

$$(x_1-x_0)(x_2-x_0)+(y_1-y_0)(y_2-y_0)+(z_1-z_0)(z_2-z_0)=0.$$

Nun werde eine Ebene E betrachtet. Das Lot vom Anfangspunkt O auf E habe den Fußpunkt P_0, siehe Fig. 417. Ist die positiv gemessene Länge p des Lotes OP_0 und sind überdies die Richtungskosinus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ der Richtung von O nach P_0 gegeben, so ist der Punkt P_0 und damit auch die Ebene E vollständig festgelegt. P_0 hat nach Satz 8 die Koordinaten $p\cos\alpha$, $p\cos\beta$ und $p\cos\gamma$. Die Bedingung dafür, daß ein Punkt P oder $(x;\, y;\, z)$ in der Ebene E liege, kann so ausgedrückt werden: Die Gerade P_0P muß zu OP_0 senkrecht sein. Oder auch: Die Gerade P_0P muß zur Richtung mit den Richtungskosinus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ senkrecht sein. Da P_0 die Koordinaten $p\cos\alpha$, $p\cos\beta$, $p\cos\gamma$ und P die Koordinaten x, y, z hat, stellt sich die Bedingung nach Satz 15 so dar:

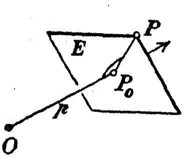


Fig. 417.

$$(x-p\cos\alpha)\cos\alpha+(y-p\cos\beta)\cos\beta+(z-p\cos\gamma)\cos\gamma=0\,.$$

Beim Ausmultiplizieren tritt als Faktor von $-p$ die Summe der Quadrate der Richtungskosinus auf, die nach Satz 7 gleich Eins ist. Die Bedingung nimmt daher die einfachere Gestalt an:

(5) $$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p\,.$$

Folglich gilt der

Satz 17: Ein Punkt $(x; y; z)$ liegt dann und nur dann in derjenigen Ebene, die vom Anfangspunkte die Entfernung p mit den Richtungskosinus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ hat, wenn die Gleichung besteht:

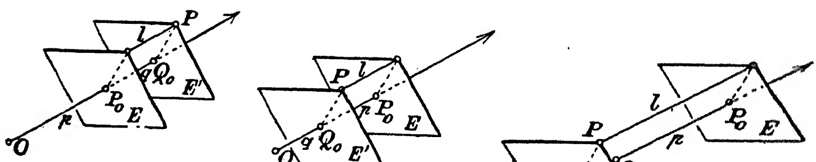
$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p\,.$$

Dabei ist die Entfernung p positiv gemessen und der Sinn ihrer Richtung der vom Anfangspunkte nach der Ebene hin.

Wir wollen nun einen Punkt P oder $(x; y; z)$ ins Auge fassen, der nicht in der Ebene E liegt. Für ihn besteht die Gleichung (5) nicht, d. h. für ihn ist die Differenz

$$(6) \qquad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p$$

von Null verschieden. Aber diese Differenz hat für ihn eine einfache geometrische Bedeutung. Um dies zu zeigen, legen wir durch P



a $\quad l = q - p$ $\qquad$ b $\quad l = p - q$ $\qquad$ c $\quad l = p + q$

Fig. 418.

die zu E parallele Ebene E'. Das Lot OQ_0 von O auf E' liegt auf derselben Geraden wie das Lot OP_0 von O auf E. Wir wollen den positiven Betrag des Lotes OQ_0 mit q bezeichnen. Verschiedene Fälle sind denkbar: In den Figuren 418a und b ist der Sinn von O nach Q_0 derselbe wie der von O nach P_0, und zwar ist q in Fig. 418a größer als p, in Fig. 418b dagegen kleiner als p. In Fig. 418c ist der Sinn von O nach Q_0 dem von O nach P_0 entgegen. In den beiden ersten Fällen sind die Richtungskosinus von q gleich $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, im dritten Fall sind sie jedoch gleich $-\cos\alpha$, $-\cos\beta$, $-\cos\gamma$. Da nun P in der Ebene E' liegt, ist nach Satz 17 in den beiden ersten Fällen:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = q\,,$$

dagegen im dritten Fall:

$$-x\cos\alpha - y\cos\beta - z\cos\gamma = q.$$

Demnach ist die Differenz (6) in den beiden ersten Fällen gleich $q - p$ und im dritten Fall gleich $-q-p$. Wird schließlich noch das Lot von P auf die Ebene E gefällt und sein positiver Betrag mit l bezeichnet, so ist l im ersten Fall gleich $q-p$, im zweiten gleich $p-q$ und im dritten gleich $p+q$. Somit ist l im ersten Fall gleich der Differenz (6), im zweiten und dritten Fall dagegen $-l$ gleich der Differenz (6). Im ersten Fall liegt P, von O aus betrachtet, jenseits der Ebene E, dagegen im zweiten und dritten Fall diesseits. Mithin ergibt sich:

Satz 18: Der Abstand eines Punktes $(x; y; z)$ von derjenigen Ebene, die vom Anfangspunkte die positiv gemessene Entfernung p mit den im Sinn vom Anfangspunkte nach der Ebene hin genommenen Richtungskosinus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ hat, ist gleich

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p.$$

Dieser Ausdruck gibt den Abstand mit dem Pluszeichen, wenn der Punkt $(x; y; z)$ vom Anfangspunkte durch die Ebene getrennt wird; andernfalls ist der Ausdruck mit dem Minuszeichen behaftet.

Wir wollen jetzt wieder annehmen, daß der Punkt P oder $(x; y; z)$ in derjenigen Ebene E liege, die vom Anfangspunkte die positiv gemessene Entfernung p mit den Richtungskosinus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ hat, so daß nach Satz 17

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p \tag{7}$$

ist. Hier liegt eine in x, y, z lineare Gleichung, d. h. eine Gleichung ersten Grades in x, y, z vor.

Diese Gleichung (7) ist nicht die allgemeinste lineare Gleichung in x, y, z. Denn erstens ist die rechte Seite von (7) positiv, und zweitens ist die Summe der Quadrate der Koeffizienten von x, y, z nach Satz 7 gleich Eins. Aber jede in x, y, z lineare Gleichung

$$Ax + By + Cz = D \tag{8}$$

läßt sich leicht auf die Form (7) bringen. Bezeichnen wir nämlich mit ε die Zahl $+1$ oder -1, je nachdem D positiv oder negativ ist, verstehen wir dagegen unter ε nach Belieben $+1$ oder -1, falls D gleich Null ist, so dürfen wir statt (8) zunächst schreiben:

$$\varepsilon Ax + \varepsilon By + \varepsilon Cz = \varepsilon D.$$

Hier ist die rechte Seite gewiß nicht negativ. Nun dividieren wir die Gleichung mit der positiven Quadratwurzel aus $A^2 + B^2 + C^2$. Dann

kommt eine Gleichung, die genau die Form (7) hat, wenn man

$$
(9)\quad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{\varepsilon A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, & \cos\beta = \dfrac{\varepsilon B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\gamma = \dfrac{\varepsilon C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, & p = \dfrac{\varepsilon D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ (\sqrt{A^2+B^2+C^2} > 0, & \varepsilon D \geqq 0) \end{cases}
$$

setzt. In der Tat ist der durch die letzte Gleichung (9) bestimmte Wert von p positiv, und außerdem sind die durch (9) bestimmten Größen $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ wirklich Richtungskosinus, weil die Summe ihrer Quadrate gleich Eins ist (vgl. Satz 10). Da nun (7) die Bedingung dafür ist, daß ein Punkt $(x; y; z)$ in der Ebene E liegt, und da die allgemeine lineare Gleichung (8) auf die Form (7) zurückgeführt worden ist, gilt der

Satz 19[1]**:** Eine in x, y, z lineare Gleichung

$$Ax + By + Cz = D$$

wird von den Koordinaten x, y, z aller in einer gewissen Ebene gelegenen Punkte erfüllt, dagegen nicht von den Koordinaten irgendeines anderen Punktes.

Wie die Ebene liegt, erkennt man aus den Werten (9), denn daraus ist die Entfernung p der Ebene vom Anfangspunkte sowie die Richtung dieser Entfernung zu entnehmen.

Infolge des Satzes 19 ist jede in x, y, z lineare Gleichung (8) die Gleichung einer Ebene im Raum. Die in Satz 18 angegebene besondere Form der Ebenengleichung heißt die Hessesche Normalform. (Vgl. die im 1. Beispiel, S. 659, aufgestellte Hessesche Normalform der Gleichung einer Geraden in der xy-Ebene). Die Sätze 17 und 18 lassen sich nun auch so aussprechen.

Satz 20: Liegt die Gleichung einer Ebene in der Normalform

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$$

vor, so ist der Ausdruck

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p$$

zwar für jeden Punkt $(x; y; z)$ der Ebene gleich Null, jedoch für irgendeinen andern Punkt $(x; y; z)$ von Null verschieden und zwar gleich dem Abstande des Punktes

[1] Dieser Satz gilt auch dann, wenn die Einheiten der drei Achsen verschieden groß sind.

von der Ebene. Der Ausdruck liefert diesen Abstand mit dem Plus- oder Minuszeichen, je nachdem der Punkt $(x; y; z)$ vom Anfangspunkte durch die Ebene getrennt wird oder nicht.

Die Ebene mit der Gleichung (8) geht durch den Anfangspunkt O selbst, wenn die Gleichung durch die Werte Null von x, y, z befriedigt wird, also im Fall $D = O$. Wenn dagegen $D \neq 0$ ist, schneidet die Ebene von den Achsen drei von O an gemessene Strecken a, b, c ab, die wir positiv oder negativ rechnen, je nachdem sie auf den positiven oder negativen Achsen liegen. Diese Strecken lassen sich sofort berechnen. Denn es ist zu fordern, daß die Punkte $(a; 0; 0)$, $(0; b; 0)$ und $(0; 0; c)$ der Ebene angehören, und deshalb ergibt sich aus (8):

$$Aa = D, \qquad Bb = D, \qquad Cc = D,$$

also

$$a = \frac{D}{A}, \qquad b = \frac{D}{B}, \qquad c = \frac{D}{C}.$$

Division der Gleichung (8) mit D zeigt also, daß man die Gleichung auf die Form

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

bringen kann.

Satz 21[1]: Die Ebene, die auf den Koordinatenachsen die mit Vorzeichen gemessenen Strecken a, b, c abschneidet, hat die Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Vgl. Satz 3, S. 175, über die Geraden in einer Ebene.

1. Beispiel: Vorgelegt sei die in x, y, z lineare Gleichung

$$6x - 3y + 2z = -6.$$

Sie stellt eine Ebene dar. Um ihre Normalform zu bekommen, verfahren wir nach den Vorschriften auf S. 675. Da die rechte Seite der Gleichung negativ ist, wird $\varepsilon = -1$ gewählt, d. h. die Gleichung mit -1 multipliziert. Ferner wird sie mit der positiven Quadratwurzel aus $6^2 + (-3)^2 + 2^2$ oder 49, also mit 7 dividiert. Dann ergibt sich die Normalform:

$$-\tfrac{6}{7}x + \tfrac{3}{7}y - \tfrac{2}{7}z = \tfrac{6}{7}.$$

Sie besagt, daß das Lot OP_0 von O auf die Ebene gleich $\frac{6}{7}$ ist und die Richtungskosinus $-\frac{6}{7}$, $\frac{3}{7}$ und $-\frac{2}{7}$ hat. Dem Fußpunkte P_0 des Lotes kommen

[1] Dieser Satz gilt auch dann, wenn die Einheiten der drei Achsen verschieden groß sind, vorausgesetzt, daß man die Abschnitte a, b, c mit den entsprechenden Einheiten mißt.

nach Satz 8 diejenigen Koordinaten zu, die sich durch Multiplikation der Richtungskosinus mit $\frac{6}{7}$ ergeben, also die Koordinaten $-\frac{36}{49}$, $\frac{18}{49}$ und $-\frac{12}{49}$. Um die Abschnitte a, b, c der Ebene auf den Achsen zu finden, dividiert man die vorgelegte Gleichung mit -6:

$$-x + \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{3}z = 1.$$

Nach Satz 21 sind a, b, c die reziproken Werte der Koeffizienten von x, y, z; daher $a = -1$, $b = 2$, $c = -3$, siehe Fig. 419, wo nur das dreieckige Stück der Ebene angegeben ist, dessen Ecken die Punkte auf den Achsen sind.

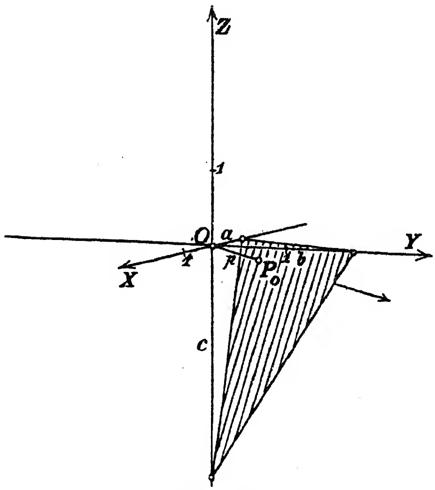


Fig. 419.

Liegt die allgemeine Gleichung

$$A\,x + B\,y + C\,z = D$$

einer Ebene vor, so zeigen die Formeln (9), daß die Richtungskosinus aller auf der Ebene errichteten Lote zu A, B, C proportional sind. Da zwei Ebenen

$$A_1\,x + B_1\,y + C_1\,z = D_1 \quad \text{und} \quad A_2 x + B_2\,y + C_2\,z = D_2$$

zueinander parallel sind, wenn die auf ihnen errichteten Lote einander parallel sind, folgt daraus, daß die Bedingung des Parallelismus das Bestehen der Proportionen

$$A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2$$

ist. Wenn dagegen die Ebenen zueinander senkrecht sind, muß dasselbe von den auf ihnen errichteten Loten gelten. Die Richtungskosinus der Lote müssen also die in Satz 14 angegebene Bedingung erfüllen. Wir hoben auf S. 673 hervor, daß man in dieser Bedingung die Richtungskosinus durch zu ihnen proportionale Werte ersetzen darf. Folglich ist

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$

die Bedingung des Senkrechtstehens.

Satz 22: Die Ebenen mit den Gleichungen

$$A_1\,x + B_1\,y + C_1\,z = D_1 \quad \text{und} \quad A_2 x + B_2\,y + C_2\,z = D_2$$

sind zueinander parallel, wenn

$$A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2$$

ist[1], dagegen zueinander senkrecht, wenn

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$

ist.

2. Beispiel: Man soll die Gleichung der Ebene aufstellen, die zu der im 1. Beispiele betrachteten Ebene

$$6x - 3y + 2z = -6$$

parallel ist und durch den Punkt $(3; 2; 2)$ geht. Nach Satz 22 muß die gesuchte Gleichung

$$Ax + By + Cz = D$$

so beschaffen sein, daß $A : B : C = 6 : -3 : 2$ ist. Da man die Gleichung mit einem konstanten Faktor multiplizieren darf, können wir geradezu $A = 6$, $B = -3$, $C = 2$ setzen:

$$6x - 3y + 2z = D.$$

Nun wird D aus der Bedingung ermittelt, daß die Ebene durch den Punkt $(3; 2; 2)$ gehen soll. Sie gibt:

$$6 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = D, \quad \text{also} \quad D = 16.$$

Somit ist

$$6x - 3y + 2z = 16$$

die gesuchte Gleichung der Ebene. Ihre Normalform ist:

$$\tfrac{6}{7}x - \tfrac{3}{7}y + \tfrac{2}{7}z = \tfrac{16}{7}.$$

Demnach hat die Ebene vom Anfangspunkte den Abstand $2\tfrac{2}{7}$.

3. Beispiel: Man soll die Gleichung der zur Ebene

$$6x - 3y + 2z = -6$$

senkrechten Ebene durch die x-Achse ermitteln. Ist

$$Ax + By + Cz = D$$

die gesuchte Gleichung, so muß sie durch die Koordinaten eines beliebigen Punktes $(x; 0; 0)$ der x-Achse befriedigt werden, d. h. es muß $Ax = D$ für jedes x sein. Dies ist nur dann möglich, wenn $A = D = 0$ ist. Somit bleibt:

$$By + Cz = 0.$$

Nach der Bedingung des Senkrechtstehens in Satz 22 muß ferner sein:

$$6 \cdot 0 - 3 \cdot B + 2 \cdot C = 0,$$

d. h. $B = \tfrac{2}{3}C$. Man bekommt also als Gleichung der Ebene

$$\tfrac{2}{3}Cy + Cz = 0$$

oder nach Multiplikation mit 3 und Division mit C:

$$2y + 3z = 0.$$

[1] Bis hierher gilt der Satz auch dann, wenn die Einheiten der drei Achsen verschieden groß sind.

Die xy-Ebene enthält alle Punkte, für die z gleich Null ist. Somit ist $z=0$ die Gleichung der xy-Ebene. Nach Satz 22 steht demnach die Ebene

$$Ax + By + Cz = D \tag{10}$$

auf der xy-Ebene senkrecht, wenn $0 \cdot A + 0 \cdot B + 1 \cdot C = 0$, also $C = 0$ ist, d. h. wenn die Gleichung der Ebene von z frei ist:

$$Ax + By = D.$$

Dasselbe erkennt man so: Die letzte Gleichung stellt in der xy-Ebene nach Satz 2, S. 173, eine Gerade g dar. Ist nun Q ein Punkt von g, so hat jeder Punkt P des in Q auf die xy-Ebene errichteten Lotes dasselbe x und dasselbe y wie Q, d. h. auch seine Koordinaten erfüllen die Gleichung, weil sie von z frei ist. Also befriedigen die Koordinaten aller Punkte der längs g auf der xy-Ebene senkrecht errichteten Ebene die Gleichung.

Nun betrachten wir eine Ebene (10), die nicht zur xy-Ebene senkrecht ist, d. h. deren Gleichung nicht von z frei ist, so daß $C \neq 0$ ist. Dann kann man die Gleichung nach z auflösen:

$$z = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y + \frac{D}{C}.$$

Diese Formel liefert z als eine ganze lineare Funktion von x und y:

$$z = \mathfrak{a}x + \mathfrak{b}y + \mathfrak{c}$$

mit konstanten Koeffizienten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$.

Wenn allgemein irgendeine Funktion f von zwei unabhängigen Veränderlichen x und y gegeben und gleich z gesetzt wird, versteht man unter dem Bild dieser Funktion $z = f(x, y)$ die Gesamtheit aller Punkte $(x; y; z)$, deren x- und y-Koordinaten beliebig sind, während die zugehörigen z-Koordinaten durch die Bedingung $z = f(x, y)$ angegeben werden. Insbesondere hat sich also ergeben:

Satz 23[1]: Das Bild einer ganzen linearen Funktion z von x und y

$$z = \mathfrak{a}x + \mathfrak{b}y + \mathfrak{c}$$

ist eine Ebene, die nicht zur z-Achse parallel ist.

Jetzt gehen wir einen Schritt weiter: Wir wollen das Bild einer beliebigen Funktion

[1] Dieser Satz gilt auch dann, wenn die Einheiten der drei Achsen verschieden groß sind.

$$z = f(x, y) \tag{11}$$

untersuchen. Dabei setzen wir voraus, daß die Funktion stetig sei.

Da die Bedingung (11) zu einem beliebigen Wertepaare x, y, d. h. zu einem beliebigen Punkt Q oder $(x; y)$ der xy-Ebene einen gewissen zugehörigen Wert z der Höhe über Q liefert, liegt über jeder Stelle Q der xy-Ebene ein Punkt P oder $(x; y; z)$, dessen Koordinaten die Bedingung (11) befriedigen (siehe Fig. 420). Da $f(x, y)$ stetig ist, gehören zu unendlich benachbarten Wertepaaren x, y, d. h. zu unendlich benachbarten Punkten Q der xy-Ebene auch unendlich benachbarte Werte von z, d. h. unendlich benachbarte Punkte P im Raum. Die Gesamtheit aller Bildpunkte P ist also lückenlos. Man sagt, daß sie eine Fläche bilden. Die Gleichung (11) nennt man daher die Gleichung einer Fläche.

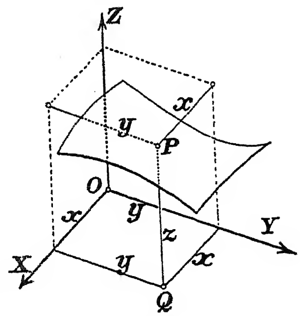


Fig. 420.

Hierbei sind noch einige Anmerkungen zu machen: Erstens ist zu beachten, daß das Wort Fläche in der Geometrie in zweierlei Bedeutung vorkommt. Man kann unter einer Fläche — wie wir es bisher getan haben — den Flächeninhalt eines durch einen Rand begrenzten Stückes der Ebene verstehen (wie z. B. auf S. 223 u. f.). Jetzt soll dagegen als eine Fläche ein Gebilde im Raum von der soeben eingeführten Art verstanden werden.[1] Zweitens ist zu bemerken, daß wir nur der Kürze des Ausdrucks zuliebe von Punkten P über den Punkten Q gesprochen haben, denn die Werte $z = f(x, y)$ können auch negativ sein, so daß dann die zugehörigen Punkte P unterhalb der xy-Ebene liegen. Drittens endlich haben wir auch bloß der Kürze halber ungenau gesagt, daß zu jedem Punkt Q der xy-Ebene infolge von (11) ein Punkt P gehöre. Es ist nämlich sehr wohl möglich und kommt häufig vor, daß eine Funktion $f(x, y)$ nur für Wertepaare x, y innerhalb eines gewissen Bereiches, also nur für die Punkte Q eines Teiles der xy-Ebene stetig ist, so daß die Fläche dann nur über diesem Teil der xy-Ebene vorhanden ist. Diese Einschränkung immer zu erwähnen, wäre lästig.

Ist die Funktion $f(x, y)$ einwertig, so gehört zu jedem Punkt Q oder $(x; y)$ nur ein Punkt P der Fläche. Mehrwertige Funktionen f

[1] In nachlässigem Sprachgebrauche sagt man oft Fläche, wenn man eine Ebene meint. Wir verstehen unter Fläche das allgemeinere krumme Gebilde. Eine Ebene ist als eine ebene Fläche zu bezeichnen.

führen dagegen zu Flächen, die von den Loten zur xy-Ebene in mehr als einem Punkt getroffen werden. Durch geeignete Einschränkungen kann man von mehrwertigen Funktionen zu einwertigen zurückkommen, vgl. S. 152. Dies bedeutet geometrisch, daß man sich auf einen Teil der Fläche beschränkt. Wir wollen voraussetzen, daß die Funktion $f(x, y)$ einwertig sei. Nebenbei sei erwähnt, daß es allerdings auch Flächen gibt, die nicht nur jedes Lot zur xy-Ebene in mehreren Punkten treffen, sondern sogar alle Punkte solcher Lote enthalten, nämlich die Zylinderflächen, die senkrecht auf der xy-Ebene aufstehen. Von diesen Flächen sehen wir hier ab. (Sie lassen sich übrigens ebenso behandeln, wenn man eine andere Koordinatenebene statt der xy-Ebene zur Grundebene macht.)

Nach diesen notwendigen allgemeinen Verwahrungen sei nun ein Wertepaar x, y, d. h. ein Punkt Q in der xy-Ebene bestimmt ausgewählt. Nach (11) gehört dazu ein bestimmter Wert z und somit ein über Q gelegener Punkt P der Fläche. Wenn wir voraussetzen, daß die Funktion $f(x, y)$ differentiierbar sei, ist das vollständige Differential von z nach Satz 1, S. 645:

$$dz = f_x dx + f_y dy. \tag{12}$$

Wir untersuchen nun, welche Bedeutung dieser Differentialformel in Hinsicht auf die Fläche zukommt.

Zu beliebigen Differentialen dx, dy gehören Punkte Q' der xy-Ebene, die unendlich nahe bei Q liegen und die Koordinaten $x + dx$ und $y + dy$ haben. Die Gesamtheit der über allen diesen Punkten Q' gelegenen Punkte P' oder $(x + dx; y + dy; z + dz)$ der Fläche besteht aus allen dem Punkt P unendlich benachbarten Flächenpunkten. Da dz durch (12) bestimmt wird, sobald dx und dy gewählt worden sind, muß diese Gesamtheit von Punkten P' besondere Lagerung haben. Worin dies Besondere besteht, erkennt man so:

Die Gerade von P nach irgendeinem unendlich benachbarten Punkt P' der Fläche heißt eine Tangente des Flächenpunktes P. Dem Punkt P kommen also unzählig viele Tangenten zu. Die Richtungskosinus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ einer Tangente PP' sind nach Satz 12 proportional zu den Differenzen dx, dy, dz der Koordinaten von P' und P. Nach (12) gilt daher die Gleichung:

$$\cos\gamma = f_x \cos\alpha + f_y \cos\beta$$

oder:

$$-f_x \cos\alpha - f_y \cos\beta + \cos\gamma = 0. \tag{13}$$

Erinnern wir uns nun an den Satz 14, der die Bedingung dafür angibt daß zwei Richtungen zueinander senkrecht sind, so ist es leicht, die

letzte Formel so darzustellen, daß sie gerade diese Bedingung wird. Denn nach Satz 11 gibt es eine Richtung, deren Richtungskosinus zu den Koeffizienten von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ in (13), also zu $-f_x$, $-f_y$ und 1 proportional sind, nämlich die Werte haben:

$$(14)\quad \cos\lambda = \frac{-f_x}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}},\ \cos\mu = \frac{-f_y}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}},\ \cos\nu = \frac{1}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}},$$

wo wir die Wurzel etwa positiv annehmen. Nun läßt sich die Formel (13) so schreiben:

$$\cos\lambda\cos\alpha + \cos\mu\cos\beta + \cos\nu\cos\gamma = 0,$$

so daß sie nach Satz 14 besagt, daß jede Tangente des Punktes P senkrecht ist zu derjenigen bestimmten Richtung, deren Kosinus durch (14) dargestellt werden. Wir wollen uns vorstellen, durch den Flächenpunkt P sei die Gerade n gezogen, deren Richtungskosinus die Werte (14) haben. Alle Tangenten von P sind zu dieser Geraden n, der sogenannten Normale von P, senkrecht. Sie liegen daher in der zu n senkrechten Ebene durch P. Diese Ebene heißt die Tangentialebene des Flächenpunktes P. Die geometrische Deutung der Differentialformel

$$dz = f_x\,dx + f_y\,dy$$

ist demnach der

Satz 24[1]: Alle Tangenten eines Punktes der Fläche $z = f(x, y)$ bilden eine Ebene, vorausgesetzt, daß die Funktion $f(x, y)$ für das dem Punkte zugehörige Wertepaar x, y differentiierbar ist.

Nun sei $(\mathfrak{x}; \mathfrak{y}; \mathfrak{z})$ ein beliebiger Punkt $\mathfrak{P}$ der Tangentialebene von P, d. h. die Gerade $P\mathfrak{P}$ sei senkrecht zu der durch (14) angegebenen Normalenrichtung. Dann muß nach Satz 15 die Gleichung bestehen:

$$(\mathfrak{x}-x)\cos\lambda + (\mathfrak{y}-y)\cos\mu + (\mathfrak{z}-z)\cos\nu = 0,$$

die sich nach (14) einfacher so schreiben läßt:

$$-f_x(\mathfrak{x}-x) - f_y(\mathfrak{y}-y) + \mathfrak{z} - z = 0$$

[1] Dieser Satz gilt auch dann, wenn die Einheiten der drei Achsen verschieden groß sind. Dagegen brauchen die Tangenten eines Punktes keine Ebene zu bilden, wenn $f(x, y)$ an der betreffenden Stelle unstetig oder nicht differenzierbar ist. Derartige Flächenpunkte heißen singulär. So ist die Spitze eines Kegels eine singuläre Stelle der Kegelfläche. Dreht sich ein Kreis um eine Gerade, die ihn in A und B schneidet, so entsteht eine Rotationsfläche, die in A und B singuläre Punkte hat. Die Tangenten von A bilden einen Rotationskegel, die von B ebenso. Dreht sich der Kreis um die ihn in A berührende Gerade, so entsteht eine Rotationsfläche, die in A sogar nur eine einzige Tangente hat.

oder auch so:

$$\mathfrak{z} - f_x \mathfrak{x} - f_y \mathfrak{y} = z - f_x x - f_y y \,. \tag{15}$$

Diese in $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ lineare Gleichung ist also die Gleichung der Tangentialebene des Punktes P oder $(x;\, y;\, z)$ der Fläche. In ihr sind x, y gegeben, also auch $z = f(x, y)$ sowie f_x und f_y, während $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die veränderlichen oder laufenden Koordinaten eines beliebigen Punktes der Tangentialebene bedeuten.

Den Satz 24 kann man auch in mehr geometrischer Weise so ableiten: Wenn x um dx wächst und y ungeändert bleibt, also $dy = 0$ gewählt wird, liefert (12) den Zuwachs $f_x\, dx$ der Höhe z. Dieser Annahme möge der Punkt Q_1 der xy-Ebene und der darüber gelegene Punkt P_1 der Fläche in Fig. 421 entsprechen. Wenn dagegen zweitens nur y um dy wächst und x ungeändert bleibt, also $dx = 0$ gewählt wird, liefert (12) nur den Zuwachs $f_y\, dy$ der Höhe z, und dazu möge der Punkt Q_2 in der xy-Ebene und der darüber gelegene Punkt P_2 der Fläche gehören. Die mit t_x und t_y bezeichneten Geraden PP_1 und PP_2 sind besondere Tangenten von P, nämlich die zur xz-Ebene und yz-Ebene parallelen. Jetzt soll gezeigt werden, daß alle Tangenten von P in der Ebene von t_x und t_y liegen. Zu diesem Zweck lassen wir jetzt sowohl x um dx als auch y um dy wachsen, wodurch Q in Q' übergeht und die Höhe z nach (12) um $f_x\, dx + f_y\, dy$ wächst, also P nach einer Stelle P' über Q' wandert. Die durch P zur xy-Ebene parallel gelegte Ebene schneide die in Q_1, Q_2 und Q' errichteten Lote in R_1, R_2 und R. Dann ist

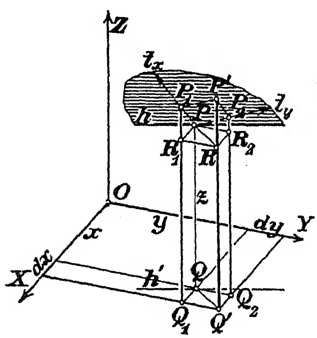


Fig. 421.

$$R_1 P_1 = f_x\, dx \,, \qquad R_2 P_2 = f_y\, dy \,, \qquad RP' = f_x\, dx + f_y\, dy$$

folglich

$$RP' = R_1 P_1 + R_2 P_2 \,,$$

was bedeutet, daß die Punkte P, P_1, P_2, P' (ebenso wie Q, Q_1, Q_2, Q') ein Parallelogramm bilden. Die Tangente PP' liegt somit wirklich in der Ebene von t_x und t_y, also gilt Satz 24.

Insbesondere gibt es eine Tangente h von P, die zur xy-Ebene parallel ist. Wandert P auf ihr unendlich wenig weiter, so ändert sich seine Höhe z nicht; man erzielt diese Wanderung, wenn man dx und dy so wählt, daß $dz = 0$, also nach (12)

$$f_x\,dx + f_y\,dy = 0$$

wird. Die senkrechte Projektion von h auf die xy-Ebene ist eine zu h parallele Gerade h'. Sie hat in der xy-Ebene gegenüber der x-Achse die aus der letzten Gleichung hervorgehende Steigung:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}.$$

Die Schnittkurven der Fläche mit den zur xy-Ebene parallelen Ebenen heißen die Höhenlinien oder Niveaukurven der Fläche. Sie haben wagerechte, d. h. zur xy-Ebene parallele Tangenten. Insbesondere ist die soeben betrachtete Tangente h die Tangente der durch P gehenden Höhenlinie an der Stelle P. Den Höhenlinien stehen die Linien stärksten Gefälles oder Fallinien der Fläche gegenüber. Die durch P gehende Linie stärksten Gefälles hat in P als Tangente diejenige Gerade in der Tangentialebene, die am stärksten zur xy-Ebene geneigt ist. Nach einem bekannten Satze der Geometrie des Raumes ist diese Gerade senkrecht zur wagerechten Geraden h. Die Linien stärksten Gefälles sind also diejenigen, die alle Höhenlinien senkrecht durchsetzen.

Die Geometrie der Flächen im Raum ist ein sehr ausgedehntes Gebiet der Mathematik. Wir müssen uns mit diesen wenigen Andeutungen begnügen.

4. Beispiel: Wir untersuchen die Gestalt der Fläche mit der Gleichung

$$z = \frac{xy}{c}, \tag{16}$$

worin c eine von Null verschiedene Konstante sei. Setzt man $y = 0$, so geht $z = 0$ hervor, wie auch immer x gewählt sein mag, d. h. die ganze x-Achse gehört der Fläche an. Ebenso erkennt man, daß die ganze y-Achse der Fläche angehört. Setzt man für x eine beliebige Konstante a, d. h. sucht man den Schnitt der Fläche mit einer zur yz-Ebene parallelen Ebene, so gibt (16) die Gleichung $cz - ay = 0$ zwischen y und z. Da sie in y und z linear ist, wird die Projektion der Schnittlinie auf die yz-Ebene eine Gerade, mithin auch die Schnittlinie selbst. Somit schneidet jede zur yz-Ebene parallele Ebene die Fläche in einer Geraden g. Da die Ebene die x-Achse trifft und die x-Achse auch der Fläche angehört, gehen alle diese Geraden g von der x-Achse aus. Ebenso erkennt man, daß jede zur xz-Ebene parallele Ebene die Fläche in einer von der y-Achse ausgehenden Geraden h schneidet. Obgleich also die Fläche zwei Scharen von je unendlich vielen Geraden g und h enthält, ist sie doch nicht eben, sondern krumm, denn ihre Gleichung (16) ist ja nicht linear in x, y, z. Die Lagerung der Geraden g und h läßt sich leicht noch genauer bestimmen. Man beachte nämlich, daß (16) für $x = c$ und $y = c$ auch $z = c$ gibt. Der Punkt C mit den drei gleichen Koordinaten c liegt somit auf der Fläche, siehe Fig. 422. Mithin müssen die Geraden der Fläche, die in den Ebenen durch C parallel zur yz-Ebene oder zur xz-Ebene liegen, die Geraden von C nach den Schnittpunkten A und B dieser beiden

Ebenen mit der x-Achse und y-Achse sein. Somit kennen wir ein windschiefes Viereck $OACB$, dessen Seiten sämtlich der Fläche angehören. Jede zur yz-Ebene parallele Ebene trifft zwei Seiten des Vierecks, nämlich OA und BC, so daß die in ihr gelegene Gerade g der Fläche die Verbindende der beiden Schnittpunkte sein muß. Entsprechendes gilt von den Geraden h. Die Fläche kann also auf zweierlei Art durch Bewegung je einer Geraden g oder h erzeugt werden: Die Gerade g (oder h) gleite auf der x-Achse (oder y-Achse) und auf der Geraden BC (oder AC) so entlang, daß sie dabei beständig zur yz-Ebene (oder xz-Ebene) parallel bleibt. Die Figur stellt nur den innerhalb des windschiefen Vierecks gelegenen Teil der Fläche dar, der infolge seiner Rundung den Anfangspunkt O verdeckt. Die Fläche erstreckt sich aber nach allen Seiten hin ins Unendliche. Aus (15) ergibt sich nach (16), daß die Tangentialebene des Punktes P oder $(x; y; z)$ der Fläche in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die Gleichung

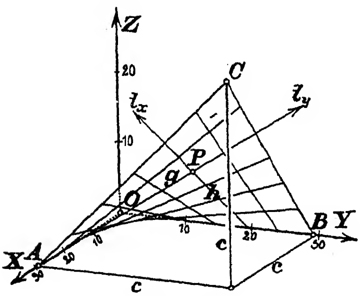


Fig. 422.

$$y\mathfrak{x} + x\mathfrak{y} - c\mathfrak{z} = xy$$

hat. Nun enthält die Fläche zwei durch P gehende Geraden g und h, die zur yz-Ebene bzw. xz-Ebene parallel sind. Da die Tangenten von P diejenigen Geraden sind, die P mit unendlich benachbarten Punkten der Fläche verbinden, sind g und h die zur yz-Ebene und xz-Ebene parallelen Tangenten t_x und t_y des Punktes P. Obwohl die Tangentialebene von P die Fläche in P berührt, schneidet sie also die Fläche in zwei durch P gehenden Geraden g und h. Daß ein derartiger Schnitt stattfinden kann, liegt an der sattelförmigen Gestalt der Fläche. Die Höhenlinien der Fläche ergeben sich aus (16), wenn man für z eine willkürliche Konstante k setzt. Da dann $xy = ck =$ konst. hervorgeht, sind die Höhenlinien nach (10), S. 197, gleichseitige Hyperbeln, deren Asymptoten in der xz-Ebene und yz-Ebene liegen. Aus Gründen, die wir nicht angeben wollen, nennt man die Fläche (16) ein hyperbolisches Paraboloid.

Diese Fläche kann zur räumlichen Veranschaulichung derjenigen Beziehung dienen, die zwischen dem Volumen v, der Spannung p und der absoluten Temperatur Z eines Gases besteht, nämlich der Gleichung

$$T = \frac{vp}{R},$$

worin R eine Konstante ist, siehe (32) im 6. Beispiel, S. 368. Man setze nämlich $x = v$, $y = p$ und $z = T$ und wähle die Konstante c in (16) gleich R. Jeder Punkt P der Fläche im ersten Oktanten gibt durch seine Koordinaten v, p, T einen möglichen Zustand des Gases an. Für trockene Luft ist bei Zugrundelegung der auf S. 367 angegebenen Definitionen von v, p und T die Konstante $R = 29{,}27$. Auf diese Annahme beziehen sich die Zahlenangaben in Fig. 422. Soll sich das Gas isothermisch ändern (vgl. S. 370), so muß der Flächenpunkt P immer dieselbe Höhe über der xy-Ebene behalten, d. h. eine der vorhin erwähnten gleichseitigen Hyperbeln beschreiben.

Wir fügen nun noch einiges über die Darstellung von Kurven im Raum hinzu: Der Punkt P oder $(x; y; z)$ sei nach irgendeinem Gesetz im Raum beweglich, d. h. seine Koordinaten seien gegebene stetige Funktionen der Zeit t[1]:

$$(17) \qquad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t).$$

Zu unendlich benachbarten Werten von t gehören unendlich benachbarte Punkte $(x; y; z)$, d. h. alle durch (17) bedingten Punkte P erfüllen eine lückenlose Kette, eine sogenannte Raumkurve, die Bahnkurve eines beweglichen Punktes P. Ob wir die Größe t als Zeit oder als irgendeine Hilfsveränderliche betrachten, ist für die Gestalt der Kurve einerlei.

Wir wollen zum Beispiel als Gleichungen (17) insbesondere in t lineare Gleichungen annehmen:

$$(18) \qquad x = a + m t, \quad y = b + n t, \quad z = c + r t,$$

wo a, b, c und m, n, r Konstanten seien. Für die senkrechte Projektion der Kurve auf die xy-Ebene gelten die beiden ersten Gleichungen, aus denen durch Elimination von t eine in x und y lineare Gleichung $nx - my = na - mb$ hervorgeht, was besagt, daß die Projektion eine Gerade liefert. Da auch die Projektion der Kurve auf die xz-Ebene und auf die yz-Ebene Geraden ergibt, stellen die Gleichungen (18) eine Gerade im Raum dar.

Man kann leicht zeigen, daß sich jede Gerade in der Form (18) darstellen läßt. Dazu genügt es, anzugeben, wie man diejenige Gerade ausdrücken kann, die durch irgend zwei gegebene Punkte $(x_1; y_1; z_1)$ und $(x_2; y_2; z_2)$ geht, nämlich so:

$$\begin{aligned} x &= (1-t)\,x_1 + t\,x_2, & \qquad & & x &= x_1 + (x_2 - x_1)\,t, \\ y &= (1-t)\,y_1 + t\,y_2, & \qquad &\text{d. h.} & y &= y_1 + (y_2 - y_1)\,t, \\ z &= (1-t)\,z_1 + t\,z_2, & \qquad & & z &= z_1 + (z_2 - z_1)\,t. \end{aligned}$$

Die zweite Form ordnet sich der allgemeinen Form (18) unter, so daß wirklich eine Gerade vorliegt, und die erste Form zeigt, daß x, y, z für $t = 0$ gleich x_1, y_1, z_1 und für $t = 1$ gleich x_2, y_2, z_2 werden, so daß die Gerade wirklich durch die beiden gegebenen Punkte geht.

Wird die durch (18) dargestellte Gerade im Sinn wachsender Werte von t durchlaufen, so hat sie bestimmte Richtungskosinus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Wenn t um die Einheit wächst, nehmen x, y, z um

[1] Dies ist die Verallgemeinerung der krummlinigen Bewegungen in § 5 des neunten Kapitels. Da wir dort in (1), S. 510, schon $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ gesetzt hatten, fügen wir jetzt $z = \chi(t)$ hinzu, obgleich im griechischen Alphabet χ vor ψ vorangeht.

m, n, r zu. Deshalb folgt aus Satz 12, daß die Richtungskosinus zu m, n, r proportional sind und dieselben Vorzeichen wie m, n, r haben. Nach Satz 11 ist also:

$$\cos\alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+r^2}}, \quad \cos\beta = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+r^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{r}{\sqrt{m^2+n^2+r^2}},$$

und dabei hat die Wurzel das Pluszeichen. Statt t können wir die zu t proportionale Größe $t\sqrt{m^2+n^2+r^2}$ als Hilfsveränderliche τ einführen, d. h. wir messen die Zeit mit einer anderen Einheit. Dann lassen sich die Gleichungen (18) so schreiben:

$$x = a + \tau\cos\alpha\,, \quad y = b + \tau\cos\beta\,, \quad z = c + \tau\cos\gamma\,.$$

Zur Zeit $\tau = 0$ ist $x = a$, $y = b$, $z = c$. Wenn wir nun die Koordinaten des Ausgangspunktes $(a; b; c)$ der geradlinigen Bewegung mit x_0, y_0, z_0 bezeichnen und t statt τ schreiben, folgt

Satz 25: Diejenige Gerade im Raum, die von einem Punkt $(x_0; y_0; z_0)$ mit den Richtungskosinus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ausgeht, läßt sich mittels einer Hilfsveränderlichen t durch

$$x = x_0 + t\cos\alpha\,, \qquad y = y_0 + t\cos\beta\,, \qquad z = z_0 + t\cos\gamma$$

darstellen. Dabei entspricht der Fortschreitungssinn auf der Geraden den wachsenden Werten von t.

Wir kehren zu den allgemeinen Gleichungen (17) oder

$$x = \varphi(t)\,, \qquad y = \psi(t)\,, \qquad z = \chi(t)$$

einer beliebigen Bahnkurve im Raum zurück und wollen auch hier annehmen, daß die Kurve im Sinn wachsender Werte von t durchlaufen werde. Außerdem setzen wir voraus, daß die Funktionen φ, ψ, χ von t differentiierbar seien. In einem unendlich kleinen Zeitteilchen dt beschreibt der Kurvenpunkt P oder $(x; y; z)$ ein unendlich kleines Bogenstück PP', das man ein Wegdifferential oder Bogenelement ds nennt (vgl. S. 477). Die Koordinaten von P' sind um die Differentiale

$$(19) \qquad dx = \varphi'(t)\,dt\,, \qquad dy = \psi'(t)\,dt\,, \qquad dz = \chi'(t)\,dt$$

größer als die von P. Daher hat die Tangente der Bahn in P, d. h. die Gerade PP', nach Satz 12 Richtungskosinus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, die zu diesen Differentialen proportional sind und dieselben Vorzeichen wie diese Differentiale haben, sobald auch die Tangente im Sinn wachsender Werte von t mit dem Pfeil versehen wird. Dann sind $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ proportional zu $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$, und sie

haben dieselben Vorzeichen wie diese Differentialquotienten. Nach Satz 11 ist daher:

(20) $$\cos\alpha = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2}},$$

und die Werte $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ gehen hieraus hervor, wenn man den Zähler durch $\psi'(t)$ und $\chi'(t)$ ersetzt. Die Wurzel hat das Pluszeichen. Das Bogenelement ds oder PP' kann als geradlinig betrachtet werden. Nach (4), S. 671, ist

(21) $$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

daher nach (19):

(22) $$ds = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2}\,dt,$$

und hierin ist die Wurzel positiv, wenn die Bogenlänge im Sinn wachsender Werte von t positiv gerechnet wird, da dann ds zugleich mit dt positiv sein muß. Die Richtungskosinus der Tangente, siehe (20), lassen sich mit Rücksicht auf (19) und (22) auch so darstellen:

(23) $$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Die Größe

(24) $$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2}$$

ist die Geschwindigkeit der Bewegung zur Zeit t, vgl. (8), S. 517. Die Bogenlänge der Kurve von $t = 0$ bis zu einer beliebigen Zeit t ist das Integral:

(25) $$s = \int_0^t \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2}\,dt.$$

Das Vornergehende ist eine Verallgemeinerung von Betrachtungen in § 5 des neunten Kapitels. Man kann auch die übrigen Untersuchungen jenes Paragraphen auf den Raum verallgemeinern, aber uns würde das zu weit führen.

5. Beispiel: In der xy-Ebene drehe sich ein Punkt Q oder $(x; y)$ gleichmäßig um den Anfangspunkt O, indem er einen Umlauf in der Zeit T vollende. Er befinde sich zur Zeit $t = 0$ auf der positiven x-Achse in Q_0 in der Entfernung a von O. Auch a sei positiv. Zur Zeit t hat der Punkt Q die Koordinaten:

$$x = a\cos\frac{2\pi t}{T}, \qquad y = a\sin\frac{2\pi t}{T}, \qquad z = 0,$$

vgl. das 5. Beispiel, S. 519 u. f. Bei der Drehung führe Q das in Q auf der xy-Ebene errichtete Lot mit sich. Es erzeugt einen Rotationszylinder vom Radius a mit der z-Achse als Drehachse, siehe Fig. 423. Während der Bewegung durchlaufe nun ein Punkt

P dies Lot gleichförmig. Zur Zeit $t = 0$, wo das Lot in Q_0 aufsteht, liege P in Q_0 selbst, und nach einem Umlaufe, d. h. zur Zeit $t = T$, habe P die positive oder negative Höhe h erreicht. (In Fig. 423 ist h positiv.) Die Bahnkurve von P ist eine auf dem Zylinder verlaufende Linie, die eine Schraubenlinie heißt. Die Strecke a ist der Schraubenradius, die z-Achse die Schraubenachse. Die positive oder negative Strecke h heißt die Ganghöhe der Schraube. Offenbar besteht die Schraubenlinie aus lauter kongruenten Umläufen um den Zylinder, von denen jeder die Höhe h hat. Ist h positiv (wie in Fig. 423) oder negativ, so heißt die Schraubenlinie rechtsgewunden oder linksgewunden wegen der Art, wie man eine Schraube mit derartigen Schraubenlinien einzuschrauben hat. Die gewöhnlich vorkommenden Schrauben sind rechtsgewunden. Der Techniker nennt die Schraubenlinien auch Spiralen; wir verstehen aber unter Spiralen etwas anderes, vgl. S. 350. Die Höhe z von P zur Zeit t bestimmt sich aus $z : h = t : T$. Demnach sind:

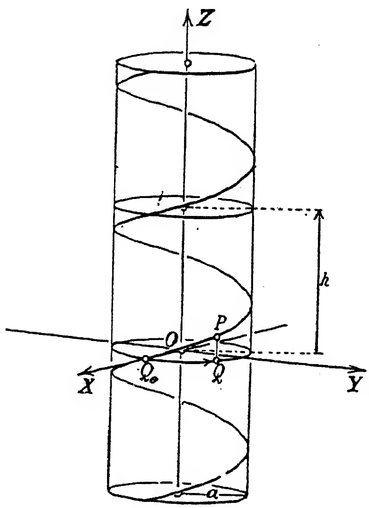


Fig. 423.

$$x = a\cos\frac{2\pi t}{T}, \qquad y = a\sin\frac{2\pi t}{T}, \qquad z = \frac{h t}{T}$$

die Gleichungen der Schraubenlinie. Aus (20) ergeben sich als Richtungskosinus der Tangente:

$$\cos\alpha = \frac{-2\pi a \sin\dfrac{2\pi t}{T}}{\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{2\pi a\cos\dfrac{2\pi t}{T}}{\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}}, \qquad \cos\gamma = \frac{h}{\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}},$$

und dabei ist die Wurzel positiv. Da für $\cos\gamma$ ein von t freier, also konstanter Wert hervorgeht, bilden alle Tangenten der Schraubenlinie mit der Schraubenachse denselben Winkel, folglich auch mit den Geraden des Zylinders. Eine Schraubenlinie ist daher eine Kurve, die alle Geraden eines Rotationszylinders unter demselben Winkel durchsetzt. Wenn man den Zylinder aus Papier herstellt und dann auf der Ebene ausbreitet, geht die Schraubenlinie in eine Gerade über, ebenso wie der Grundkreis des Zylinders. Der Winkel, unter dem die erste Gerade gegenüber der zweiten Geraden ansteigt, heißt der Steigwinkel der Schraubenlinie. Er ist das Komplement des Winkels γ. Die Bogenlänge s der Schraubenlinie von Q_0 bis zu einer beliebigen Stelle P, d. h. von $t = 0$ bis zu einem beliebigen Wert von t ist nach (25) gleich $t\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2} : T$.

§ 4. Funktionen des Ortes in der Ebene.

Im vorhergehenden Paragraphen haben wir eine Funktion

(1) $$z = f(x, y)$$

von zwei unabhängigen Veränderlichen x und y mit Hilfe der drei recht-

winkligen Koordinaten x, y, z als Fläche im Raum gedeutet. Wir erkannten, daß die Differentialformel

$$(2) \qquad dz = f_x\, dx + f_x\, dy$$

besagt, daß alle Tangenten eines Flächenpunktes eine Ebene bilden (siehe S. 682 u. f.). Die Funktion (1) und ihre Differentialformel (2) lassen sich aber auch schon in der xy-Ebene allein deuten, so daß man den Raum nicht zu Hilfe zu nehmen braucht. Wir stellen uns nämlich vor, die Ebene sei mit Masse belegt. Die Werte, die durch die Funktion z an beliebigen Stellen $(x; y)$ der Ebene angegeben werden, sollen dort die Dichte der Masse anzeigen. Ein unendlich kleines Stück der Ebene um einen Punkt $(x; y)$ herum trägt dann die Masse $z \,.\, dF$, wenn dF der Flächeninhalt des Stückes ist. Man kann auch andere physikalische Deutungen vornehmen. So kann man sich etwa vorstellen, die Ebene sei an verschiedenen Stellen verschieden stark erwärmt, und z bedeute die Temperatur an der Stelle $(x; y)$. In diesem Fall haben auch negative Werte von z einen Sinn. Die Ebene könnte auch eine Landkarte vorstellen und z die Dichte der Bevölkerung an der Stelle $(x; y)$ bedeuten, u. dgl. mehr. Wir werden unbeschadet dieser vielen Möglichkeiten im folgenden die Redeweise anwenden, die Ebene sei mit Masse belegt, die an der Stelle $(x; y)$ die durch (1) gegebene Dichte z habe. Wir werden dabei aber auch negative Werte zulassen.

Frei von allen Deutungen, die nicht rein mathematischer Natur sind, ist die Auffassung von $z = f(x, y)$ als einer Funktion des Ortes $(x; y)$ in der Ebene, d. h. die Annahme, daß jeder Stelle $(x; y)$ der Ebene vermöge einer Formel (1) ein bestimmter positiver oder negativer Zahlenwert z zugeordnet sei. In der Physik nennt man solche Ortsfunktionen auch Potentiale in der Ebene. In der sogenannten Vektorrechnung heißen sie Skalare.

Die x- und y-Einheit setzen wir gleich groß, nämlich gleich der in der xy-Ebene überhaupt zu benutzenden Längeneinheit voraus. In Anlehnung an die Bezeichnung im vorigen Paragraphen wollen wir einen beliebigen Punkt $(x; y)$ der Ebene auch jetzt Q und nicht P nennen.

Wird ein Punkt Q ins Auge gefaßt, so gehört zu ihm nach (1) ein bestimmter Wert der Dichte z. Wandert Q nach irgendeinem unendlich benachbarten Punkt Q', wobei x und y um Differentiale dx und dy zunehmen, so wächst die Dichte z um das durch (2) dargestellte Differential dz. Ist ds die positive gemessene Länge des Weges QQ', also die positive Quadratwurzel aus $dx^2 + dy^2$, so stellt $dz : ds$ die Geschwindigkeit v dar, mit der sich die Dichte auf dem Wege QQ'

ändert. Diese Geschwindigkeit hängt nur von der Richtung QQ' und nicht auch von der Länge ds des Weges ab, denn wenn man den Winkel τ einführt, um den sich die positive x-Achse drehen muß, um zur Richtung von Q nach Q' parallel zu werden, ist $dx : ds$ gleich $\cos\tau$ und $dy : ds$ gleich $\sin\tau$, daher dx gleich $ds\cos\tau$ und dy gleich $ds\sin\tau$, also nach (2)

$$dz = (f_x \cos\tau + f_y \sin\tau)\,ds\,,$$

d. h. die Geschwindigkeit:

$$(3)\qquad v = \frac{dz}{ds} = f_x \cos\tau + f_y \sin\tau.$$

Dieser Ausdruck ist in der Tat von der Länge des zurückgelegten unendlich kurzen Weges ds unabhängig, dagegen nicht vom Winkel τ.

Auf jeder von Q ausgehenden Richtung QQ', d. h. für jeden Winkel τ denken wir uns die zugehörige Geschwindigkeit v als Strecke, gemessen mit der Längeneinheit, von Q aus aufgetragen. Wird dabei die Vorschrift beachtet, daß die Strecke in der Richtung von Q nach Q' liegen soll, wenn v positiv ist, dagegen in der rückwärtigen Verlängerung von QQ' über Q hinaus, wenn v negativ ist, so liegt auf jeder Geraden durch Q nur eine Strecke v. Denn wenn die Richtung in die entgegengesetzte übergeht, d. h. wenn τ um π wächst, ändert sich nach (3) nur das Vorzeichen von v, so daß für beide Richtungen dieselbe von Q ausgehende Strecke zu zeichnen ist. Der geometrische Ort der Endpunkte aller von Q ausgehenden Strecken v ist leicht zu bestimmen: In der Richtung QQ_1 parallel zur positiven x-Achse ist $dy = 0$ und $\tau = 0$, also die Geschwindigkeit $v_1 = f_x$, in der Richtung QQ_2 parallel zur positiven y-Achse ist $dx = 0$ und $\tau = \frac{1}{2}\pi$, also die Geschwindigkeit $v_2 = f_y$ siehe Fig. 424. Nach (3) setzt sich nun der allgemeine Wert v aus $v_1 = f_x$ und $v_2 = f_y$ so zusammen:

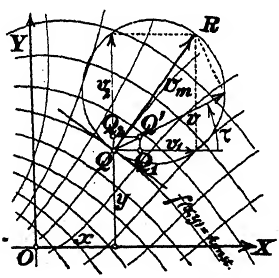


Fig. 424.

$$(4)\qquad v = v_1 \cos\tau + v_2 \sin\tau\,.$$

Hiernach ist die Strecke v, die zu einem beliebigen Winkel τ gehört, die Summe der Projektionen von v_1 und v_2 auf die betreffende Richtung. Diese Summe ist gleich der Projektion derjenigen Strecke, die sich ergibt, wenn man aus v_1 und v_2 nach der Regel vom Parallelogramm der Kräfte die Mittelkraft QR bildet, also die Diagonale v_m des Rechtecks mit den Seiten v_1 und v_2 zieht. Die Endpunkte

aller Strecken v sind demnach die Fußpunkte der Lote von R auf alle von Q ausgehenden Geraden und liegen somit auf dem Kreis, der QR zum Durchmesser hat. Alle von Q ausgehenden Geschwindigkeiten v der Änderung der Ortsfunktion $z = f(x, y)$ sind also Sehnen dieses Kreises. In der Richtung QR erreicht die Geschwindigkeit ihr Maximum

(5) $$v_m = \sqrt{f_x^2 + f_y^2},$$

wobei die Wurzel positiv ist. In der entgegengesetzten Richtung erreicht sie ihr Minimum $-v_m$. In zu QR senkrechter Richtung dagegen wird die Geschwindigkeit v gleich Null.

Man muß beachten, daß die Steigung von QR oder v_m, nämlich $v_2 : v_1$ oder $f_y : f_x$, eine Funktion von x und y ist, so daß die Richtung von v_m im allgemeinen für verschiedene Punkte Q der Ebene verschieden ausfällt. Nun möge der Punkt Q oder $(x; y)$ so in der Ebene hinwandern, daß die zugehörige Dichte $z = f(x, y)$ immer denselben Wert behält. Die Kurve, die er beschreibt, heißt eine Niveaukurve oder Kurve konstanten Potentials. Sie wird durch eine Gleichung $f(x, y) =$ konst. dargestellt. Nach dem Vorhergehenden muß ihre Tangente an jeder Stelle Q zu der von Q ausgehenden Maximalgeschwindigkeit v_m senkrecht sein. Nach (2) ergibt sich aus $f(x, y) =$ konst. für $dy : dx$ der Wert $-f_x : f_y$, und diese Steigung ist in der Tat senkrecht zur Steigung $f_y : f_x$ von v_m (nach Satz 4, S. 177). Soll dagegen Q eine Kurve stärksten Gefälles beschreiben, d. h. eine Kurve, auf der sich z beständig so stark wie möglich ändert, so muß die Bahn an jeder Stelle Q die Richtung der von Q ausgehenden Maximalgeschwindigkeit v_m haben, d. h. die Kurven stärksten Gefälles durchkreuzen die Niveaukurven senkrecht. Pfeile längs dieser Kurven im Sinn von v geben an, wie sie zu durchlaufen sind, damit z am stärksten zunimmt; im entgegengesetzten Sinn wird z am stärksten abnehmen. Daher entsteht ein Netz von Kurven etwa wie in Fig. 425. Dies Netz ist eigentlich überall unendlich dicht zu denken, und seine Maschen sind überall rechtwinklig. In der Theorie des Magnetismus, wo z ein magnetisches Potential bedeutet, veranschaulicht ein derartiges Netz ein ebenes magnetisches Kraftfeld. Dann heißen die Kurven stärksten

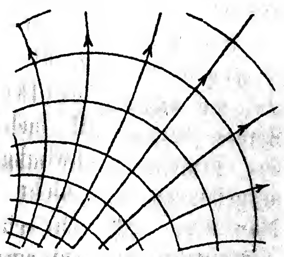


Fig. 425.

Gefälles Kraftlinien. Deutet man dagegen $z = f(x, y)$ wie auf S. 681 u. f. als Gleichung einer Fläche im Raum, so sind die soeben betrachteten Kurven die Projektionen der Höhenlinien und Kurven stärksten Gefälles der Fläche auf die xy-Ebene, vgl. S. 685 u. f.

1. Beispiel: Die xy-Ebene sei so mit Masse belegt, daß die Dichte an der Stelle $(x; y)$ den Wert $z = xy$ hat. In Fig. 426 sind für eine Reihe von Punkten die zugehörigen Dichten angegeben (aus Gründen der Raumersparnis nur für positive Werte von x und y). Obgleich diese Abbildung lückenhaft ist, kann man die Linien gleicher Dichte z ungefähr verfolgen. Die Niveaukurven $xy =$ konst. sind nach S. 197 die

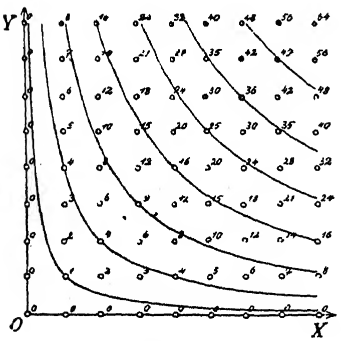


Fig. 426.

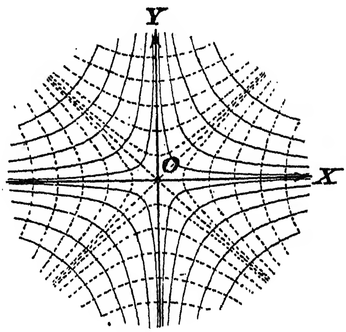


Fig. 427.

gleichseitigen Hyperbeln mit den Koordinatenachsen als Asymptoten. Längs der Kurven stärksten Gefälles ist hier wegen $f = xy$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_y}{f_x} = \frac{x}{y} \quad \text{oder} \quad x\,dx - y\,dy = 0,$$

d. h. $d(x^2 - y^2) = 0$, also $x^2 - y^2$ konstant, so daß die Kurven stärksten Gefälles ebenfalls gleichseitige Hyperbeln sind. Ihre Asymptoten gehen durch O und bilden mit den Koordinatenachsen 45°. Siehe Fig. 427, worin die Niveaukurven ausgezogen und die Kurven stärksten Gefälles punktiert sind.

Die Maximalgeschwindigkeit v_m kann für gewisse Punkte $(x; y)$ gleich Null werden. Dies tritt nach (5) an denjenigen Stellen ein, wo sowohl f_x als auch f_y den Wert Null hat. Solche Stellen heißen singuläre Stellen des Netzes. In ihnen gilt das Frühere nicht mehr, denn alle von einer derartigen Stelle ausgehenden Geschwindigkeiten v haben nach (3) den Wert Null. Man kann daher nicht wie früher schließen, daß sich dort zwei Netzkurven senkrecht schneiden. (In dem soeben gebrachten Beispiel, Fig. 427, ist der Anfangspunkt O eine singuläre Stelle.) Auf Punkte von dieser Art kommen wir nachher noch einmal zurück. Hier bemerken wir nur, daß in einem magnetischen Kraftfelde diejenigen Punkte, die Kraftquellen bedeuten, singuläre Stellen sind.

Nun werde in der xy-Ebene irgendeine geschlossene Linie c gezogen, siehe Fig. 428. Die Frage ist, wieviel Masse sie einschließt. Durch Parallelen zur y-Achse und Parallelen zur x-Achse teilen wir die Fläche in unendlich viele unendlich kleine Rechtecke von den Seitenlängen dx und dy. Man darf sagen, daß demjenigen Rechteck, dessen eine Ecke der Punkt $(x; y)$ ist und dessen gegenüberliegende Ecke die Koordinaten $x + dx$, $y + dy$ hat, die Dichte $z = f(x, y)$ zukommt, da es unendlich klein ist. Es hat den Flächeninhalt $dx\,dy$ und trägt somit die Masse $f(x, y)\,dx\,dy$. Nun addieren wir die Massen aller über demselben dx gelegenen und in Fig. 428 geschrafften Rechtecke. Allen diesen Rechtecken kommt dasselbe x und dasselbe dx zu. Dagegen geht y von einem gewissen kleinsten Wert y_0 bis zu einem gewissen größten Wert y_1. Demnach sind alle Werte $f(x, y)\,dx\,dy$ von $y = y_0$ bis $y = y_1$ bei festgehaltenem x und dx zu summieren, d. h. wir haben das Integral zu bilden unter der Annahme, daß y die einzige Veränderliche unter dem Integralzeichen sei, und daß sie von y_0 bis y_1 wachse[1]. Der allen Summanden gemeinsame Faktor kann herausgesetzt werden. Um hervorzuheben, daß nur y als veränderlich betrachtet wird, d. h. daß partiell nach y integriert werden soll, schreiben wir ∂y statt dy. Die Masse des betrachteten Streifens ist demnach:

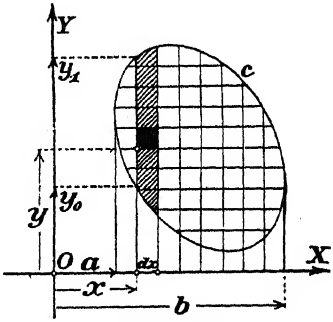


Fig. 428.

$$\left[\int_{y_0}^{y_1} f(x,y)\,\partial y\right] dx\,.$$

Beim Ausrechnen muß man zunächst das unbestimmte Integral $\int f(x, y)\,\partial y$ so ermitteln, als ob x eine Konstante wäre. Dadurch geht dann aber eine Funktion von y hervor, in der auch x vorkommt. Nehmen wir an, es ergebe sich $F(x, y)$. Dann ist das bestimmte Integral gleich $F(x, y_1) - F(x, y_0)$, demnach die Masse des betrachteten Streifens gleich $[F(x, y_1) - F(x, y_0)]\,dx$. Nun muß man beachten, daß y_0 und y_1 die Ordinaten derjenigen Stellen

[1] Man beachte, daß die Rechtecke in Fig. 428 eigentlich unendlich klein sein sollen, also Bruchteile von solchen Rechtecken nicht in Betracht kommen (vgl. auch S. 224).

der Randlinie c sind, denen die beliebig gewählte Abszisse x zukommt. Daher sind y_0 und y_1 gewisse Funktionen von x, die man aus der Gleichung zu berechnen hat, die in x und y die Randlinie c darstellt. Der gefundene Wert $[F(x, y_1) - F(x, y_0)]\,dx$ bekommt dann eine Form $\varphi(x)\,dx$. Schließlich ist die Summe der Massen aller zur y-Achse parallelen Streifen zu bilden, d. h. jetzt ist über x zu integrieren. Dabei geht x von einem gewissen kleinsten Wert a bis zu einem gewissen größten Wert b, siehe wieder Fig. 428. Somit ist das bestimmte Integral über $\varphi(x)\,dx$ von $x = a$ bis $x = b$ zu bilden. Demnach ergibt sich als Gesamtmasse der Fläche:

$$M = \int_a^b [F(x, y_1) - F(x, y_0)]\,dx$$

oder, da der Inhalt der eckigen Klammer das partielle Integral über $f(x,y)\,\partial y$ von $y = y_0$ bis $y = y_1$ bedeutet:

$$M = \int_a^b \left[\int_{y_0}^{y_1} f(x, y)\,\partial y\right] dx. \tag{6}$$

Die gesamte Masse wird demnach als ein sogenanntes Doppelintegral dargestellt. Wie die vorhergehende Betrachtung zeigt, läßt sich die Integration über x erst dann ausführen, wenn man die Grenzen y_0 und y_1 des Integrals über y als Funktionen von x aus der Gleichung der Randlinie c ermittelt hat.

Man kann aber auch zuerst partiell über x und dann über y integrieren. Denn man kann zuerst die Massen aller derjenigen Rechtecke addieren, die einen zur x-Achse parallelen Streifen ausmachen, siehe Fig. 429. Diese Rechtecke liegen über einer zur x-Achse parallelen Geraden mit beliebiger Ordinate y, und x wächst längs der Geraden von einem Anfangswerte x_0 bis zu einem Endwerte x_1, so daß die Masse des Streifens gleich

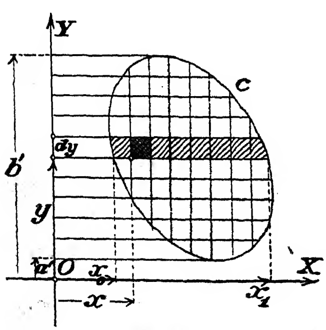


Fig. 429.

$$\left[\int_{x_0}^{x_1} f(x, y)\,\partial x\right] dy$$

ist. Die Integration ist hierin wieder partiell, nämlich so auszuführen, als ob y eine Konstante wäre. Nun sind x_0 und x_1 die

zu einer beliebigen Ordinate y gehörigen Abszissen der Randkurve c und also gewisse Funktionen von y, die man ermitteln muß, ehe man weiterhin die Massen aller Streifen addiert, ehe man also das Integral

$$(7) \qquad M = \int_{a'}^{b'} \left[\int_{x_0}^{x_1} f(x, y)\, \partial x \right] d y$$

bildet, worin a' und b' in Fig. 429 den kleinsten und größten Wert der Ordinate y der Randkurve c bedeuten.

2. Beispiel: Wie im 1. Beispiele sei $z = xy$ die Dichte der Masse. Wir suchen die Gesamtmasse eines Viertels einer Ellipse, deren Mittelpunkt O sei und deren Halbachsen a und b auf den Koordinatenachsen liegen. Das Viertel sei das im ersten Quadranten, siehe Fig. 430. Bei der ersten Art der Summierung ist $y_0 = 0$ und nach (2), S. 188:

$$y_1 = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

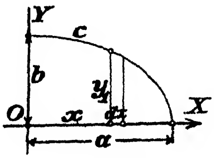


Fig. 430.

wobei die Wurzel positiv ist. Da $f(x, y)$ jetzt die Funktion xy ist, berechnen wir nach (6) zuerst das unbestimmte Integral $\int x y \,\partial y$ bei festgehaltenem x, also $x \int y \,\partial y$. Dadurch geht $\frac{1}{2} x y^2$ hervor. Nun ist das Integral von $y_0 = 0$ bis y_1 zu erstrecken. Sein Wert ist:

$$\tfrac{1}{2} x (y_1^2 - y_0^2) \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{2} x \cdot \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2).$$

Weil ferner x von 0 bis a zu erstrecken ist, ergibt sich als Gesamtmasse des Ellipsenviertels:

$$M = \int_0^a \frac{b^2}{2 a^2} (a^2 x - x^3)\, dx = \frac{b^2}{2 a^2} \left[\frac{a^2}{2} x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_0^a = \frac{a^2 b^2}{8}.$$

Man beweise, daß dasselbe mit Hilfe der Formel (7) statt (6) hervorgeht. Da die Viertelellipse nach dem 12. Beispiel, S. 592, die Fläche $F = \frac{1}{4} \pi a b$ hat, stellt der Bruch

$$\frac{M}{F} = \frac{a^2 b^2}{8} \cdot \frac{4}{\pi a b} = \frac{a b}{2 \pi}$$

die mittlere Dichte des Ellipsenviertels dar.

Hier sei eingeschaltet: Wenn wir $z = f(x, y)$ nicht als Dichte einer Massenbelegung der Ebene, sondern wie auf S. 681 als Höhe einer Fläche im Raum auffassen, bedeutet M in (6) und (7) das Volumen des Körpers, der über dem von c umrandeten Flächenstücke der $x y$-Ebene senkrecht aufsteht und bis an die krumme Fläche reicht, siehe Fig. 431, denn $f(x, y)\, dx\, dy$ oder $z\, d x\, d y$ bedeutet dann das Volumen der über dem Rechteck $d x\, d y$ der $x\, y$-Ebene stehen-

den Säule dieses Körpers von der Höhe $f(x,y)$. Somit lassen sich die Volumina in der Form (6) oder (7) als Doppelintegrale darstellen.

3. Beispiel: Der im 2. Beispiele berechnete Wert $M = \frac{1}{8} a^2 b^2$ ist das Volumen eines über dem Ellipsenviertel stehenden Körpers, der bis an das hyperbolische Paraboloid heranreicht, das nach dem 4. Beispiel auf S. 685. u. f. durch $z = xy$ bestimmt wird.

Dasselbe Integrationsverfahren ist anzuwenden, wenn man die statischen Momente oder die Trägheitsmomente der in der Randlinie c eingeschlossenen Masse von der Dichte $z = f(x, y)$ in bezug auf irgendeine Gerade berechnen will (vgl. S. 246 u. f. und S. 253 u. f.). Ist nämlich

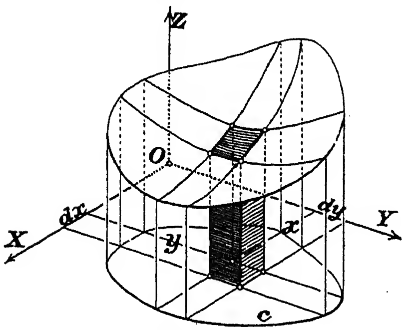


Fig. 431.

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

die Gleichung der gewählten Geraden in der Normalform, siehe das 1. Beispiel, S. 659, so stellt die linke Seite der Gleichung für einen beliebigen Punkt $(x; y)$ der Ebene den Abstand dieses Punktes von der Geraden dar. Das statische Moment und das Trägheitsmoment der Masse $f(x, y)\,dx\,dy$, die in einem unendlich kleinen Rechteck an der Stelle $(x; y)$ enthalten ist, haben daher die Werte

$$(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p) f(x, y)\,dx\,dy\,,$$
$$(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p)^2 f(x, y)\,dx\,dy\,.$$

Mithin bilden wir gerade so wie vorhin das Doppelintegral (6) oder (7), aber darin ersetzen wir $f(x, y)$ durch

$$(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p) f(x, y) \quad \text{oder} \quad (x \cos \alpha + y \sin \alpha - p)^2 f(x, y).$$

Verstehen wir wie im vorigen Paragraphen unter $z = f(x, y)$ die Gleichung einer Fläche im Raum, so können wir mittels eines Doppelintegrals auch den Flächeninhalt dieser krummen Fläche ausdrücken, der über dem durch die Kurve c eingeschlossenen Gebiete der xy-Ebene liegt. Denn über einem unendlich kleinen Rechteck $dx\,dy$, das an der Stelle $(x; y)$ liegt, befindet sich ein unendlich kleines und daher als eben zu betrachtendes Stück der krummen Fläche, siehe wieder Fig. 431. Bekanntlich gibt die Projektion eines ebenen Flächenstücks F auf

die xy-Ebene ein Flächenstück F' derart, daß $F':F$ gleich dem Kosinus des Winkels ν zwischen der xy-Ebene und der Ebene von F ist. Somit ist $F = F' : \cos\nu$. Da das unendlich kleine Rechteck der Flächeninhalt $d\,x\,d\,y$ hat, liegt also darüber ein unendlich kleines Stück der krummen Fläche, dem der Flächeninhalt $d\,x\,d\,y : \cos\nu$ zukommt. Nun ist der Winkel ν gleich dem Winkel, den das Lot zur xy-Ebene, d. h. die z-Achse, mit der Normale der krummen Fläche bildet. Der Wert von $\cos\nu$ ist unter (14) auf S. 683 angegeben. Daher liegt über dem Rechteck $d\,x\,d\,y$ ein Stück der krummen Fläche, das den Flächeninhalt

$$\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,d\,x\,d\,y$$

hat. Wenn man also in den Doppelintegralen (6) und (7) an die Stelle von $f(x, y)$ die Funktion $\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$ setzt, liefern sie den Flächeninhalt desjenigen Teiles der krummen Fläche $z = f(x, y)$, der über dem von der Randlinie c eingeschlossenen Teil der xy-Ebene liegt. Die Aufgabe, den Flächeninhalt einer krummen Fläche zu bestimmen, heißt übrigens die der Komplanation (Verebnung) der krummen Fläche.

Wir gehen aber nun wieder zurück zur Vorstellung einer Massenbelegung der xy-Ebene mit der Dichte $z = f(x, y)$. Jetzt wollen wir voraussetzen, daß nicht nur f selbst, sondern auch die partiellen Differentialquotienten f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} stetig seien. Dann fragen wir nach solchen Stellen $(x_0; y_0)$ oder Q_0 der Ebene, an denen die Dichte z einen größten oder kleinsten Wert erreicht. Man muß fordern, daß die Dichte auf allen durch eine derartige Stelle Q_0 gehenden Wegen ein Maximum oder Minimum gerade in Q_0 bekomme. Daher ziehen wir durch Q_0 eine beliebige Bahnkurve. Sie läßt sich nach (1), S. 510, mit Hilfe der Zeit t in der Form

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{8}$$

darstellen. Von den Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ ist dann zu verlangen, daß sie für einen bestimmten Zeitpunkt, etwa für $t = 0$, die Werte x_0 und y_0 annehmen. Man kann sie aber so wählen, daß ihre Differentialquotienten $\varphi'(t)$ und $\psi'(t)$ für $t = 0$ irgendwelche Werte bekommen. Da wir uns vorstellen, ein Punkt Q soll längs der Kurve durch Q_0 hindurchgehen, müssen wir den Fall ausschließen, daß in Q_0 ein Stillstand auf der Kurve eintritt, d. h. wir setzen voraus: $\varphi'(t)$ und $\psi'(t)$ haben zwar für $t = 0$ beliebige Werte, aber diese dürfen nicht alle beide gleich Null sein. Längs der Bahn (8) ist nun die Größe z oder $f(x, y)$ eine Funktion der Zeit t:

(9) $$z = f(\varphi(t),\ \psi(t)).$$

Nach Satz 5, S. 650, hat sie den Differentialquotienten:

(10) $$\frac{dz}{dt} = f_x x' + f_y y'.$$

Zur Abkürzung ist hierin x, y, x', y' statt $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ geschrieben. Abermalige Differentiation liefert, weil x, y, x', y' sämtlich Funktionen von t sind:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = (f_{xx}x' + f_{xy}y')\,x' + f_x x'' + (f_{yx}x' + f_{yy}y')\,y' + f_y y''$$

oder, da f_{yx} nach Satz 6, S. 654, gleich f_{xy} ist:

(11) $$\frac{d^2 z}{dt^2} = f_{xx}x'^2 + 2 f_{xy}x'y' + f_{yy}y'^2 + f_x x'' + f_y y''.$$

Da die Funktion (9) für $t = 0$ ein Maximum oder Minimum haben soll, muß nach Satz 8, S. 106, ihr erster Differentialquotient (10) für $t = 0$ verschwinden, und zwar für alle Bahnkurven durch Q_0, also für alle beliebigen Werte, die $\varphi'(t)$ und $\psi'(t)$ oder x' und y' für $t = 0$ annehmen können. Demnach müssen f_x und f_y an der Stelle Q_0 gleich Null sein. Ist dies der Fall, so hat der zweite Differentialquotient (11) an dieser Stelle, also für $t = 0$ denjenigen Wert, der aus

(12) $$f_{xx}x'^2 + 2 f_{xy}x'y' + f_{yy}y'^2$$

für $t = 0$ hervorgeht. Falls dieser Wert nicht gleich Null ist, tritt nun nach Satz 6, S. 461, ein Maximum oder Minimum ein, je nachdem der Wert negativ oder positiv ist, aber nur wenn dies für alle Bahnkurven durch Q_0 gilt. Erinnern wir uns daran, daß x' und y' für $t = 0$ durchaus beliebige Werte haben können, die nur nicht beide gleich Null sein dürfen, es ergibt sich also, wenn wir von jetzt an die gesuchte Stelle nicht $(x_0;\ y_0)$, sondern bequemer $(x;\ y)$ nennen:

An einer Stelle $(x;\ y)$ hat z oder $f(x, y)$ ein Maximum oder Minimum, falls dort erstens $f_x = 0$ und $f_y = 0$ und zweitens der Ausdruck (12) für alle nicht zugleich verschwindenden, sonst aber völlig beliebigen Werte von x' bzw. y' beständig negativ oder beständig positiv, aber nie gleich Null wird. Die Frage, unter welchen Bedingungen dies der Fall ist, wollen wir jedoch nur unter der Voraussetzung, daß der Ausdruck

(13) $$D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$$

an der Stelle $(x;\ y)$ von Null verschieden sei, vollkommen beantworten. In dem Fall nämlich, wo D gleich Null wird, muß

man zur Entscheidung auch die höheren partiellen Differentialquotienten von $f(x, y)$ heranziehen, und darauf gehen wir nicht ein.

Zunächst sei $f_{xx} \neq 0$ an der Stelle (x, y). Dann läßt sich (12) nach Multiplikation mit f_{xx} und darauffolgender Division mit f_{xx} auf eine für die Untersuchung geeignetere Form dadurch bringen, daß man das Quadrat von $f_{xx}x' + f_{xy}y'$ absondert. Diese Form ist:

$$\frac{1}{f_{xx}}(f_{xx}^2 x'^2 + 2 f_{xx} f_{xy} y'^2) + f_{yy} y'^2$$

oder:

$$\frac{1}{f_{xx}}(f_{xx}x' + f_{xy}y')^2 - \frac{1}{f_{xx}} \cdot f_{xy}^2 y'^2 + f_{yy} y'^2$$

oder auch:

$$\frac{1}{f_{xx}}(f_{xx}x' + f_{xy}y')^2 + \frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{f_{xx}} y'^2,$$

also wegen (13):

$$\frac{1}{f_{xx}}[(f_{xx}x' + f_{xx}y')^2 + D y'^2].$$

Ist nun D positiv, so ist der Inhalt der eckigen Klammern positiv; gleich Null würde er ja nur für das ausgeschlossene Wertepaar $x' = 0$, $y' = 0$ sein. Demnach tritt ein Maximum oder ein Minimum ein, je nachdem f_{xx} negativ oder positiv ausfällt. Ist dagegen D negativ, so wird der Inhalt der eckigen Klammern negativ, wenn man x' und y' so wählt, daß das erste Quadrat verschwindet, dagegen positiv, wenn man $y' = 0$ setzt. Demnach tritt dann weder ein Minimum noch ein Maximum ein.

Ist zweitens $f_{xx} = 0$, aber $f_{xy} \neq 0$ an der Stelle (x, y), so läßt sich (12) ganz entsprechend so darstellen:

$$\frac{1}{f_{yy}}[(f_{xy}x' + f_{yy}y')^2 + D x'^2],$$

und dann kann man ebenso schließen, so daß nur im Fall eines positiven D ein Maximum oder Minimum eintritt, und zwar je nachdem f_{yy} negativ oder positiv ausfällt.

Ist drittens sowohl $f_{xx} = 0$ als auch $f_{yy} = 0$, an der Stelle (x, y), so muß $f_{xy} \neq 0$ nach (13) sein, da $D \neq 0$ vorausgesetzt wurde. Dann ist D negativ, und aus (12) wird einfach $2 f_{xy} x' y'$. Dieser Wert kann aber durch geeignete Wahl von x' und y' nach Belieben positiv oder negativ gemacht werden, so daß weder ein Maximum noch ein Minimum eintritt.

Somit ergibt sich nur im Fall $D > 0$ ein Maximum oder Minimum. Wir machen noch darauf aufmerksam, daß f_{xx} und f_{yy} in

diesem Fall stets dasselbe Vorzeichen haben, weil ja nach (13) wegen $D > 0$ das Produkt $f_{xx} f_{yy} > f_{xy}^2$, also positiv ist. Daher können wir das Ergebnis so zusammenfassen:

Satz 26: Eine stetige Funktion $f(x, y)$ von zwei unabhängigen Veränderlichen x und y mit stetigen partiellen Differentialquotienten $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$ kann nur für solche Wertepaare x, y ein Maximum oder Minimum haben, für die sowohl f_x als auch f_y gleich Null wird. Wenn für ein derartiges Wertepaar die Größe

$$D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$$

von Null verschieden ist, tritt nur im Fall $D > 0$ wirklich ein Maximum oder Minimum ein und zwar, je nachdem die alsdann übereinstimmenden Vorzeichen von f_{xx} und f_{yy} entweder Minuszeichen oder Pluszeichen sind.

4. Beispiel: Für welchen Punkt $(x; y)$ der Ebene ist die Summe der Quadrate der Entfernungen von n festen Punkten $P_1, P_2, \ldots P_n$ mit den Koordinaten $a_1, b_1; a_2, b_2$ usw. am kleinsten? Gefragt wird nach dem Minimum der Funktion

$$f = (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + \cdots + (x - a_n)^2 + (y - b_n^2).$$

Hier ist

$$f_x = 2\,[(x - a_1) + \cdots + (x - a_n)], \qquad f_y = 2\,[(y - b_1) + \cdots + (y - b_n)],$$

$$f_{xx} = 2n, \qquad f_{xy} = 0, \qquad f_{yy} = 2n, \qquad D = 4n^2 > 0.$$

Demnach tritt ein Minimum ein und zwar für denjenigen Punkt, dessen Koordinaten das arithmetische Mittel der Abszissen $a_1, a_2, \ldots a_n$ und das der Ordinaten $b_1, b_2, \ldots b_n$ von $P_1, P_2, \ldots P_n$ sind. Dieser Punkt ist nach dem zweiten Beispiel, S. 183, der Schwerpunkt der n gegebenen Punkte.

Die Stellen $(x; y)$ der Ebene, an denen $z = f(x, y)$ ein Maximum oder Minimum erreicht, müssen nach Satz 26 vor allem die Bedingungen $f_x = 0, f_y = 0$ befriedigen. Sie gehören daher zu den auf S. 694 als singulär bezeichneten Stellen im Netz der Niveaukurven und Kurven stärksten Gefälles.

Wir schalten ein: Bedeutet $z = f(x, y)$ wie im vorigen Paragraphen die Gleichung einer Fläche im Raum, so sind diejenigen Wertepaare x, y, für die z ein Maximum oder Minimum hat, die x- und y-Koordinaten der höchsten und tiefsten Stellen der Fläche. Ihre Tangentialebenen müssen zur xy-Ebene parallel, d. h. ihre Normalen zur z-Achse parallel sein. Demnach muß die Normale einer derartigen Stelle hinsichtlich der z-Achse den Richtungskosinus $+1$ oder -1 haben. Die dritte Formel (14) auf S. 683 zeigt, daß $\cos\nu = \pm 1$ nur für $f_x = 0$, $f_y = 0$ wird. So kommt

man auf einem andern Weg zu den beiden ersten notwendigen Bedingungen des Maximums oder Minimums. Daß sie allein nicht ausreichen, ist auch geometrisch klar. Denn ebenso wie auf einer Kurve in der Ebene (vgl. S. 105) kann es auf einer krummen Fläche im Raum Terrassenpunkte geben, d. h. Stellen mit wagerechten Tangentialebenen, die weder höchste noch tiefste Stellen sind.

Liegt eine Funktion z von n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ vor:

(14) $$z = f(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

so kann man wieder nach ihren Maximis und Minimis fragen. Dabei wird die allgemeine Differentialformel (5), S. 648 benutzt:

(15) $$dz = f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 + \cdots + f_{x_n} dx_n.$$

Die ersten Betrachtungen auf S. 699 können wir auch jetzt anstellen: Wir denken uns nämlich das Wertesystem $x_1, x_2, \ldots x_n$ zeitlich veränderlich, setzen also:

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \ldots x_n = \varphi_n(t)$$

und bekommen nach (15) entsprechend wie in (10):

(16) $$\frac{dz}{dt} = f_{x_1} x_1' + f_{x_2} x_2' + \ldots + f_{x_n} x_n'.$$

Nach Satz 8, S. 106, ist zunächst zu verlangen, daß für das gesuchte Wertesystem $dz : dt$ gleich Null werde und zwar ganz gleichgültig, auf welchem Weg wir zu dem Wertesystem gelangen, so daß zu fordern ist, daß (16) für alle Werte von $x_1', x_2', \ldots x_n'$ verschwinde. Dies führt zu den Bedingungen $f_{x_1} = 0, \ldots f_{x_n} = 0$. Demnach gilt der

Satz 27: Eine differentiierbare Funktion f von n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ kann nur für solche Wertesysteme ein Maximum oder Minimum haben, die den n Bedingungen genügen:

$$f_{x_1} = 0, \qquad f_{x_2} = 0, \ldots f_{x_n} = 0.$$

Ob aber tatsächlich ein Maximum oder Minimum eintritt, ist hiermit noch nicht entschieden.

Bei den Anwendungen ist die Sachlage oft so einfach, daß man von vornherein aus der Natur der Aufgabe entnehmen kann, ob wirklich ein Maximum oder Minimum eintritt. Wir wollen die Untersuchung nicht weiterführen.

5. Beispiel: Die Ausgleichungsrechnung behandelt die Frage, wie man aus mehreren fehlerhaften Bestimmungen die wahrscheinlich richtigen Ergebnisse findet. Wir nehmen an, es handle sich um die Ermittelung einer einzigen Größe; zu diesem Zweck seien etwa n gleich sorgfältige Bestimmungen gemacht worden, wodurch sich n Werte ergeben, die aber nicht völlig übereinstimmen werden. Bedeutet ε eine beliebig kleine positive Größe, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler einer Bestimmung zwischen x und $x+\varepsilon$ liegt, gleich $y\,\varepsilon$, wenn y den auf S. 602 unter (23) angegebenen Wert

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 x^2}$$

hat. Die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler zwischen $x-\varepsilon$ und x liegt, ist gerade so groß. Mithin hat die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler um weniger als ε von x abweicht, den Wert $2\,y\,\varepsilon$. Die Größe h ist eine Konstante, die von den sogenannten Elementarfehlern (S. 599) abhängt, also für alle Bestimmungen dieselbe ist, wenn alle gleich sorgfältig durchgeführt worden sind. Die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß der Fehler der ersten Bestimmung um weniger als ε von x_1, der der zweiten um weniger als ε von x_2 usw. abweicht, sind also:

$$\frac{2\,h\,\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 x_1^2}, \qquad \frac{2\,h\,\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 x_2^2}, \quad \ldots \quad \frac{2\,h\,\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 x_n^2}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß alles dies zugleich eintritt, ist nach den Lehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung gleich dem Produkt aller einzelnen Wahrscheinlichkeiten, also gleich

$$\left(\frac{2\,h\,\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}.$$

Je größer dieser Wert ist, um so mehr nähern wir uns der Gewißheit. Aber dieser Wert wird um so größer, je kleiner $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ wird. Der wahrscheinliche Wert der gesuchten Größe ergibt sich daher, wenn die Summe der Fehlerquadrate am kleinsten wird. (Weil ε nach Null strebt, fallen z. B. $x_1-\varepsilon$ und $x_1+\varepsilon$ in x_1 zusammen usw., so daß $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Fehler sind.) Hiermit kommen wir zu dem von Gauss (S. 610) aufgestellten Grundsatze: Man muß die gesuchte Größe so wählen, daß die Summe der Fehlerquadrate am kleinsten wird. Hiervon haben wir schon einmal, nämlich bei der Fourierschen Reihe, vgl. S. 627, Gebrauch gemacht. Man nennt dies Verfahren die Methode der kleinsten Quadrate; besser wäre es zu sagen: Methode der kleinsten Quadratsumme.

Wenn n Bestimmungen einer gesuchten Größe u die voneinander abweichenden Ergebnisse $a_1, a_2, \ldots a_n$ liefern, sind $u-a_1, u-a_2, \ldots u-a_n$ die n Fehler $x_1, x_2, \ldots x_n$. Der wahrscheinliche Wert von u ist daher derjenige, für den

$$(u-a_1)^2+(u-a_2)^2+\cdots+(u-a_n)^2$$

am kleinsten wird, und dies tritt ein für

$$u = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

Bei n gleich sorgfältigen Bestimmungen einer Größe ist also ihr wahrscheinlicher Wert das arithmetische Mittel aller n beobachteten Werte der Größe.

Handelt es sich um die Bestimmung von mehreren Größen, so liegt eine Aufgabe vor, in der man das Minimum einer Funktion von mehreren Veränderlichen zu suchen hat. Hierzu zwei Beispiele:

In der Ebene sei ein gewisser Punkt zu ermitteln. Durch n verschiedene gleich gute Verfahren mögen sich jedoch verschiedene Punkte $(a_1; b_1), \ldots (a_n; b_n)$ ergeben haben. Ist $(x; y)$ der gesuchte Punkt, so sind die Fehler der einzelnen Verfahren die Entfernungen dieses Punktes von den n Stellen, also die Fehlerquadrate die n Größen:

$$(x - a_k)^2 + (y - b_k)^2 \qquad (k = 1, 2, \ldots n).$$

Demnach ist die Summe der Quadrate aller Fehler die im 4. Beispiele betrachtete Funktion f. Werden also für einen Punkt durch verschiedene gleich sorgfältige Verfahren mehrere Stellen ermittelt, so ist die wahrscheinliche Lage des Punktes der Schwerpunkt dieser Stellen.

Wir wollen jetzt annehmen, ein Punkt werde durch mehrere Verfahren ermittelt, die lauter Geraden ergeben, auf denen er liegen müßte. Sind es nur zwei Geraden so wird man ihren Schnittpunkt zu nehmen haben. Sind es aber mehr als zwei, so werden sie sich wegen der unvermeidlichen Fehler nicht genau treffen. Wenn man beispielsweise den Höhenschnittpunkt eines Dreiecks ermitteln will, werden sich die drei Höhen in der Zeichnung doch nicht genau in einem Punkte schneiden Nach der Methode der kleinsten Quadrate gehen wir so vor: Sind n Geraden als geometrische Örter für den gesuchten Punkt gefunden worden und sind ihre Gleichungen in der Normalform diese:

$$x \cos \alpha_k + y \sin \alpha_k - p_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots n),$$

so sind die linken Seiten dieser Gleichungen nach S. 660 für einen beliebigen Punkt $(x; y)$ seine Abstände $l_1, l_2, \ldots l_n$ von den n Geraden. Diese Abstände sind die Fehler. Also wird gefordert, daß die Summe

$$z = (x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1)^2 + \cdots + (x \cos \alpha_n + y \sin \alpha_n - p_n)^2$$

am kleinsten werde. Sie ist eine Funktion von x und y. Nach Satz 26 setzen wir ihre partiellen Ableitungen nach x und y gleich Null. Dies gibt:

$$(17)\begin{cases} \cos \alpha_1 (x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1) + \cdots + \cos \alpha_n (x \cos \alpha_n + y \sin \alpha_n - p_n) = 0, \\ \sin \alpha_1 (x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1) + \cdots + \sin \alpha_n (x \cos \alpha_n + y \sin \alpha_n - p_n) = 0. \end{cases}$$

Da die Inhalte der Klammern die Abstände $l_1, l_2, \ldots l_n$ sind, besagt dies: Die Summen der Projektionen der Abstände $l_1, l_2, \ldots l_n$ auf die x-Achse und y-Achse müssen beide gleich Null sein, denn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ sind die Winkel, die $l_1, l_2, \ldots l_n$ mit der x-Achse bilden. Nach Satz 11, S. 408, läßt sich das auch so aussprechen: Faßt man $l_1, l_2, \ldots l_n$ als Kräfte auf, so muß sich ihr Kräftevieleck schließen. Der wahrscheinliche Punkt ist also derjenige, für den die Abstände von den n Geraden, aufgefaßt als Kräfte, einander das Gleichgewicht halten. Im Fall $n = 3$, siehe Fig. 432, bilden die Geraden ein Dreieck, und jedes Kräftedreieck ist dann dem Dreieck ähnlich. Folglich liegt der gesuchte Punkt so, daß sich seine Abstände von den Seiten des Dreiecks zueinander verhalten wie die Seitenlängen. Auch im Fall $n > 3$ lassen sich die Koordinaten des gesuchten Punktes aus den beiden in x und y linearen Gleichungen (17) berechnen.

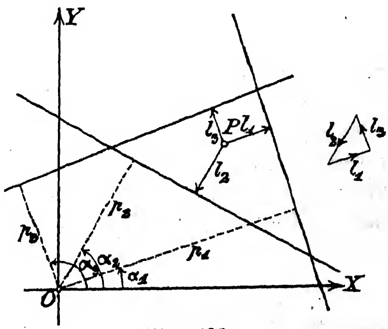


Fig. 432.

Das vollständige Differential

$$dz = f_x\,dx + f_y\,dy \tag{18}$$

einer Funktion $z = f(x, y)$ ist ein in dx und dy linearer Ausdruck, in dem die Koeffizienten f_x und f_y Funktionen von x und y sind. Falls die Stetigkeitsbedingungen des Satzes 6, S. 654, erfüllt sind, ist $f_{xy} = f_{yx}$, d. h. der partielle Differentialquotient des Koeffizienten von dx hinsichtlich y ist gleich dem partiellen Differentialquotienten des Koeffizienten von dy hinsichtlich x. Daraus erhellt, daß nicht jeder beliebige Ausdruck von der Form

$$\varphi(x, y)\,dx + \psi(x, y)\,dy \tag{19}$$

das Differential einer Funktion $z = f(x, y)$ sein kann. Beispielsweise nicht der Ausdruck $x^2\,dx + x\,y\,dy$, denn x^2 gibt nach y differentiiert Null, dagegen xy nach x differentiiert y. Vielmehr könnte ein Ausdruck von der Form (19) höchstens dann das vollständige Differential einer Funktion $z = f(x, y)$ sein, wenn die Bedingung

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} \quad \text{oder} \quad \varphi_y = \psi_x \tag{20}$$

erfüllt wäre. Wir wollen nun zeigen, daß diese Bedingung auch vollkommen ausreicht, vorausgesetzt, daß $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ sowie die in (20) vorkommenden partiellen Differentialquotienten φ_y und ψ_x stetige Funktionen von x und y sind.

Wir bilden zu diesem Zweck zunächst durch partielle Integration hinsichtlich x eine Funktion

$$F = \int \varphi(x, y)\,\partial x\,, \tag{21}$$

indem wir dabei y als Konstante behandeln. Dies ist eine Funktion von x und y; ihr partieller Differentialquotient hinsichtlich x ist augenscheinlich $\varphi(x, y)$, da die Differentiation nach x die Integration nach x wieder aufhebt. Wir wollen nun den partiellen Differentialquotienten der soeben hergestellten Funktion F hinsichtlich y berechnen. Zu diesem Zweck möge y um dy wachsen. Dann geht statt F hervor:

$$\int \varphi(x, y + dy)\,\partial x.$$

Der Zuwachs von F ist also:

$$\int \varphi(x, y + dy)\,\partial x - \int \varphi(x, y)\,\partial x,$$

mithin der gesuchte partielle Differentialquotient:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\int \varphi(x, y + dy)\,\partial x - \int \varphi(x, y)\,\partial x}{dy}$$

oder, da die Differenz der Integrale nach Satz 1, S. 575, in ein Integral zusammengezogen werden darf und der Nenner dy unter das Integralzeichen gebracht werden kann:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int \frac{\varphi(x, y + dy) - \varphi(x, y)}{dy}\,\partial x.$$

Der Integrand ist nach (2) S. 643, der partielle Differentialquotient von $\varphi(x, y)$ hinsichtlich y, also:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,\partial x = \int \varphi_y\,\partial x.$$

Wenn nun die Bedingung (20) erfüllt ist, kann φ_y durch ψ_x ersetzt werden. Somit kommt:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int \frac{\partial \psi}{\partial x}\,\partial x.$$

Wird aber eine Funktion ψ nach einer Veränderlichen x differentiiert und dann das Ergebnis hinsichtlich dieser Veränderlichen wieder integriert werden, so geht nach S. 573 dieselbe Funktion ψ vermehrt um eine additive Konstante hervor, d. h. vermehrt um eine Größe, die von x frei ist. Diese Größe kann hier aber sehr wohl noch von y abhängen, weil y in ψ auftritt. Demnach schließen wir, daß

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \psi(x, y) + Y(y).$$

ist, wo Y eine Funktion von y allein bedeutet. Die Funktion F von x und y hat folglich partielle Differentialquotienten von der Form:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \varphi(x, y), \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \psi(x, y) + Y(y).$$

Ihr vollständiges Differential ist also:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy = \varphi(x, y)\,dx + [\psi(x, y) + Y(y)]\,dy,$$

und hieraus folgt:

$$\varphi(x, y)\,dx + \psi(x, y)\,dy = dF - Y(y)\,dy. \tag{22}$$

Nun bilden wir noch durch Integration eine Funktion

$$\omega = \int Y(y)\,dy$$

von y allein. Da $d\omega = Y(y)\,dy$ ist, folgt aus (22):

$$\varphi(x, y)\,dx + \psi(x, y)\,dy = dF - d\omega = d(F - \omega),$$

d. h. der vorgelegte Differentialausdruck (19) ist wirklich das vollständige Differential der Funktion $F - \omega$. Somit gilt der

Satz 28: Ein Differentialausdruck von der Form

$$\varphi(x, y)\,dx + \psi(x, y)\,dy,$$

in dem φ und ψ stetige Funktionen von zwei unabhängigen Veränderlichen x und y mit stetigen partiellen Differentialquotienten φ_y und ψ_x bedeuten, ist dann und nur dann das vollständige Differential einer Funktion von x und y, wenn

$$\varphi_y = \psi_x$$

ist.

Man nennt einen Differentialausdruck $\varphi\,dx + \psi\,dy$ nur dann ein vollständiges Differential, wenn die Bedingung $\varphi_y = \psi$ des Satzes erfüllt ist, d. h. wenn es eine Funktion f gibt, deren Differential df gleich $\varphi\,dx + \psi\,dy$ ist. Die Beweisführung zeigt, wie man dann diese Funktion finden kann, die $\varphi\,dx + \psi\,dy$ als Differential hat. Übrigens ist noch zu bemerken: Wenn zwei verschiedene Funktionen f und f_1 dasselbe vollständige Differential $\varphi\,dx + \psi\,dy$ haben, folgt aus $df = df_1$ oder $d(f - f_1) = 0$, daß $f - f_1$ konstant sein muß, d. h. f_1 die Form $f +$ konst. hat. Somit können wir zu Satz 28 hinzufügen:

Satz 29: Ist $f(x, y)$ eine Funktion, die ein vorgeschriebenes vollständiges Differential $\varphi(x, y)\,dx + \psi(x, y)\,dy$ hat, so ist jede andere Funktion mit demselben vollständigen Differential von der Form $f +$ konst.

6. Beispiel: Liegt der Differentialausdruck

$$-\frac{y}{x^2}\,dx + \frac{1}{x}\,dy \tag{23}$$

vor, so ist $\varphi = -y : x^2$ und $\psi = 1 : x$, also $\varphi_y = -1 : x^2$ und auch $\psi_x = -1 : x^2$, so daß die Bedingung $\varphi_y = \psi_x$ in diesem Fall erfüllt ist. Auch sind φ, ψ, φ_y und ψ_x stetig, wenn man den Wert $x = 0$ ausschließt. Um eine Funktion zu finden, deren vollständiges Differential das vorgelegte ist, berechnen wir nach (21) das Integral

$$F = \int -\frac{y}{x^2}\,\partial x = -y\int\frac{dx}{x^2}.$$

Da $\int dx : x^2$ gleich $-1 : x +$ konst. ist, liegt in

$$F = \frac{y}{x}$$

eine derartige Funktion F vor. Für diese Funktion ist

$$F_x = -\frac{y}{x^2}, \qquad F_y = \frac{1}{x},$$

d. h. dF hat den vorgeschriebenen Wert (23). Demnach ist jede Funktion mit dem vollständigen Differential (23) von der Form

$$f = \frac{y}{x} + \text{konst.}$$

§ 5. Rückblick und Schluß.

In diesem letzten Paragraphen wollen wir zunächst einige Betrachtungen die früher vereinzelt vorkamen, zusammenfassen.

Wir legten unseren Untersuchungen in der Ebene fast immer ein rechtwinkliges Achsenkreuz zugrunde. Öfters erwies es sich als nützlich, eine Veränderung vorzunehmen, und zwar geschah dies in zwei verschiedenen Arten: Wir fanden es z. B. auf S. 93 u. f. angebracht, eine Figur durch Verschieben parallel zur einen und dann parallel zur anderen Achse in eine neue Lage gegenüber dem Achsenkreuze zu bringen. Dieselbe Wirkung erzielt man, wenn man die Figur in Ruhe läßt, dagegen das Achsenkreuz passend verschiebt. Man kann auch Drehungen vornehmen. Ganz allgemein: Man kann die Beziehung zwischen einer Figur und dem Achsenkreuze zuweilen dadurch bequemer gestalten, daß man beide in irgendeine neue gegenseitige Lage bringt wie z. B. auf S. 662. Deshalb wollen wir die allgemeinen Formeln für eine Koordinatentransformation entwickeln, vermöge deren man von einem rechtwinkligen Achsenkreuze zu einem andern übergehen kann.

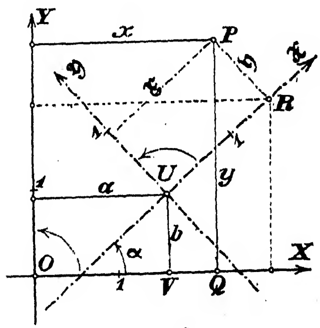


Fig. 433.

Der neue Anfangspunkt U, siehe Fig. 433, habe im alten Achsenkreuze die Koordinaten a und b. Die Richtung der neuen positiven $\mathfrak{x}$-Achse gehe aus der Richtung der alten positiven x-Achse durch Drehung um einen Winkel α hervor. Außerdem sei die neue positive $\mathfrak{y}$-Achse zur neuen positiven $\mathfrak{x}$-Achse gerade so gelegen wie die alte positive y-Achse zur alten positiven x-Achse, d. h. sie gehe durch Drehung um einen rechten Winkel im positiven Sinn hervor. Endlich setzen wir noch voraus, daß die Einheiten auf allen vier Achsen gleich groß seien. Ist P ein beliebiger Punkt der Ebene, der im alten System die Koordinaten x, y hat, so kommen

ihm im neuen System gewisse Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ zu. Also sind $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ Funktionen von x, y, umgekehrt aber auch x, y Funktionen von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$. Sie ergeben sich so: V sei der Fußpunkt der Ordinate b von U, Q der Fußpunkt der Ordinate y von P und R der Fußpunkt der Ordinate $\mathfrak{y}$ von P. Dann ist $OQPRUVO$ ein geschlossener Linienzug mit den Seiten $x, y, -\mathfrak{y}, -\mathfrak{x}, -b, -a$. Die Projektion dieses Linienzuges auf jede der vier Koordinatenachsen muß nach Satz 11, S. 408, die Summe Null haben. Aus der Projektion auf die x-Achse und auf die y-Achse ergibt sich:

$$x \cos 0 + y \cos \tfrac{1}{2}\pi - \mathfrak{y} \cos(\alpha + \tfrac{1}{2}\pi) - \mathfrak{x} \cos \alpha - b \cos \tfrac{1}{2}\pi - a \cos 0 = 0,$$

$$x \cos \tfrac{1}{2}\pi + y \cos \pi - \mathfrak{y} \cos(\alpha + \pi) - \mathfrak{x} \cos(\alpha + \tfrac{1}{2}\pi) - b \cos \pi - a \cos \tfrac{1}{2}\pi = 0.$$

Die zweite Gleichung geht aus der ersten hervor, wenn man überall den rechten Winkel $\frac{1}{2}\pi$ addiert. Die Gleichungen lassen sich einfacher schreiben:

$$x + \mathfrak{y} \sin \alpha - \mathfrak{x} \cos \alpha - a = 0,$$

$$-y + \mathfrak{y} \cos \alpha + \mathfrak{x} \sin \alpha + b = 0$$

oder:

$$(1) \qquad x = \mathfrak{x} \cos \alpha - \mathfrak{y} \sin \alpha + a, \qquad y = \mathfrak{x} \sin \alpha + \mathfrak{y} \cos \alpha + b.$$

Projizieren wir dagegen jenen geschlossenen Linienzug auf die $\mathfrak{x}$- und $\mathfrak{y}$-Achse, so ergeben sich Formeln, die $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ durch x und y ausdrücken. Wir können sie aber auch aus (1) ableiten: Wir multiplizieren die erste Gleichung (1) mit $\cos \alpha$ oder $-\sin \alpha$ und die zweite mit $\sin \alpha$ oder $\cos \alpha$ und addieren. Dann kommt wegen (4), S. 378:

$$(2) \quad \mathfrak{x} = (x - a) \cos \alpha + (y - b) \sin \alpha, \quad \mathfrak{y} = -(x - a) \sin \alpha + (y - b) \cos \alpha.$$

Die Formeln (1) und (2) sind die der allgemeinen Koordinatentransformation.

Wachsen x und y um dx und dy, so mögen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ um $d\mathfrak{x}$ und $d\mathfrak{y}$ zunehmen. Dann ist nach (1):

$$(3) \qquad dx = \cos \alpha \, d\mathfrak{x} - \sin \alpha \, d\mathfrak{y}, \qquad dy = \sin \alpha \, d\mathfrak{x} + \cos \alpha \, d\mathfrak{y}$$

oder nach (2):

$$(4) \qquad d\mathfrak{x} = \cos \alpha \, dx + \sin \alpha \, dy, \qquad d\mathfrak{y} = -\sin \alpha \, dx + \cos \alpha \, dy.$$

Die Formeln (4) ergeben sich auch aus den Formeln (3) durch Auflösen nach $d\mathfrak{x}$ und $d\mathfrak{y}$.

Ist $F(x, y)$ eine Funktion von x und y, so geht sie durch Einsetzen der Werte (1) von x und y in eine Funktion $\Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ über, so daß infolge der zwischen x, y und $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ bestehenden Beziehungen (1) und (2)

$$F(x, y) = \Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$$

und daher auch $dF = d\Phi$, d. h. nach Satz 1, S. 645:

$$F_x\, dx + F_y\, dy = \Phi_{\mathfrak{x}}\, d\mathfrak{x} + \Phi_{\mathfrak{y}}\, d\mathfrak{y}$$

ist. Setzen wir hierin die Werte (3) ein, so ergibt sich eine Gleichung in $d\mathfrak{x}$ und $d\mathfrak{y}$, die für alle Werte von $d\mathfrak{x}$ und $d\mathfrak{y}$ gelten muß, so daß die Koeffizienten von $d\mathfrak{x}$ rechts und links übereinstimmen müssen ebenso die von $d\mathfrak{y}$. Daher liest man sofort ab:

$$(5) \qquad F_x \cos\alpha + F_y \sin\alpha = \Phi_{\mathfrak{x}}, \qquad -F_{\mathfrak{x}} \sin\alpha + F_y \cos\alpha = \Phi_{\mathfrak{y}},$$

womit wir gefunden haben, wie sich $\Phi_{\mathfrak{x}}$ und $\Phi_{\mathfrak{y}}$ durch F_x und F_y ausdrücken. Auflösung dieser Gleichungen nach F_x und F_y gibt:

$$(6) \qquad \Phi_{\mathfrak{x}} \cos\alpha - \Phi_{\mathfrak{y}} \sin\alpha = F_x, \qquad \Phi_{\mathfrak{x}} \sin\alpha + \Phi_{\mathfrak{y}} \cos\alpha = F_y.$$

Statt der rechtwinkligen Koordinaten kann man auch schiefwinklige benutzen, siehe Fig. 434 mit den schiefwinkligen Koordinaten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ und dem Achsenwinkel α. Über schiefwinklige Koordinatensysteme haben wir in § 5 des vierten Kapitels schon ausführlich gesprochen. Wir erinnern hier noch einmal daran, daß im schiefwinkligen System die Flächeneinheit ein Parallelogramm ist, das schon in dem Beispiel auf S. 200, 201 vorkam und in Fig. 434 angegeben ist.

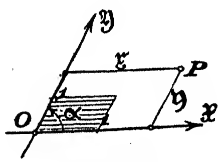


Fig. 434.

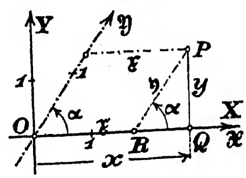


Fig. 435.

Ist eine Kurve in schiefwinkligen Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ gegeben und will man z. B. ihre Bogenlänge oder Krümmung berechnen, so muß man zu rechtwinkligen Koordinaten mit gleicher x- und y-Einheit übergehen. Wir benutzen am bequemsten in beiden Systemen denselben Anfangspunkt O, wählen ferner die positive $\mathfrak{x}$-Achse auch als positive x-Achse mit derselben Einheit und die positive y-Achse senkrecht dazu mit ebenfalls derselben Einheit, siehe Fig. 435. Die $\mathfrak{y}$-Einheit des schiefwinkligen Systems sei c-mal so lang wie die $\mathfrak{x}$-Einheit. Ist nun P irgend ein Punkt der Ebene und sind $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ seine schiefwinkligen und x, y seine rechtwinkligen Koordinaten, so sei Q der Fußpunkt seiner Ordinate y und R der Fußpunkt seiner Ordinate $\mathfrak{y}$. Wenn wir alle Strecken

in der Figur mit der x-Einheit messen, ist $RP = c\,\mathfrak{y}$. Ferner ist $OR = \mathfrak{x}$, $OQ = x$, $QP = y$. Also ergibt sich sofort:

$$x = \mathfrak{x} + c \cos \alpha \,.\, \mathfrak{y}, \qquad y = c \sin \alpha \,.\, \mathfrak{y}. \tag{7}$$

Umgekehrt ist:

$$\mathfrak{x} = x - \operatorname{ctg} \alpha \,.\, y, \qquad \mathfrak{y} = \frac{y}{c \sin \alpha}. \tag{8}$$

Wir haben schon auf S. 204 erwähnt, daß es außer den bisher benutzten Koordinatensystemen viele andere gibt. Insbesondere haben wir in § 3 des siebenten Kapitels Polarkoordinaten angewandt. Der Übergang von rechtwinkligen Koordinaten x und y zu Polarkoordinaten φ und r ist leicht zu bewerkstelligen, wenn man als Anfangsstrahl der Polarkoordinaten die positive x-Achse benutzt und die Amplitude φ positiv im Sinn der Drehung von der positiven x-Achse nach der positiven y-Achse hin mißt. Hat man nämlich überdies die x-Einheit, die y-Einheit und die Einheit des Radiusvektors r gleich groß gewählt, so kommt sofort (vgl. Fig. 403, S. 647):

$$x = r \cos \varphi, \qquad y = r \sin \varphi \tag{9}$$

und umgekehrt:

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{10}$$

Wählt man die Quadratwurzel positiv, so ist φ der Winkel, den die positive x-Achse beschreiben muß, um in den Radiusvektor r überzugehen, d. h. φ ist aus $\operatorname{arc\,tg}(y:x)$ so zu bestimmen, daß $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ dieselben Vorzeichen wie x und y bekommen.

Wachsen x und y um Differentiale dx und dy, so werden φ und r um diejenigen Differentiale $d\varphi$ und dr wachsen, die sich nach Satz 1, S. 645, aus (9) ergeben:

$$dx = -r \sin \varphi \, d\varphi + \cos \varphi \, dr, \qquad dy = r \cos \varphi \, d\varphi + \sin \varphi \, dr. \tag{11}$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit $-\sin \varphi$ und die zweite mit $\cos \varphi$, so ergibt ihre Addition:

$$r\,d\varphi = -\sin \varphi \, dx + \cos \varphi \, dy.$$

Multipliziert man dagegen die erste mit $\cos \varphi$ und die zweite mit $\sin \varphi$, so ergibt ihre Addition:

$$dr = \cos \varphi \, dx + \sin \varphi \, dy.$$

Führt man hierin nach (9) die Werte $x:r$ und $y:r$ für $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ ein, so kommt wegen $r^2 = x^2 + y^2$:

$$(12)\qquad d\varphi = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}, \qquad dr = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Diese Werte kann man auch durch Differentiation von (10) finden, (vgl. das 4. Beispiel, S. 646 u. f.).

Beim Wachsen von x und y um dx und dy wird irgendeine Funktion $F(x, y)$ um ihr Differential dF zunehmen. Wenn F, in φ und r ausgedrückt, die Funktion $\Phi(\varphi, r)$ wird, muß auch $dF = d\Phi$ sein. Also kommt:

$$F_x dx + F_y dy = \Phi_\varphi d\varphi + \Phi_r dr.$$

Setzt man hierin die Werte (11) oder (12) ein, so ergibt sich:

$$F_x(-r\sin\varphi\,d\varphi + \cos\varphi\,dr) + F_y(r\cos\varphi\,d\varphi + \sin\varphi\,dr) = \Phi_\varphi d\varphi + \Phi_r dr$$

und

$$F_x dx + F_y dy = \Phi_\varphi \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} + \Phi_r \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Da die erste Gleichung für alle Differentiale $d\varphi$ und dr und die zweite für alle Differentiale dx und dy gelten muß, gibt die Vergleichung der Koeffizienten dieser Differentiale auf beiden Seiten der Gleichungen:

$$-r\sin\varphi\,F_x + r\cos\varphi\,F_y = \Phi_\varphi, \qquad \cos\varphi\,F_x + \sin\varphi\,F_y = \Phi_r$$

und:

$$F_x = \frac{-y}{x^2+y^2}\Phi_\varphi + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Phi_r, \qquad F_y = \frac{x}{x^2+y^2}\Phi_\varphi + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Phi_r.$$

Auflösung der beiden ersten Gleichungen nach F_x und F_y sowie Auflösung der beiden letzten nach Φ_φ und Φ_r gibt:

$$(13)\quad F_x = -\frac{\sin\varphi}{r}\Phi_\varphi + \cos\varphi\,\Phi_r, \qquad F_y = \frac{\cos\varphi}{r}\Phi_\varphi + \sin\varphi\,\Phi_r$$

und:

$$(14)\qquad \Phi_\varphi = -y F_x + x F_y, \qquad \Phi_r = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}F_x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}F_y.$$

Mit Hilfe der Gleichungen (9) bis (14) läßt sich der Übergang von rechtwinkligen zu Polarkoordinaten und umgekehrt leicht bewerkstelligen. Das Quadrat des **Bogenelements** ds^2 oder $dx^2 + dy^2$, siehe (19), S. 361, stellt sich infolge von (11) so dar:

$$ds^2 = r^2 d\varphi^2 + dr^2.$$

Demnach hat eine Kurve, die in Polarkoordinaten durch eine Funktion $r = f(\varphi)$ gegeben ist, wegen $dr = f'(\varphi)\,d\varphi$ die **Bogenlänge**:

$$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{f^2 + f'^2}\, d\varphi,$$

gemessen von der Stelle mit der Amplitude φ_0 bis zur Stelle mit der Amplitude φ_1. Dasselbe ergab sich geometrisch auf S. 593.

Zuweilen ist es zweckmäßig, überzählige Koordinaten zu benutzen, wie z. B. die Dreieckskoordinaten in der Ebene, von denen in § 6 des vierten Kapitels die Rede war. Ein anderes Beispiel hierzu ist das folgende.

Beispiel: $P_1, P_2, \ldots P_n$ seien feste Punkte im Raum, die wir Pole nennen. Dagegen sei ein Punkt X beweglich. Als Bestimmungsstücke von X benutzen wir die n Strecken $x_1, x_2, \ldots x_n$ von den Polen $P_1, P_2, \ldots P_n$ bis X, und zwar positiv gemessen. Zur Bestimmung von X würde es genügen, nur drei von den n Strecken zu geben, weil man dann mit Hilfe der Trigonometrie alle anderen durch diese drei und durch die Abstände der Pole voneinander ausdrücken kann. Die Ausdrücke sind aber umständlich. Obwohl also $n-3$ Bestimmungsstücke überzählig sind, benutzen wir doch alle n Größen $x_1, x_2, \ldots x_n$ als Koordinaten des beweglichen Punktes X. Nun sei $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ eine gegebene Funktion von $x_1, x_2, \ldots x_n$. Zu jedem Punkt X des Raumes gehört dann ein bestimmter Wert dieser Funktion; also liegt eine Funktion des Ortes X im Raum vor (wie auf S. 691 in der Ebene). Wir können uns z. B. denken, der Raum sei mit Masse gefüllt, und $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ gebe die Dichte der Masse an der Stelle X an. Wir fragen nach der Geschwindigkeit, mit der sich der Wert der Ortsfunktion f ändert, wenn X einen unendlich kurzen Weg ds, ein Wegelement, zurücklegt, siehe Fig. 436, worin $XX' = ds$ sei. Die Richtung von ds bilde mit den Verlängerungen von $P_1X, P_2X, \ldots P_nX$ über X hinaus die Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$. Ferner seien $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$ die Differentiale, um die $x_1 = P_1X, x_2 = P_2X, \ldots x_n = P_nX$ wachsen, wenn X nach X' geht, so daß $P_1X' = x_1 + dx_1$ usw. ist. Die Figur, in der XX' oder ds nach Null streben soll, lehrt, daß die Formeln bestehen:

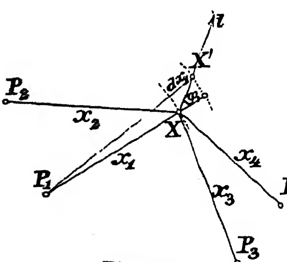


Fig. 436.

(15) $$dx_1 = ds\cos\varphi_1, \quad dx_2 = ds\cos\varphi_2, \;\ldots\; dx_n = ds\cos\varphi_n.$$

Nach (5), S. 648, ist die Änderung von f auf dem Weg XX' das Differential:

$$df = f_{x_1}dx_1 + f_{x_2}dx_2 + \cdots + f_{x_n}dx_n,$$

daher die Geschwindigkeit v oder $df : ds$ der Änderung wegen (15):

(16) $$v = \frac{df}{ds} = f_{x_1}\cos\varphi_1 + f_{x_2}\cos\varphi_2 + \ldots + f_{x_n}\cos\varphi_n.$$

Um sie darzustellen, tragen wir auf den Verlängerungen von $P_1X, P_2X, \ldots P_nX$ über X hinaus die Werte von $f_{x_1}, f_{x_2}, \ldots f_{x_n}$ als Strecken $XY_1, XY_2, \ldots XY_n$, gemessen mit der Längeneinheit, ab (rückwärts, wenn sie negative Werte haben). Die Summe der Projektionen aller n Strecken $XY_1, XY_2, \ldots XY_n$ auf die Gerade t des

Weges XX' ist dann nach (16) die Geschwindigkeit v, dargestellt mittels derselben Einheit. Wir können wie bei der Zusammensetzung von Kräften verfahren: Wir bilden die Mittelkraft XR der n als Kräfte aufgefaßten Strecken $XY_1, XY_2, \ldots XY_n$, indem wir das Kräftevieleck herstellen, das in Fig. 437 punktiert ist. Dann projizieren wir die Mittelkraft XR auf die Wegrichtung t. Hiernach ist die Geschwindigkeit v gleich der längs t gelegenen Sehne der Kugel mit dem Durchmesser XR. Am stärksten ändert sich die Ortsfunktion in der Richtung der Strecke XR selbst, da dann die Geschwindigkeit ihr Maximum $v_m = XR$ hat. Die Funktion ändert sich dagegen nicht, wenn man senkrecht zu XR unendlich wenig fortschreitet, also auf einem in X zu XR senkrechten unendlich kleinen Flächenstücke. Zu beachten ist, daß die Strecken $XY_1, \ldots XY_n$ und mithin auch die Strecke XR für verschiedene Punkte X verschiedene Größen und Richtungen haben werden. Folgt man nun stets der jeweiligen Richtung von XR, so beschreibt man eine Kurve stärksten Gefälles der Funktion f. Der Raum ist von solchen Kurven erfüllt, wie wenn eine Strömung durch ihn ginge. Senkrecht zu allen diesen Kurven stärksten Gefälles sind Flächen, bestehend aus den erwähnten unendlich kleinen Flächenstücken.

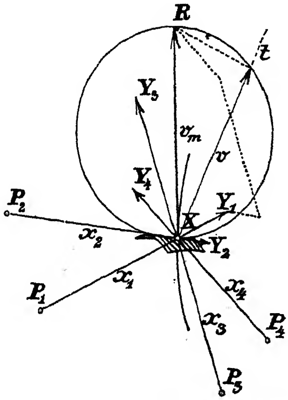


Fig. 437.

Bewegt sich X auf einer solchen Fläche, so bleibt f ungeändert. Diese Flächen, die ebenfalls den ganzen Raum, schalenförmig einander umschließend, ausfüllen, heißen die Niveauflächen der Ortsfunktion f. Sie werden senkrecht von allen Kurven stärksten Gefälles durchsetzt.

Ist z. B. gegeben:

$$f = k\left(\frac{m_1}{x_1} + \frac{m_2}{x_2} + \ldots + \frac{m_n}{x_n}\right), \tag{17}$$

wo k, m_1, m_2, ... m_n Konstanten seien, so wird:

$$XY_1 = f_{x_1} = -\frac{km_1}{x_1^2}, \ \ldots \ XY_n = f_{x_n} = -\frac{km_n}{x_n^2}. \tag{18}$$

Diese Strecken sind negativ, wenn k, $m_1, \ldots m_n$ positive Werte haben, und daher dann rückwärts, von X nach den Polen hin, aufzutragen. Haben die Pole die Massen m_1, m_2, ... m_n und hat X die Masse Eins, so stellen die Strecken diejenigen Kräfte dar, mit denen die Pole den Punkt X nach dem Gravitationsgesetz anziehen (vgl. 6. Beispiel, S. 142). Die Niveauflächen, auf denen nach (17)

$$\frac{m_1}{x_1} + \frac{m_2}{x_2} + \ldots + \frac{m_n}{x_n} = \text{konst.}$$

ist, sind überall senkrecht zu derjenigen Kraft, mit der alle n Pole $P_1, P_2, \ldots P_n$ die Masseneinheit X anziehen. Die Differentialquotienten der Funktionen f sind nach (18) die Einzelkräfte; die Funktion f heißt das Potential der n Kraftzentren $P_1, P_2, \ldots P_n$.

Die an Fig. 436 angeknüpfte allgemeine Betrachtung beruhte auf den Formeln (15) für die Differentiale von $x_1, x_2, \ldots x_n$. Sie gilt daher auch in einem anderen Fall: Die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes X im

Raum seien x, y, z, ferner sei $f(x, y, z)$ eine gegebene Funktion von ihnen, so daß wieder f eine Ortsfunktion im Raum ist. Jetzt sind x, y, z die Abstände des beliebigen Punktes X von den drei Koordinatenebenen, und keine dieser drei Koordinaten ist überzählig. Die Fig. 438, in der wir die zu x senkrechte yz-Ebene im Querschnitte durch eine Gerade g angedeutet haben, zeigt, daß, wenn X nach X' um ds weiter wandert, wiederum $dx = ds \cos \varphi_1$ ist, wenn φ_1 den Winkel von XX' mit der Verlängerung der x-Koordinate bedeutet. Entsprechendes gilt von dy und dz. Wir haben also wieder Formeln wie (15). Daher können wir ebenso wie oben schließen. An die Stelle der Abstände von n festen Punkten treten dabei die Abstände x, y, z von den Koordinatenebenen. Die Funktion $f(x, y, z)$ bleibt ungeändert, wenn X oder $(x; y; z)$ auf gewissen Flächen wandert; und diese unendlich vielen Niveauflächen erfüllen den ganzen Raum, einander schalenförmig umschließend. Dagegen ändert sich $f(x, y, z)$ am stärksten, wenn der Punkt X eine Kurve stärksten Gefälles durchläuft. Diese Kurven erfüllen wie Stromlinien ebenfalls den ganzen Raum und durchbohren alle Niveauflächen senkrecht.

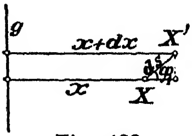


Fig. 438.

In der Mechanik wird gezeigt, daß die Bewegung eines Punktes X unter dem Einflusse von Kräften sehr oft von einer sogenannten Kräftefunktion oder einem Potential beherrscht wird. Man findet nämlich, daß eine Funktion $f(x, y, z)$ gebildet werden kann derart, daß ihre partiellen Differentialquotienten f_x, f_y, f_z die Komponenten der auf X oder $(x; y; z)$ wirkenden Kraft in den drei Achsenrichtungen vorstellen. Gerade diese partiellen Differentialquotienten wurden soeben benutzt. Daraus erhellt, daß dann die Niveauflächen, die zu dem Potential $f(x, y, z)$ eines Problems der Mechanik gehören, überall senkrecht sind zu den Richtungen, die der Kraft in den verschiedenen Punkten des Raumes zukommen.

Ein noch einfacherer Fall ist dieser: In der Ebene seien zwei Pole P_1 und P_2 vorhanden und x_1 und x_2 die Abstände eines beweglichen Punktes X von ihnen. Wenn wir uns auf die Ebene beschränken, treten an die Stelle von Niveauflächen Niveaukurven wie auf S. 693. Ist die gegebene Ortsfunktion f insbesondere gleich $x_1 + x_2$ so sind die Niveaukurven Linien, für deren Punkte X die Summe der Abstände von P_1 und P_2 konstant ist, also nach S. 183 die Ellipsen mit den Brennpunkten P_1 und P_2. Da hier $XY_1 = 1$ und $XY_2 = 1$ ist, teilt die zur Ellipsentangente senkrechte Mittelkraft den Winkel der Brennstrahlen in gleiche Teile, eine bekannte Ellipseneigenschaft (vgl. S. 189 u. f.). Wählt man dagegen die Ortsfunktion f gleich $x_1 - x_2$ so ergeben sich nach S. 190 die Hyperbeln mit den Brennpunkten P_1 und P_2, und man beweist ebenso aufs neue (vgl. S. 193), daß ihre Tangenten die Winkel der Brennstrahlen in gleiche Teile zerlegen. Alle Ellipsen und Hyperbeln mit den Brennpunkten P_1 und P_2 heißen konfokal, weil man einen Brennpunkt nach dem Lateinischen auch Fokus nennt. Da die durch einen Punkt X gehende Ellipse und Hyperbel dort Tangenten haben, die die Winkel von P_1X und P_2X in gleiche Teile zerlegen, durchsetzen die konfokalen Ellipsen die konfokalen Hyperbeln überall senkrecht. Sind die Ellipsen die Niveaukurven (im Fall $f = x_1 + x_2$), so sind die Hyperbeln die Kurven stärksten Gefälles; sind dagegen die Hyperbeln Niveaukurven (im Falle $f = x_1 - x_2$), so sind die Ellipsen die Kurven stärksten Gefälles.

Wir haben in diesem Buch Aufgaben aus der Differentialrechnung und Integralrechnung gelöst. Die Grundaufgabe der Differentialrechnung ist die Bestimmung des Differentialquotienten einer Funktion.

Dagegen besteht die Grundaufgabe der Integralrechnung darin, eine Funktion zu finden, die einen gegebenen Differentialquotienten hat. Wir haben aber gelegentlich auch einige Aufgaben erledigt, die von höherer Art sind. So haben wir in Satz 13, S. 341, die Frage nach allen Funktionen y von x beantwortet, für die

$$\frac{dy}{dx} = cy + k \qquad (c, k = \text{konst.}) \tag{19}$$

ist. Weiterhin haben wir auf S. 433 u. f. diejenigen Funktionen y von x bestimmt, für die

$$\frac{dy}{dx} = a \sin(bx) - cy \qquad (a, b, c = \text{konst.}) \tag{20}$$

ist. In Satz 21, S. 505, fanden wir ferner diejenigen Funktionen y von x, für die

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ay + b\frac{dy}{dx} \quad (a, b = \text{konst.}) \tag{21}$$

ist. Diese Betrachtungen gehören nicht mehr der Integralrechnung im engeren Sinn an. Denn in ihnen war nicht der Differentialquotient der gesuchten Funktion y von x als eine Funktion von x gegeben. Vielmehr war in den Fällen (19) und (20) der erste Differentialquotient als Funktion von x und y gegeben, während im Fall (21) der zweite Differentialquotient als Funktion von x und y und dem ersten Differentialquotienten gegeben war. Derartige Bedingungen heißen Differentialgleichungen, und zwar gewöhnliche, weil es sich um die Bestimmung von Funktionen von nur einer Veränderlichen handelte, deren Differentialquotienten man gewöhnliche nennt im Gegensatze zu den partiellen Differentialquotienten von Funktionen mehrerer Veränderlicher. Insbesondere sind (19) und (20) gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung, weil in ihnen der erste Differentialquotient von y als Funktion von x und y gegeben ist. Dagegen stellt (21) eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung vor, denn sie ist eine Bedingung für den zweiten Differentialquotienten der gesuchten Funktion.

Allgemein hat eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für eine noch unbekannte Funktion y von x die Form:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

oder, nach den Differentialquotienten aufgelöst, die Form:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

worin $f(x, y)$ eine gegebene Funktion von x und y bedeutet. Gefragt wird, wie sich y als Funktion von x darstellt. Wie die erwähnten Beispiele zeigten, enthalten die Lösungen y noch willkürliche Konstanten. Also gibt es unendlich viele Funktionen y, die einer derartigen Vorschrift genügen. Die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen wäre das nächste, das man betreiben müßte, wenn man weiter in die höhere Mathematik eindringen wollte.

Dazu müßte dann noch das Studium der Funktionentheorie treten, in der man genau die Stetigkeit, die Differentiierbarkeit, den Bereich einer Funktion usw. erörtert, Fragen, die uns nicht so erhebliche Schwierigkeiten bereiteten, weil wir uns auf die elementaren Funktionen beschränkt haben, nämlich auf die ganzen, gebrochenen und logarithmischen Funktionen, die Exponentialfunktionen und die Kreisfunktionen. Überdies haben wir immer nur reelle Werte der Veränderlichen betrachtet. Die Funktionentheorie dagegen berücksichtigt auch die imaginären Werte.

Man sieht also, daß zur weiteren Vervollkommnung in der Mathematik noch mancherlei gehört. Ist uns aber der Leser bis hierher treu gefolgt, so nennt er doch schon einen erheblichen Teil nützlicher mathematischer Kenntnisse sein eigen. Er wird imstande sein, sich selbst in solchen mathematischen Büchern zurechtzufinden, durch die er die gewonnenen Kenntnisse zu ergänzen vermag. Der Verfasser verabschiedet sich daher in der Hoffnung, daß seine Leser Liebe und Lust zu weiterer Vertiefung in mathematischen Dingen gewonnen haben mögen!

Anhang.

Tafel I.

Bogenmaß der Winkel.

Länge der Kreisbogen für den Halbmesser Eins.

(Vgl. S. 11.)

Grade		Minuten		Sekunden	
1°	0,01745	1′	0,00029	1″	0,00000
2°	0,0349$\overline{1}$	2′	0,00058	2″	0,0000$\overline{1}$
3°	0,0523$\overline{6}$	3′	0,00087	3″	0,00001
4°	0,06981	4′	0,00116	4″	0,0000$\overline{2}$
5°	0,0872$\overline{7}$	5′	0,00145	5″	0,00002
6°	0,1047$\overline{2}$	6′	0,0017$\overline{5}$	6″	0,0000$\overline{3}$
7°	0,12217	7′	0,0020$\overline{4}$	7″	0,00003
8°	0,1396$\overline{3}$	8′	0,0023$\overline{3}$	8″	0,0000$\overline{4}$
9°	0,1570$\overline{8}$	9′	0,0026$\overline{2}$	9″	0,00004

Tafel II.

Natürliche Logarithmen.

(Vgl. S. 284.)

	ln		ln		ln
0,1	− 2,302$\overline{6}$	0,6	− 0,5108	1,1	0,0953
0,2	− 1,6094	0,7	− 0,356$\overline{7}$	1,2	0,1823
0,3	− 1,204$\overline{0}$	0,8	− 0,2231	1,3	0,262$\overline{4}$
0,4	− 0,916$\overline{3}$	0,9	− 0,105$\overline{4}$	1,4	0,336$\overline{5}$
0,5	− 0,6931	1,0	0,0000	1,5	0,405$\overline{5}$

	ln		ln		ln
1,6	0,4700	2,2	$0{,}788\overline{5}$	3,2	$1{,}163\overline{2}$
1,7	0,5306	2,4	$0{,}875\overline{5}$	3,4	$1{,}223\overline{8}$
1,8	$0{,}587\overline{8}$	2,6	0,9555	3,6	1,2809
1,9	$0{,}641\overline{9}$	2,8	1,0296	3,8	1,3350
2,0	0,6931	3,0	1,0986	4,0	$1{,}386\overline{3}$

	ln		ln		ln
4,5	$1{,}504\overline{1}$	6,5	1,8718	8,5	$2{,}140\overline{1}$
5,0	1,6094	7,0	1,9459	9,0	2,1972
5,5	1,7047	7,5	2,0149	9,5	$2{,}251\overline{3}$
6,0	$1{,}791\overline{8}$	8,0	2,0794	10,0	$2{,}302\overline{6}$

	ln		ln
10	$2{,}302\overline{6}$	10 000	9,2103
100	$4{,}605\overline{2}$	100 000	11,5129
1000	$6{,}907\overline{8}$	1000 000	13,8155

Tafel III.

Die Vielfachen von M und $1 : M$

zur Verwandlung von natürlichen Logarithmen in gewöhnliche und umgekehrt:

$$\log x = M \ln x \,, \qquad \ln x = \frac{1}{M} \log x \,.$$

(Vgl. S. 299.)

n	$n\,M$	$n\,\frac{1}{M}$
1	$0{,}434\overline{3}$	$2{,}302\overline{6}$
2	$0{,}868\overline{6}$	$4{,}605\overline{2}$
3	$1{,}302\overline{9}$	$6{,}907\overline{8}$
4	$1{,}737\overline{2}$	9,2103
5	$2{,}171\overline{5}$	11,5129
6	$2{,}605\overline{8}$	13,8155
7	$3{,}040\overline{1}$	$16{,}118\overline{1}$
8	3,4744	$18{,}420\overline{7}$
9	$3{,}908\overline{7}$	$20{,}723\overline{3}$
n	$\frac{n}{\ln 10}$	$n \ln 10$

Tafel IV.

Hyperbolische Funktionen.

(Vgl. S. 359.)

φ	$\mathfrak{Sin}\,\varphi$	$\mathfrak{Cos}\,\varphi$	φ	$\mathfrak{Sin}\,\varphi$	$\mathfrak{Cos}\,\varphi$
0,0	0,0000	1,0000	1,0	1,1752	1,5431
0,1	0,100$\bar{2}$	1,0050	1,1	1,3356	1,6685
0,2	0,2013	1,020$\bar{1}$	1,2	1,509$\bar{5}$	1,810$\bar{7}$
0,3	0,3045	1,0453	1,3	1,698$\bar{4}$	1,9709
0,4	0,410$\bar{8}$	1,081$\bar{1}$	1,4	1,9043	2,1509
0,5	0,521$\bar{1}$	1,1276	1,5	2,129$\bar{3}$	2,3524
0,6	0,636$\bar{7}$	1,185$\bar{5}$	1,6	2,375$\bar{6}$	2,577$\bar{5}$
0,7	0,758$\bar{6}$	1,255$\bar{2}$	1,7	2,6456	2,8283
0,8	0,8881	1,3374	1,8	2,942$\bar{2}$	3,107$\bar{5}$
0,9	1,0265	1,433$\bar{1}$	1,9	3,268$\bar{2}$	3,4177

φ	$\mathfrak{Sin}\,\varphi$	$\mathfrak{Cos}\,\varphi$	φ	$\mathfrak{Sin}\,\varphi$	$\mathfrak{Cos}\,\varphi$
2,0	3,626$\bar{9}$	3,762$\bar{2}$	3,0	10,01$\bar{8}$	10,06$\bar{8}$
2,2	4,4571	4,5679	3,5	16,54$\bar{3}$	16,57$\bar{3}$
2,4	5,4662	5,5569	4,0	27,29$\bar{0}$	27,308
2,6	6,6947	6,7690	4,5	45,003	45,014
2,8	8,1919	8,2527	5,0	74,203	74,21$\bar{0}$

Für $\varphi \geqq 5{,}5$ unterscheiden sich $\mathfrak{Sin}\,\varphi$ und $\mathfrak{Cos}\,\varphi$ von $\frac{1}{2}e^{\varphi}$, auf drei Dezimalstellen abgerundet, um nicht mehr als $\pm 0{,}002$.

Für $\varphi < 0$ sind die Formeln $\mathfrak{Sin}\,(-\varphi) = -\mathfrak{Sin}\,\varphi$ und $\mathfrak{Cos}\,(-\varphi) = \mathfrak{Cos}\,\varphi$ zu benutzen.

Tafel V.

Differentialquotienten.

(S. 79, 83, 158) $$\frac{d\,x^n}{d\,x} = n\,x^{n-1}.$$

(S. 268) $$\frac{d\ln x}{d\,x} = \frac{1}{x}.$$

(S. 313) $$\frac{d\,e^x}{d\,x} = e^x.$$

(S. 359) $$\frac{d\,\mathfrak{Sin}\,x}{d\,x} = \mathfrak{Cos}\,x, \quad \frac{d\,\mathfrak{Cos}\,x}{d\,x} = \mathfrak{Sin}\,x, \quad \frac{d\,\mathfrak{Tg}\,x}{d\,x} = \frac{1}{\mathfrak{Cos}^2 x}.$$

(S. 394) $$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x, \qquad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x.$$

(S. 395) $$\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad \frac{d \operatorname{ctg} x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

(S. 445) $$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{d \operatorname{arc} \sin x}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & \dfrac{d \operatorname{arc} \cos x}{dx} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \dfrac{d \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}, & \dfrac{d \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x}{dx} = -\dfrac{1}{1+x^2}. \end{array}\right.$$

(S. 72) $$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

(S. 73) $$\frac{dku}{dx} = k\frac{du}{dx}, \qquad \text{wenn } k = \text{konst.}$$

(S. 77) $$\frac{d(uv)}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}.$$

(S. 81) $$\frac{d\left(\dfrac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}.$$

(S. 126) $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx},$$

wenn y eine Funktion von z und z eine Funktion von x ist.

Tafel VI.

Näherungsformeln.

(Vgl. S. 566).

Die folgenden Formeln gelten für $\lim \varepsilon = 0$.

(S. 546) $$\left\{\begin{array}{l} \sin \varepsilon = \varepsilon, \quad \cos \varepsilon = 1, \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \varepsilon, \\ \sin(\alpha + \varepsilon) = \sin \alpha + \varepsilon \cos \alpha, \\ \cos(\alpha + \varepsilon) = \cos \alpha - \varepsilon \sin \alpha. \end{array}\right.$$

(S. 566) $$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{tg}(\alpha + \varepsilon) = \operatorname{tg} \alpha + \dfrac{\varepsilon}{\cos^2 \alpha}, \\ \operatorname{ctg}(\alpha + \varepsilon) = \operatorname{ctg} \alpha - \dfrac{\varepsilon}{\sin^2 \alpha}. \end{array}\right.$$

(S. 546, 547) $$\left\{\begin{array}{ll} e^\varepsilon = 1 + \varepsilon, & \\ \ln(1+\varepsilon) = \varepsilon, & \log(1+\varepsilon) = \varepsilon M, \\ \ln(N+\varepsilon) = \ln N + \dfrac{\varepsilon}{N}, & \log(N+\varepsilon) = \log N + \dfrac{\varepsilon M}{N}. \end{array}\right.$$

(S. 551) $$\left\{\begin{array}{l} (1+\varepsilon)^m = 1 + m\,\varepsilon, \qquad \dfrac{1}{1+\varepsilon} = 1 - \varepsilon, \\ \sqrt{1+\varepsilon} = 1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon, \qquad \sqrt{a+\varepsilon} = \sqrt{a}\left(1 + \dfrac{\varepsilon}{2a}\right). \\ \dfrac{1}{\sqrt{a+\varepsilon}} = \dfrac{1}{\sqrt{a}}\left(1 - \dfrac{\varepsilon}{2a}\right). \end{array}\right.$$

Alle Potenzen und Wurzeln sind hier positiv.

(S. 566) $$f(a+\varepsilon) = f(a) + f'(a)\,\varepsilon.$$

(S. 567) $$f(a+\varepsilon) = f(a) + f'(a)\,\varepsilon + \tfrac{1}{2} f''(a)\,\varepsilon^2.$$

Tafel VII.

Integralformeln.

(S. 573) $$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_a^x f(x)\,dx = \left[\int (x)\,d\,x\right]_a^x, \\ \dfrac{d\int f(x)\,d\,x}{d\,x} = f(x), \qquad \displaystyle\int \frac{d\,f(x)}{d\,x}\,d\,x = f(x) + \text{konst.} \end{array}\right.$$

In den folgenden Formeln ist überall eine beliebige additive Konstante hinzuzufügen.

(S. 575) $$\int (u+v)\,d\,x = \int u\,d\,x + \int v\,d\,x.$$

(S. 576) $$\int k\,f(x)\,d\,x = k\int f(x)\,dx, \quad \text{wenn } k = \text{konst.}$$

(S. 580) $$\int f(x)\,d\,x = \int f(F(z))\,F'(z)\,dz, \quad \text{wenn } x = F(z).$$

(S. 577) $$\int u'v\,d\,x = uv - \int uv'\,dx.$$

(S. 583) $$\int \frac{u'}{u}\,d\,x = \ln u.$$

(S. 574) $$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int x^n\,d\,x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ (n \neq -1), \quad \int \frac{d\,x}{x} = \ln x \ \text{ oder } \ \ln(-x), \\ \displaystyle\int \sqrt{x}\,d\,x = \tfrac{2}{3}x\sqrt{x}, \quad \int \frac{d\,x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}. \end{array}\right.$$

(S. 575) $$\int \frac{d\,x}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\ln\frac{x-a}{x-b}.$$

(S. 608, 609)

$$\left\{\begin{aligned}
&\int \frac{\alpha x+\beta}{a x^2+b x+c}\,d x=\left(\frac{\alpha}{2a}+\frac{2\beta a-\alpha b}{2a\sqrt{b^2-4ac}}\right)\ln\left(2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}\right)\\
&\qquad\qquad+\left(\frac{\alpha}{2a}-\frac{2\beta a-\alpha b}{2a\sqrt{b^2-4ac}}\right)\ln\left(2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\text{für } b^2-4ac>0,\\
&\int \frac{\alpha x+\beta}{a x^2+b x+c}\,d x=-\frac{2\beta a-\alpha b}{a(2ax+b)}+\frac{\alpha}{a}\ln(2ax+b)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\text{für } b^2-4ax=0,\\
&\int \frac{\alpha x+\beta}{a x^2+b x+c}\,d x=\frac{\alpha}{2a}\ln(ax^2+bx+c)+\frac{2\beta a-\alpha b}{a\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\text{für } b^2-4ac<0.
\end{aligned}\right.$$

In den folgenden Formeln ist zur Abkürzung gesetzt:

$$R=a x^2+b x+c.$$

(S. 621)

$$\left\{\begin{aligned}
&\int\frac{dx}{\sqrt{R}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}\ln\frac{2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{R}}{2ax+b-2\sqrt{a}\sqrt{R}} &&\text{für } a>0,\\
&\int\frac{dx}{\sqrt{R}}=\frac{2}{b}\sqrt{R} &&\text{für } a=0,\\
&\int\frac{dx}{\sqrt{R}}=\frac{-1}{\sqrt{-a}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2ax+b}{2\sqrt{-a}\sqrt{R}} &&\text{für } a<0.
\end{aligned}\right.$$

(S. 622)

$$\left\{\begin{aligned}
&\int\frac{x^n}{\sqrt{R}}\,dx=\frac{1}{na}x^{n-1}\sqrt{R}-\frac{2n-1}{2n}\frac{b}{a}\int\frac{x^{n-1}}{\sqrt{R}}\,dx\\
&\qquad\qquad-\frac{n-1}{n}\frac{c}{a}\int\frac{x^{n-2}}{\sqrt{R}}\,dx,\\
&\int x^n\sqrt{R}\,dx=a\int\frac{x^{n+2}}{\sqrt{R}}\,dx+b\int\frac{x^{n+1}}{\sqrt{R}}\,dx+c\int\frac{x^n}{\sqrt{R}}\,dx.
\end{aligned}\right.$$

(S. 623)

$$\left\{\begin{aligned}
&\int\frac{dx}{x\sqrt{R}}=-\frac{1}{2\sqrt{c}}\ln\frac{2c+bx+2\sqrt{c}\sqrt{R}}{2c+bx-2\sqrt{c}\sqrt{R}} &&\text{für } c>0,\\
&\int\frac{dx}{x\sqrt{R}}=-\frac{2}{bx}\sqrt{R} &&\text{für } c=0,\\
&\int\frac{dx}{x\sqrt{R}}=\frac{1}{\sqrt{-c}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2c+bx}{2\sqrt{-c}\sqrt{R}} &&\text{für } c<0,\\
&\int\frac{dx}{x^n\sqrt{R}}=-\frac{1}{n-1}\frac{1}{c}\frac{\sqrt{R}}{x^{n-1}}-\frac{n-2}{n-1}\frac{a}{c}\int\frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{R}}\\
&\qquad\qquad-\frac{2n-3}{2n-2}\frac{b}{c}\int\frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{R}}.
\end{aligned}\right.$$

(S. 623) $$\int \frac{\sqrt{R}\,dx}{x^n} = a\int \frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{R}} + b\int \frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{R}} + c\int \frac{dx}{x^n\sqrt{R}}.$$

(S. 574) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x, \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x.$$

(S. 577) $$\int \ln x \; dx = x \ln x - x.$$

(S. 579) $$\int \frac{\ln x}{x} dx = \tfrac{1}{2} (\ln x)^2.$$

(S. 582) $$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \tfrac{1}{3} (\ln x)^3.$$

(S. 583) $$\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln \ln x.$$

(S. 574) $$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int e^x\, dx = e^x, \\ \displaystyle\int \sin x\, dx = -\cos x, \qquad \int \cos x\, dx = \sin x, \\ \displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x, \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x. \end{array}\right.$$

(S. 580) $$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int e^x \sin c x\, dx = \frac{1}{1+c^2} e^x (\sin c x - c \cos c x), \\ \displaystyle\int e^x \cos c x\, dx = \frac{1}{1+c^2} e^x (\cos c x + c \sin c x). \end{array}\right.$$

(S. 578) $$\int x \sin x\, dx = \sin x - x \cos x, \qquad \int x \cos x\, dx = \cos x + x \sin x.$$

(S. 583, 584) $$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln \operatorname{tg} x, \\ \displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \qquad \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right). \end{array}\right.$$

(S. 416) $$\int \sin k x \sin l x\, dx = -\frac{\sin (k+l) x}{2(k+l)} + \frac{\sin (k-l) x}{2(k-l)} \quad (k \pm l \neq 0).$$

(S. 415) $$\int \sin^2 k x\, dx = \tfrac{1}{2} x - \frac{1}{4k} \sin 2 k x.$$

(S. 416) $$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int \sin k x \cos l x\, dx = \frac{1-\cos (k+l) x}{2(k+l)} + \frac{1-\cos (k-l) x}{2(k-l)} \quad (k \pm l \neq 0), \\ \displaystyle\int \sin k x \cos k x\, dx = \frac{1-\cos 2 k x}{4k}, \\ \displaystyle\int \cos k x \cos l x\, dx = \frac{\sin (k+l) x}{2(k+l)} + \frac{\sin (k-l) x}{2(k-l)} \quad (k \pm l \neq 0). \end{array}\right.$$

(S. 415) $$\int \cos^2 k\,x\,d\,x = \tfrac{1}{2}\,x + \frac{1}{4\,k}\sin 2\,k\,x\,.$$

(S. 417) $$\int \sin(x+k)\sin(x+l)\,d\,x = -\tfrac{1}{4}\sin(2\,x+k+l) + \tfrac{1}{2}\,x\cos(k-l).$$

(S. 581) $$\int \operatorname{arc}\sin x\,d\,x = x\operatorname{arc}\sin x + \sqrt{1-x^2}\,.$$

Stichwörter.

G

L

M

N

O

P

Q

R

T

U

V

W

Z